El método matricial

Obtenga la solución completa de un oscilador sub-amortiguado (forzado) siguiendo los siguientes pasos.

(a) Escriba la ecuacuión a resolver y transfórmela en un ecuación equivalente sin amortiguamiento.

(b) Convierta su problema de segundo orden en un sistema matricial de primer orden. Resuelva el sistema.

(c) Analice los casos en que el forzante es cosenoidal o impulsivo.

Solución

(a) La ecuación del oscilador amortiguado y forzado es la siguiente

$$\ddot{x} + \Gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = a(t) \tag{1}$$

donde $x(t)$ es el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio y a(t) es el forzante (conocido). Se asume conocidas las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Primero multiplicamos la ecuación por una función de "prueba" exponencial $\exp(\beta t)$, donde β es un parámetro a determinar. Se elige esta función en particular porque sus derivadas son proporcionales a la función misma. O sea, es lo que se conoce como una auto-función.

$$e^{\beta t}\ddot{x} + \Gamma\,e^{\beta t}\,\dot{x} + \omega_0^2\,e^{\beta t}\,x = e^{\beta t}a(t) \tag{2}$$

Si agrupamos todos los términos necesarios para poder *identificar* la derivada segunda de un producto de funciones, podremos de alguna manera "absorber" el amortiguamiento y llegar a una ecuación equivalente "sin amortiguamiento". Para ello, comparamos con la siguiente expresión

$$\frac{d^2(e^{\beta t}x)}{dt^2} = e^{\beta t}\ddot{x} + 2\beta\,e^{\beta t}\,\dot{x} + \beta^2\,e^{\beta t}\,x \tag{3}$$

Por lo tanto, podemos identificar $\beta = \Gamma/2$ y completar cuadrados. Resulta

$$\frac{d^2(e^{\Gamma t/2}x)}{dt^2} + \left(\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}\right)e^{\Gamma t/2}\,x = e^{\Gamma t/2}a(t) \tag{4}$$

La función $y = e^{\Gamma t/2}x$ cumple con la ecuación de un oscilador sin amortiguamiento de frecuencia angular $\omega^2 = \omega_0^2 - \Gamma^2/4$.

(b) Transformación en un sistema de primer orden

La ecuación (4) es algo más simple que la ec. (1) pero aún es difícil reconocer la solución. Para facilitar esto, se puede etiquetar a la derivada primera como $v = \dot{y}$, de manera que $\ddot{y} = \dot{v}$. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{v} & = & -\omega^2 y + e^{\Gamma t/2} a(t) \\ \dot{y} & = & v \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} + e^{\Gamma t/2} a(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

El sistema es de primer orden, de la forma $\dot{\mathbf{y}} - A\mathbf{y} = e^{\Gamma t/2}\mathbf{a}(t)$. Al menos formalmente es posible aplicar el mismo método de la exponencial que ya usamos más arriba. Habría que multiplicar por $\exp(-At)$ de manera que

$$\frac{d(e^{-At}\mathbf{y})}{dt} = e^{-At}\dot{\mathbf{y}} - e^{-At} A\, \mathbf{y} \qquad (6)$$

Esto es posible si se define la función exponencial (matricial) como

$$e^A = I + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... \qquad (7)$$

La exponencial de una matriz *no* es la exponencial de cada componente, según la definición (7). Sólo en el caso en que A sea diagonal, la exponencial de A es igual a la exponencial de los elementos diagonales. Se demuestra también que si D es una matriz diagonal tal que

$$A = PDP^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad e^A = Pe^D P^{-1} \qquad (8)$$

por lo que habrá que diagonalizar el exponente para hallar en forma explícita el valor de $\exp(A)$.

Por otro lado, la solución al sistema (5) se obtiene siguiendo la misma metodología de la exponencial usada arriba. Resulta a partir de la aplicación de (6) que

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(0) + e^{At} \int_0^t e^{\Gamma t'/2} e^{-At'} \mathbf{a}(t')\, dt' \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

en donde se integró sobre ambos miembros y luego se pasó $\exp(-At)$ al segundo miembro. La integración se realizó sobre el intervalo $0 \leq t' \leq t$.

La diagonalización de $A = PDP^{-1}$ se realiza hallando primero los auto-valores y después los auto-vectores (necesarios para construir la matriz de transformación P). El procedimiento es el siguiente

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\omega^2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\omega \tag{10}$$

Si $\lambda = i\omega$ se obtiene el autovector

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -\omega^2 \\ 1 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = i\omega y \tag{11}$$

o sea que el primer auto-vector es $x\,(i\omega, 1)$.

Si $\lambda = -i\omega$ se obtiene el autovector

$$\begin{pmatrix} i\omega & -\omega^2 \\ 1 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -i\omega y \tag{12}$$

es decir $x\,(-i\omega, 1)$. Entonces, las matrices de diagonalización son

$$P = x \begin{pmatrix} i\omega & -i\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{x^{-1}}{2i\omega} \begin{pmatrix} 1 & i\omega \\ -1 & i\omega \end{pmatrix} \tag{13}$$

La matriz exponencial resulta

$$e^{At} = \frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} i\omega & -i\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\omega \\ -1 & i\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\omega\ \mathrm{sen}\,\omega t \\ \mathrm{sen}\,\omega t/\omega & \cos\omega t \end{pmatrix} \tag{14}$$

Conocida la matriz exponencial podemos rescatar la segunda fila del sistema (9)

$$y(t) = \dot{y}(0)\ \mathrm{sen}\,\omega t/\omega + y(0)\cos\omega t + \int_0^t a(t')e^{\Gamma t'/2}\ \mathrm{sen}\,\omega(t-t')/\omega\,dt \tag{15}$$

Reemplazando $y = e^{\Gamma t/2}x$ resulta

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2}\Big[\dot{y}(0)\ \mathrm{sen}\,\omega t/\omega + y(0)\cos\omega t\Big] + \int_0^t a(t')e^{-\Gamma(t-t')/2}\ \mathrm{sen}\,\omega(t-t')/\omega\,dt \tag{16}$$

donde $y(0) = x(0)$ y $\dot{y}(0) = \Gamma x(0)/2 + \dot{x}(0)$.

(c) Forzante $a(t) = a_0 \cos \omega t$

El estado estacionario corresponde al segundo sumando de (16). Entonces

$$x_p(t) = (a_0/\omega) \int_0^t e^{-\Gamma(t-t')/2} \cos \omega t' \, \mathrm{sen}\, \omega(t-t')\, dt' \tag{17}$$

Para resolver esta integral podemos usar la identidad trigonométrica

$$\cos \omega t' \, \mathrm{sen}\, \omega(t-t') = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{sen}\, \omega t + \mathrm{sen}\, \omega(t-2t') \Big) \tag{18}$$

y resultan las soluciones

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\, \mathrm{sen}\, \omega t \int_0^t e^{-\Gamma(t-t')/2}\, dt' = \frac{2e^{-\Gamma t/4}}{\Gamma}\, \mathrm{sen}\, \omega t \, \mathrm{senh}\, \frac{\Gamma t}{4} \\ \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\Gamma(t-t')/2} \mathrm{sen}\, \omega(t-2t')\, dt' = \frac{e^{-\Gamma t/4}}{4\omega^2+\Gamma^2/2} \Big[-\frac{\Gamma}{2} \mathrm{sen}\, \omega t \cosh \frac{\Gamma t}{4} + 2\omega \cos \omega t \, \mathrm{senh}\, \frac{\Gamma t}{4} \Big] \end{cases} \tag{19}$$

Observar que si $\Gamma \to 0$ entonces $\mathrm{senh}\, \Gamma t/4 \to 0$ y $\cosh \Gamma t/4 \to 1$. Todos los términos desaparecen, salvo aquel que tiene Γ en el denominador. Por lo tanto la solución particular es

$$x_p(t) \simeq a_0 \frac{2e^{-\Gamma t/4}}{\Gamma \omega}\, \mathrm{sen}\, \omega t \, \mathrm{senh}\, \frac{\Gamma t}{4} \to a_0 \frac{t}{2\omega}\, \mathrm{sen}\, \omega t \tag{20}$$

A medida que transcurre el tiempo, la posición oscila con amplitud creciente. El oscilador es inestable porque se le está entregando energía por medio del forzante $a(t)$ y ésta no se disipa debido a que $\Gamma = 0$.

Si sólo le hubiéramos dado un impulso en $t = t_0$ al osiclador $a(t) = a_0\, \delta(t - t_0)$ y los dejáramos evolucionar, obtendríamos

$$x_p(t) = (a_0/\omega) \int_0^t e^{-\Gamma(t-t')/2}\, \delta(t'-t_0)\, \mathrm{sen}\, \omega(t-t')\, dt' = (a_0/\omega)\, e^{-\Gamma(t-t_0)/2}\, \mathrm{sen}\, \omega(t-t_0) \tag{21}$$

y si $\Gamma \to 0$

$$x_p(t) \simeq \frac{a_0}{\omega}\, \mathrm{sen}\, \omega(t-t_0) \quad , \quad t > t_0 \tag{22}$$

el sistema permanece oscilando indefinidamente. En cambio, si $\Gamma > 0$, de la ec. (21) se deduce que si aplico impulsos con periodicidad $T = 2\pi/\omega$, entonces la posición o respuesta del oscilador será la suma de todas las respuestas a los impulsos

$$x_p(t) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n/\omega)\, e^{-\Gamma(t-2n\pi/\omega)/2} \,\operatorname{sen}(\omega t - 2n\pi) = \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\; e^{-\Gamma t/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(e^{\Gamma\pi/\omega}\right)^n \qquad (23)$$

para $n = 0, 1, 2 ...$. Bastará con elegir adecuadamente (decrecientemente) las intensidades de los impulsos a_n para que la serie converja. Por lo tanto, vemos que es posible mantener oscilando el sistema aún con impulsos periodicos.