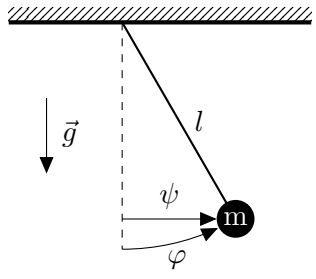
Péndulo en función de un desplazamiento horizontal



1. El potencial es el debido al campo gravitatorio terestre

$$V(\varphi) = mgh(\varphi) = mgl\,(1 - \cos\varphi)\,. \tag{1}$$

Con respeto a la variable φ nos valemos de un desarrollo de Taylor respecto de su posición de equilibrio

$$\cos(\varphi)|_{\varphi=0} \simeq \cos(0) - \operatorname{sen}(0)\varphi - \frac{1}{2}\cos(0)\varphi^2 = 1 - \frac{1}{2}\cos(0)\varphi^2, \tag{2}$$

por tanto el potencial puede aproximarse por

$$V(\varphi) \simeq mgl\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\cos(0)\varphi^2\right)\right) = -\frac{1}{2}mgl\varphi^2. \tag{3}$$

Como buscamos expresarlo en función del desplazamiento horizontal de la masa

$$\frac{\psi}{l} = \operatorname{sen}\varphi \simeq \varphi, \tag{4}$$

por lo que

$$V(\varphi) \simeq -\frac{1}{2}mgl\left(\frac{\psi}{l}\right)^2 = -\frac{1}{2}m\frac{g}{l}\psi^2. \tag{5}$$

La 2.ª ley de Newton para la masa queda entonces

$$\begin{aligned} m\ddot{\psi} &= -\frac{\partial V(\psi)}{\partial\psi} \simeq -m\frac{g}{l}\psi \\ \ddot{\psi} &\simeq -\omega_0^2\psi, \end{aligned} \tag{6}$$

asignando $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.