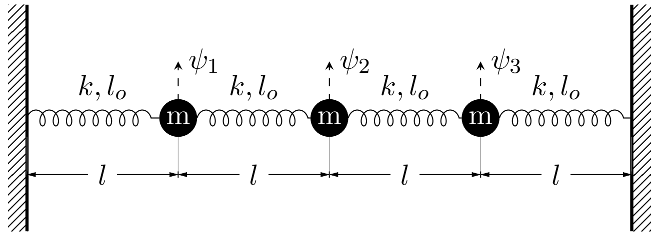
Se pide analizar las oscilaciones transversales de tres masas unidas por resortes a dos paredes. Los resortes son idénticos por lo que tienen igual constante elástica $k$ y longitud de reposo $l_o$. El sistema está estirado, por lo que la distancia $l > l_o$. Obvie la influencia del campo gravitatorio.




1. Halle las frecuencias de los modos normales.
2. Determine los desplazamientos relativos de las masas que se observan en cada modo.
3. Escriba la dinámica para las tres masas.
4. Si originalmente $l = 1,1 l_0$ determine cuando tendría que aumentar $l$ para que en el modo de menor frecuencia esta se duplique.

---

1. Se expresa la energía potencial del sistema en función de la longitud de los resortes

$$\begin{aligned} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3) &= \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + (\psi_1)^2} - l_o\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2} - l_o\right)^2 + \\ &= \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + (\psi_3 - \psi_2)^2} - l_o\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + (\psi_3)^2} - l_o\right)^2 . \end{aligned} \tag{1}$$

Esto permite desarrollar la 2.ª ley para cada masa,

$$\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow F_i = m_i a_i = m\ddot{\psi}_i = -\vec{\nabla} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3)\hat{y}_i = -\frac{\partial}{\partial \psi_i} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3).$$

Para $m_1$, $m_1\ddot{\psi}_1 = (-1)\left(\frac{\partial V_1}{\partial \psi_1} + \frac{\partial V_2}{\partial \psi_1}\right)$. Así en lo que respecta a $\psi_1$ para el potencial del primer resorte

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial \psi_1} &= k\left(\sqrt{l^2 + (\psi_1)^2} - l_o\right)\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{l^2 + (\psi_1)^2}}\cancel{2}\psi_1 = k\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{l^2 + (\psi_1)^2}}\right)\psi_1 \\ &= k\left(1 - \frac{l_o}{l\sqrt{1 + (\frac{\psi_1}{l})^2}}\right)\psi_1 \simeq k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)\psi_1, \end{aligned} \tag{2}$$

pues $\frac{\psi_1}{l} \ll 1$. Operando en forma similar sobre el potencial del segundo resorte

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial \psi_1} &= k\left(\sqrt{l^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2} - l_o\right)\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{l^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}}\cancel{2}\left(\psi_2 - \psi_1\right)(-1) = k\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{l^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2}}\right)(\psi_1 - \psi_2) \\ &= k\left(1 - \frac{l_o}{l\sqrt{1 + (\frac{\psi_2 - \psi_1}{l})^2}}\right)(\psi_1 - \psi_2) \simeq k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Finalmente esto permite obtener la 2.ª ley para $m_1$

$$m_1\ddot{\psi}_1 = (-1)k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)(\psi_1 + \psi_1 - \psi_2) = -k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)(2\psi_1 - \psi_2). \tag{4}$$

Similar resultado se obtiene para $m_3$ siguiendo la misma metodología

$$m_3\ddot{\psi}_3 = -k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)(2\psi_3 - \psi_2). \tag{5}$$

Para $m_2$ la solución es ligeramente diferente pues tiene influencia de ambos vecinos

$$m_2\ddot{\psi}_2 = -k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)(2\psi_2 - \psi_1 - \psi_3). \tag{6}$$

.

El sistema de ecuaciones se resume en

$$m\begin{pmatrix}\ddot{\psi}_1\\ \ddot{\psi}_2\\ \ddot{\psi}_3\end{pmatrix} = -k\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Proponiendo la solución $\psi = \psi_0 e^{i\omega t+\varphi}$ se llega a que $\ddot{\psi} = (-i\omega)^2\psi = -\omega^2\psi$ lo que permite escribir el sistema como

$$-\omega^2\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} = -\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Agrupando

$$\begin{pmatrix}-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & 0\\ \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\\ 0 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} = 0. \tag{9}$$

Para evitar la solución trivial $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ el determinante de la matriz debe ser nulo. Se obtiene así un polinomio característico,

$$\begin{aligned}\left[-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2\right]^3 - \left[2\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(1-\frac{l_o}{l}\right)^2\left[-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2\right]\right] &= 0\\ \left[-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2\right]\left[\left[-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2\right]^2 - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(1-\frac{l_o}{l}\right)^2\right] &= 0\end{aligned} \tag{10}$$

De este primer corchete se obtiene una frecuencia de oscilación de un modo normal $\omega_1 = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)}$. Resta desarrollar el corchete restante igualado a 0,

$$\begin{aligned}4\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(1-\frac{l_o}{l}\right)^2 - 4\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\omega^2 + \omega^4 - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(1-\frac{l_o}{l}\right)^2 &= 0\\ \omega^4 - 4\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\omega^2 + 2\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(1-\frac{l_o}{l}\right)^2 &= 0\end{aligned} \tag{11}$$

De donde se obtienen las dos frecuencias restantes

$$\begin{aligned}\omega_{2,3}^2 &= \frac{1}{2}\left[4\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) \pm \sqrt{4^2\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(1-\frac{l_o}{l}\right)^2 - 4\times 2\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(1-\frac{l_o}{l}\right)^2}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[4\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\right]\left[1\pm\sqrt{1-\frac{2}{4}}\right] = 2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)},\ \omega_3 = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\end{aligned} \tag{12}$$

---

2. Para hallar cada modo normal se reemplaza $\omega^2$ en el sistema de ecuaciones (9) con cada uno de los $\omega_i$ hallados. Para $\omega_1$

$$\begin{pmatrix}0 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & 0\\ \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & 0 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\\ 0 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} = \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} = 0. \tag{13}$$

Esto último indica que $\psi_2 = 0$ y que $\psi_1 + \psi_3 = 0$ por tanto el autovector correspondiente al autovalor $\omega_1$ que nos indica el desplazamiento relativo de las masas para este modo normal es

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}, \tag{14}$$

es decir que la masa central permanece en reposo al tiempo que las de los extremos se desplazan en sentidos opuestos.

Para $\omega_2$ se obtiene que

$$\begin{aligned}-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega_2^2 &= -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \left[\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\right]\left[-2+2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\right], \end{aligned} \tag{15}$$

así que el sistema el sistema de ecuaciones (9) queda para este caso

$$\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & 0\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=0. \tag{16}$$

De esto se desprende que $\sqrt{2}\psi_1+\psi_2=0$, y que $\psi_1+\sqrt{2}\psi_2+\psi_3=\psi_1+\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}\psi_1\right)+\psi_3=(1-2)\psi_1+\psi_3=0$ y por tanto el correspondiente modo normal responde a

$$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Finalmente para $\omega_3$ es sencillo ver que

$$-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega_3^2=-\sqrt{2}\left[\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\right], \tag{18}$$

y por tanto el sistema de ecuaciones (9) queda

$$\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 1 & 0\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=0. \tag{19}$$

Se arriba a que el modo normal correspondiente corresponde a

$$\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}. \tag{20}$$

---

3. Con las amplitudes relativas obtenidas para cada modo $\xi_1,\xi_2$ y $\xi_3$ la dinámica del sistema queda descripta por

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}(t) =& A_1\vec{\xi}_1\cos\left(\omega_1 t+\phi_1\right)+A_2\vec{\xi}_2\cos\left(\omega_2 t+\phi_2\right)+A_3\vec{\xi}_3\cos\left(\omega_3 t+\phi_3\right)\\ =& A_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)}t+\phi_1\right)+\\ & A_2\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}t+\phi_2\right)+\\ & A_3\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}t+\phi_3\right),\end{aligned} \tag{21}$$

siendo $A_i$ y $\phi_i$ las amplitudes y fases de cada modo que deben responder a las condiciones iniciales.

---

4. La frecuencia mas baja es $\omega_3 = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$. Si esta originalmente respondía a que $l = 1,1l_o$, es decir que las masas estabas separadas un 10 % más que la longitud de reposo de los resorte, por tanto

$$\omega_{3\,\mathrm{orig}} = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{1,1l_0}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{10}{11}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{11}}\sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}. \tag{22}$$

En tanto que doblar la frecuencia requiere un $l'$ tal que $\omega_{3\,\mathrm{doble}} = \omega_{3\,\mathrm{orig}}$, por tanto

$$\frac{\omega_{3\,\mathrm{doble}}}{\omega_{3\,\mathrm{orig}}} = 2 = \sqrt{11}\sqrt{\left(1-\frac{l_o}{l'}\right)}. \tag{23}$$

Se despeja de la última expresión que $\frac{4}{11} = 1 - \frac{l_o}{l'}$, por tanto $1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11} = \frac{l_o}{l'}$ y finalmente que $l' = \frac{11}{7}l_o$ para doblar la frecuencia mas baja que se tenía cuando $l = 1,1l_o$.