Física 2 — Lic. en Física — FCEyN, UBA
Polarización — Guía 4 — Ejercicios 5 y 6

Si imaginamos que el polarizador lineal deja pasar todo el componente en $\hat{x}$ bloquendo lo que va en $\hat{x}$ su matríz de Jones es $J_{\text{polarizador}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz para una rotación de α en sentido anti-horario: $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Para operar con el polarizador rotado en θ (positivo anti-horario) podemos utilizar esta última matríz pero previamente debemos rotar el sistema de ejes en que expremos un campo incidinte $\vec{\mathbf{E}}_{\text{inc}}$ para que coincida con el del polarizador al eje del mismo $J_{\text{polarizador}} R^{-1}(\alpha)$. Es fácil probar que $R^{-1}(\alpha) = R(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Pero luego hay que volver al sistema de ejes en que se expresó el $\vec{\mathbf{E}}_{\text{inc}}$, por tanto

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{sal}} = R(\alpha) J_{\text{polarizador}} R^{-1}(\alpha) \vec{\mathbf{E}}_{\text{inc}}, \tag{1}$$

entonces definimos la matríz de Jones para un polarizador rotado en α respecto eje $\hat{x}$ como

$$\begin{aligned} J_{\text{polarizador}}(\alpha) = R(\alpha) J_{\text{polarizador}} R^{-1}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ejercicio 5 Se hace incidir luz plano polarizada normalmente sobre un polarizador lineal. Al ir rotando la lámina, ¿cómo varían el estado de polarización y la intensidad del haz transmitido? Indique a partir de qué dirección mide el ángulo de giro.

Describimos el campo incidente está polarizado en un ángulo arbitrario θ, medido desde el eje $\hat{x}$, como

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{inc}} = A e^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}, \tag{3}$$

resulta en una intensidad

$$I_{\text{inc}} = \frac{c\varepsilon_0}{2n} A^2 \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \frac{c\varepsilon_0}{2n} A^2 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \frac{c\varepsilon_0}{2n} A^2. \tag{4}$$

Para obtener el campo a a la salida del polarizador orientado en un ángulo arbitrario α basta multiplicar la matríz obtenida en (2), al vector que describe el campo incidente

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_{\text{sal}} &= A e^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = A e^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} \cos^2\alpha\cos\theta + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta \\ \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \\ &= A e^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} \cos\alpha(\cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta) \\ \operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta) \end{pmatrix} = A e^{i(\omega t - kz)} (\cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta) \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

que utilizando una transformación trigonométrica queda

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{sal}} = A e^{i(\omega t - kz)} \cos(\alpha - \theta) \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}, \tag{6}$$

es decir una línealmente polarizada en el sentido de polarización (ángulo α) del polarizador y modulada por el factor $\cos(\alpha - \theta)$.

La intensidad resultante

$$\begin{aligned} I_{\text{sal}} &= \frac{c\varepsilon_0}{2n} A^2 \cos^2(\alpha - \theta) \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \frac{c\varepsilon_0}{2n} A^2 \cos^2(\alpha - \theta)(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) \\ &= \frac{c\varepsilon_0}{2n} A^2 \cos^2(\alpha - \theta) = I_{\text{inc}} \cos^2(\alpha - \theta), \end{aligned} \tag{7}$$

es $\cos^2(\alpha - \theta)$ de la que tenía la incidente linealmente polarizada en el ángulo θ. Esta modulación con el $\cos^2$ del ángulo entre el del polarizador y de la luz linealmente polarizada que inicide normalmente sobre este se denomina *ley de Malus*.

Ejercicio 6 Sobre un polarizador incide una onda circularmente polarizada en sentido horario. ¿Cuál es el estado de polarización de la onda transmitida? ¿Qué fracción de la intensidad incidente se transmitió a través de la lámina? Justifique.

El campo incicidente

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{inc}} = A\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \tag{8}$$

resulta en una intensidad

$$I_{\text{inc}} = \frac{c\varepsilon_0}{2n} \frac{A^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{c\varepsilon_0}{2n} A^2. \tag{9}$$

Para obtener el campo a a la salida del polarizador orientado en un ángulo arbitrario α basta multiplicar la matríz obtenida en (2), al vector que describe el campo incidente

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_{\text{sal}} &= \frac{A}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{A}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - i\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha - i \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{A}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} \cos\alpha(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha) \\ \operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha) \end{pmatrix} = \frac{A}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} (\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha) \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{10}$$

que esencialmente es una linealmente polarizada en el ángulo α que está orientado el polarizador y modulada por $(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)$. Finalmente su intensidad

$$\begin{aligned} I_{\text{sal}} &= \frac{c\varepsilon_0}{2n} \frac{A^2}{2} (\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{c\varepsilon_0}{2n} \frac{A^2}{2} (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = \frac{c\varepsilon_0}{2n} \frac{A^2}{2} = \frac{I_{\text{inc}}}{2}, \end{aligned} \tag{11}$$

es la mitad de la que tenía la circulamente polarizada inicial.

Este último resultado no es sorprendente si recordamos que una circularmente polarizada podemos entenderla como la superposición de dos linealmente polarizadas, perpendiculares entre sí, con un desfasaje de $\frac{\pi}{2}$ de la misma amplitud. El ángulo del polarizador que interponemos podríamos hacerlo concidir con la dirección de polarización de uno de estos y por tanto se hace evidente que estamos “eliminando” una de esta lineales que contribuian por igual a la intensidad de la circularmente polarizada.