Física 2 (Físicos) - Cátedra Prof. Tamborenea

Segundo Cuatrimestre de 2017

Guía 1: Oscilaciones Libres y Forzadas en Sistemas Discretos

Oscilador armónico de un único grado de libertad

1. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento asociadas con los siguientes sistemas:

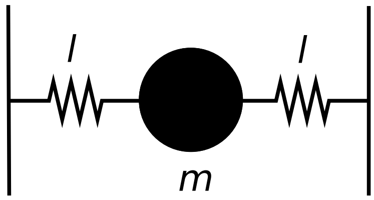
   a) Péndulo de longitud l en presencia de un campo gravitatorio de constante g. Discuta todas las aproximaciones que realiza.

   b) Oscilaciones longitudinales de una masa m sujeta a dos paredes mediante dos resortes iguales de constante k; para los dos casos:

      1) longitud natural del resorte l_0 $(l_0 < l)$, y

      2) slinky $(l_0 = 0)$.

   c) Oscilaciones transversales del sistema del punto anterior, discutiendo las diferencias entre los casos i) y ii), y analizando cuidadosamente las aproximaciones que realiza. En el caso i) analice la diferencia entre considerar que los resortes están tensionados en la posición de equilibrio $(l_0 < l)$ o que están relajados en dicha posición $(l_0 = l)$.



Oscilador armónico amortiguado

2. Considere el movimiento de una masa m sujeta a un resorte de constante elástica $K = m\omega_0^2$ y constante de amortiguamiento por unidad de masa Γ.
Demuestre que el resultado para el oscilador "sobreamortiguado" dado por

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cosh\left(|\omega|t\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\sinh\left(|\omega|t\right)}{|\omega|}\right\}$$

se deduce de las siguientes

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cos\left(\omega t\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\sin\left(\omega t\right)}{\omega}\right\}$$

$$\omega = \pm i\,|\omega|\,,\ |\omega| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}$$

Sugerencia: verifique primero las identidades $\cos(ix) = \cosh(x)$ y $\sin(ix) = i\sinh(x)$; luego úselas.

3. Comenzando con la ecuación general dada en el problema anterior para oscilaciones libres subamortiguadas, muestre que para amortiguamiento crítico la solución es:

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2}\left\{x(0) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]t\right\}$$

Muestre que también se obtiene este resultado comenzando con la ecuación para oscilaciones sobreamortiguadas.

Oscilador armónico forzado

4. *a*) Escriba la ecuación de movimiento para una masa m sujeta a un resorte de constante elástica k y constante de amortiguamiento por unidad de masa Γ, sobre la que se realiza una fuerza dependiente del tiempo $F(t)$.

   b) Proponga la siguiente solución homogénea: $x_h(t) = Ce^{-t/2\tau}\cos(\omega_1 t + \theta)$ y halle los valores de τ y de ω_1. ¿De qué depende el valor de C y de θ? ¿Es lícito plantear las condiciones iniciales sobre la solución homogénea?

   c) Considere que $F(t)$ tiene la forma $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ (discuta si se pierde generalidad al suponer que la fuerza externa tiene esa forma) y proponga la siguiente solución particular: $x_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Obtenga A y B. Grafique cualitativamente A y B en función de ω.

   d) Grafique cualitativamente la posición de la masa en función del tiempo.

   e) Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.

   f) Verifique que si $x_1(t)$ es solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa es $F_1(t)$ y $x_2(t)$ lo es cuando la fuerza externa es $F_2(t)$, entonces $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ será solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa sea $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ si y sólo si las condiciones iniciales son la suma de las condiciones iniciales de los dos casos.

   g) Proponga ahora como solución particular la solución compleja $x_p(t) = Ae^{-i\omega t}$ y demuestre que $\mathfrak{Re}(A) = A_{elástico}$ y que $\mathfrak{Im}(A) = A_{absorbente}$. ¿Por qué es así?

5. Sea un oscilador armónico con una frecuencia de oscilación $\nu_0 = 10$ Hz y con un tiempo de decaimiento muy largo. Si este oscilador es alimentado con una fuerza armónicamente oscilante y con una frecuencia de 10 Hz, adquirirá una gran amplitud, es decir, "resonará" en la frecuencia de excitación. Ninguna otra fuerza motriz oscilante en forma armónica producirá una gran amplitud (una resonancia).

   a) Justifique el enunciado anterior.

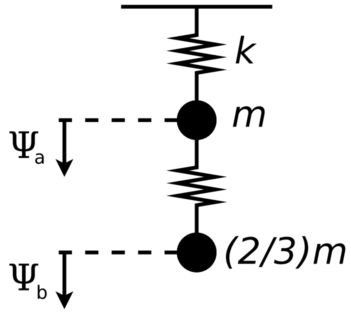
   b) Luego suponga que el oscilador está sujeto a una fuerza que es una pulsación cuadrada repetida periódicamente y cuya duración es 0,01 s repetida una vez por segundo. Describa cualitativamente el análisis de Fourier de la pulsación cuadrada repetitiva.

   c) ¿"Resonará" el oscilador armónico (adquirirá una gran amplitud) bajo la influencia de esta fuerza motriz?

   d) Suponga que la fuerza motriz es la misma pulsación cuadrada (de ancho 0,01 s) pero repetida dos veces por segundo. ¿Resonará el oscilador? Responder a la misma pregunta para velocidades de repetición de 3 a 9 segundos.

Sistemas de N grados de libertad

6. *a*) Considere el sistema de la figura en ausencia de gravedad y obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.

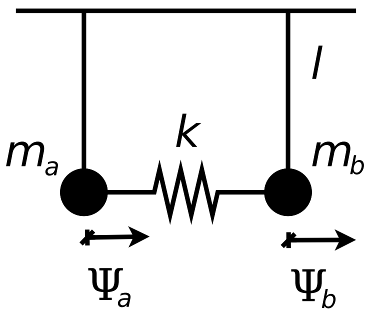


b) Sabiendo que a $t = 0$ el sistema satisface las siguientes condiciones: $\Psi_a(0) = 1$, $\Psi_b(0) = 0$ y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula.

c) Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.

Pulsaciones entre modos normales

7. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b, acoplados mediante un resorte de constante k.



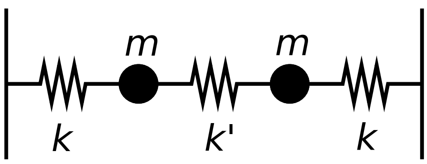
a) Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.

b) Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.

c) Suponiendo que el acoplamiento es débil, es decir: $k \ll \frac{g}{l}\frac{m_a m_b}{m_a+m_b}$, y que las condiciones iniciales son $\dot{\Psi}_a(0) = 0, \dot{\Psi}_b(0) = 0, \Psi_a(0) = 0, \Psi_b(0) = 1$; obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo.

d) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de T_a y T_b, donde T indica energía cinética. Grafique $\langle T_a \rangle$ y $\langle T_b \rangle$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ($m_a = m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.

8. Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante k y unidas por otro resorte de constante k'.

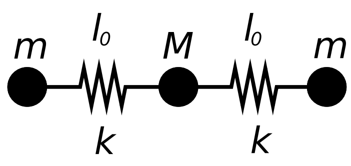


a) Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema.

b) ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son los batidos?

Excitación selectiva de modos – Condiciones iniciales

9. Considere el sistema simplificado de la figura que se basa en una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa m están situados a ambos lados del átomo de masa $M = 2m$ y vinculados por resortes de constante k y longitud natural l_0. Como sólo estamos interesados en analizar los modos longitudinales, supondremos que las masas se encuentran dentro de una canaleta que impide todo tipo de movimiento en la dirección transversal.



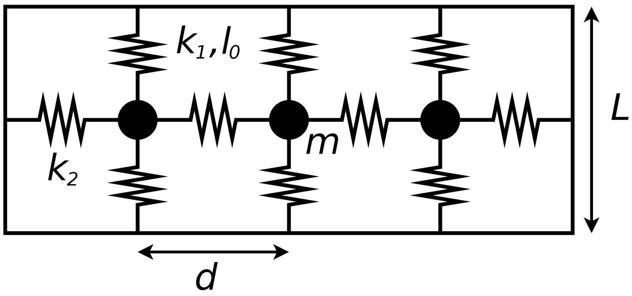
a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa.

b) Halle las frecuencias de los modos normales.

c) Dibuje las configuraciones de cada modo.

d) Establezca cuáles deben ser las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).

10. Considere el sistema de la figura, en la que los resortes verticales tienen longitud natural l_0 y constante k_1, y los horizontales $a_0 = 0$ (slinkies) y k_2.



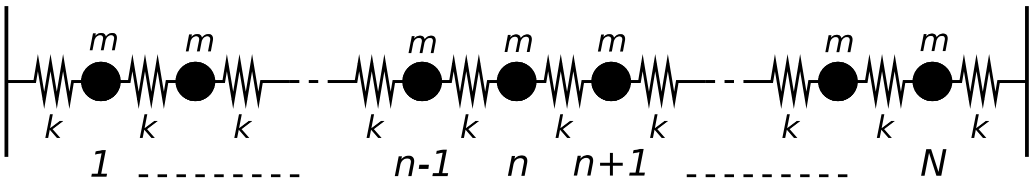
a) Calcule las frecuencias propias y los modos normales.

b) Considere que las condiciones iniciales son tales que el sistema oscila horizontalmente, estando su movimiento descripto por una superposición de los dos primeros modos. Halle la energía cinética de cada masa y la energía potencial del sistema, el promedio temporal de las mismas y la frecuencia de pulsación ω_p.

Datos: l_0, k_1, $a_0 = 0$, k_2, L, d, m.

Modos normales en sistemas periódicos

11. Considere el sistema de N masas mostrado en la figura.



a) Usando la aproximación de pequeños ángulos, escriba la ecuación de movimiento transversal para la partícula enésima.

b) Proponga una solución de la forma:

$$\Psi_n^{(p)}(t) = A^{(p)} \cos\left(nk^{(p)}a + \alpha^{(p)}\right) \cos\left(\omega^{(p)}t + \phi^{(p)}\right)$$

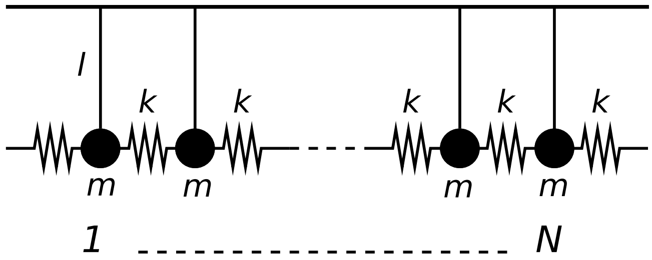
Halle la relación de dispersión y grafíquela. ¿Depende esta relación de las condiciones de contorno? ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

c) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando ambos extremos están libres (atención: ¿cómo sería un “extremo libre” en esta configuración?) y escriba la solución general para la masa enésima.

d) Idem anterior, pero considerando que el extremo izquierdo está libre y el derecho fijo a la pared.

e) Particularice los resultados de los dos ítems anteriores para el caso en que $N = 3$.

12. Considere el sistema de péndulos acoplados de la figura.



a) Escriba la ecuación de movimiento. Proponga una solución semejante a la del problema anterior y halle la relación de dispersión. Compárela con la obtenida en el problema anterior. ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

b) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando los resortes de los extremos están fijos y dé las condiciones iniciales para excitar el primer armónico.

c) Idem anterior, pero para el caso en que uno de los resortes de los extremos está libre.

Oscilaciones forzadas de sistemas con N grados de libertad

13. Considere el sistema de dos péndulos acoplados, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza $F = F_0 \cos(\Omega t)$. Desprecie el amortiguamiento. Muestre que:

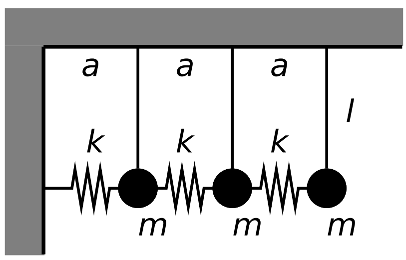
$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2M} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right];$$

$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2M} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right];$$

$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\Omega^2};$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

14. Considere el sistema de 3 péndulos acoplados que se muestra en la figura.

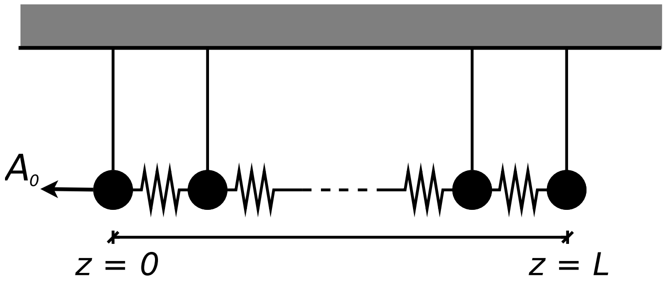


a) Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre las frecuencias propias y los modos normales del sistema.

b) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre la solución estacionaria para cada modo. ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?

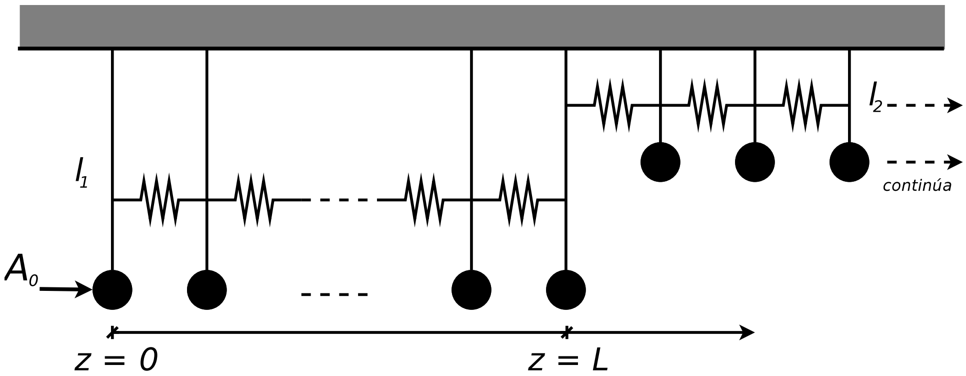
Oscilaciones forzadas de sistemas periódicos

15. Considere un arreglo lineal de péndulos acoplados excitados cuyo extremo inferior está en $z = 0$ y unidos a una pared rígida en $z = L$, como se muestra en la figura.



Se aplica una fuerza externa en función del tiempo a la primera masa ($z = 0$), de forma tal que se conoce su amplitud $\Psi(0,t) = A_0 \cos(\Omega t)$. Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las hipótesis que hace. Compare con el caso de extremo derecho fijo a una pared (o sea: agregando un resorte a la derecha de la última masa y uniéndolo a la pared).

16. Considere un sistema de péndulos acoplados con un cambio brusco en ω_0^2 en $z = L$, según se esquematiza en la figura. Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las hipótesis que hace.



17. Para el sistema esquematizado en la figura, calcule $\Psi_n(t)$, si $\Omega < \omega_{min}$.