Deducción de las leyes de reflexión y refracción

Imagen de un objeto puntual: ***refracción en una superficie esférica***

Deducción de las leyes de reflexión y refracción

Mucho antes de que Maxwell desarrollara su teoría de las ondas electromagnéticas, la propagación de la luz y otras ondas fue descrita empíricamente por dos principios interesantes y muy distintos atribuidos al físico holandés Christian Huygens (1629-1695) y al matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665)

Principio de Huygens
Cada punto de un frente de onda primario sirve como foco (o fuente) de ondas esféricas secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a las de la onda primaria. El frente de onda primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de estas ondas elementales.

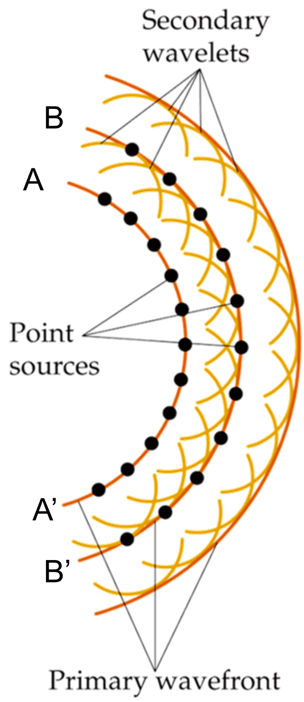
Principio de Fermat
La trayectoria seguida por la luz para pasar de un punto a otro es aquella para la cual el tiempo de recorrido es un mínimo. O lo que es mismo, la luz tiende a recorrer el camino óptico por el que tarda el mínimo tiempo.

Deducción de las leyes de reflexión y refracción

Las leyes de reflexión y refracción pueden deducirse mediante el principio de Huygens o mediante el principio de Fermat.

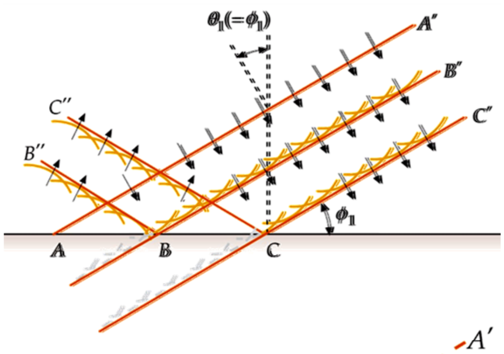
Principio de Huygens

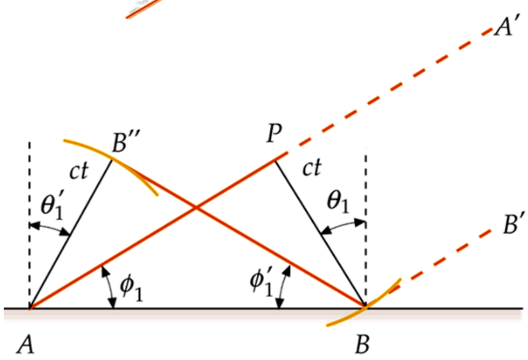
Cada punto de un frente de onda primario sirve como foco (o fuente) de ondas esféricas secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a las de la onda primaria. El frente de onda primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de estas ondas elementales.



Para deducir la **ley de reflexión** a partir del principio de Huygens, consideremos una onda plana que se acerca a una *superficie reflectante plana.*

onda plana reflejada en un espejo plano





- el frente de onda *A´* incide inicialmente en el espejo en el punto *A*
- el efecto de la superficie reflectante consiste en ***cambiar la dirección*** de propagación de las ondas secundarias que inciden en ella
- después de un tiempo *t*, la onda secundaria de Huygens procedente del punto *P* incide en el espejo en el punto *B* y la de *A* alcanza el punto *B"*
- los triángulos *APB* y *BB"A* son congruentes

AB

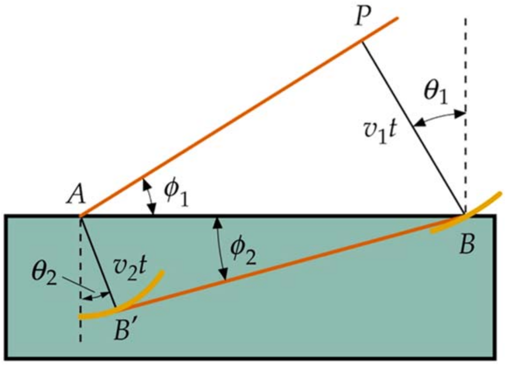
AB" = BP = ct

$$\boxed{\theta_1' = \theta_1}$$

ley de reflexión

La **ley de refracción** se deduce con un procedimiento similar.

onda plana que incide sobre una superficie plana aire-vidrio



$$\operatorname{sen}\phi_1 = \frac{v_1 t}{AB}$$

$$AB = \frac{v_1 t}{\operatorname{sen}\phi_1} = \frac{v_1 t}{\operatorname{sen}\theta_1}$$

$$\operatorname{sen}\phi_2 = \frac{v_2 t}{AB}$$

$$AB = \frac{v_2 t}{\operatorname{sen}\phi_2} = \frac{v_2 t}{\operatorname{sen}\theta_2}$$

$$\frac{1}{v_1}\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{v_2}\operatorname{sen}\theta_2$$

n_1 for c/v_1 $\qquad$ n_2 for c/v_2.

$$\boxed{n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2}$$ **ley de Snell**

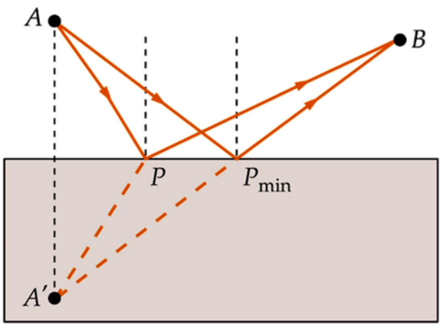
La propagación de la luz se puede también describir por el principio de Fermat.

Principio de Fermat
La trayectoria seguida por la luz para pasar de un punto a otro es aquella para la cual el tiempo de recorrido es un mínimo. O lo que es mismo, la luz tiende a recorrer el camino óptico por el que tarda el mínimo tiempo.

El ***camino óptico***, definido como ***el espacio en el que la luz emplea menos tiempo en su recorrido***, no siempre coincide con el de menor distancia.

Construcción geométrica para la deducción de la ley de la reflexión a partir del principio de Fermat

¿En qué punto *P* de la figura debe incidir la luz sobre el espejo de forma que el recorrido entre los puntos *A* y *B* se realice en el menor tiempo posible?



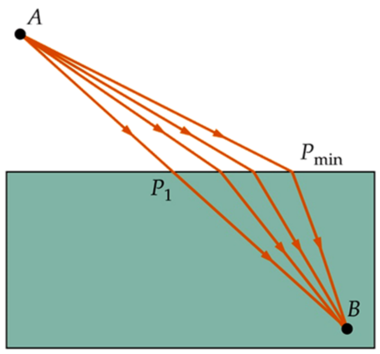
- la luz se mueve dentro del mismo medio
- el tiempo será mínimo cuando la distancia sea mínima

$L_{A'PB} = L_{APB}$

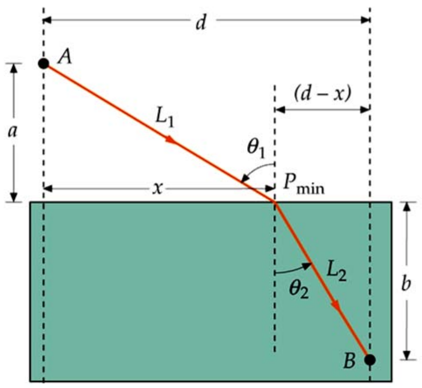
$L_{A'PB} = mínima \Rightarrow$

$\boxed{\theta_1' = \theta_1}$ **ley de reflexión**

Construcción geométrica para la obtención de la ley de la refracción a partir del principio de Fermat



- trayectos posibles para que la luz se propague desde le punto A en el aire hasta el punto B en el vidrio
  - $AP_1B \neq$ menor tiempo de recorrido
  - $AP_{min}B$ = mínimo tiempo



L_1, n_1, L_2, n_2

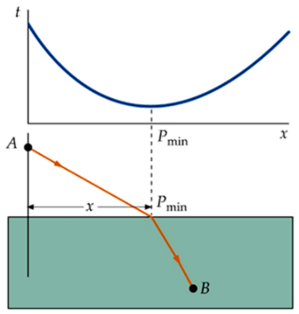
$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} = \frac{L_1}{c/n_1} + \frac{L_2}{c/n_2} = \frac{n_1 L_1}{c} + \frac{n_2 L_2}{c}$$

En función de la distancia *x*:

$$L_1^2 = a^2 + x^2 \qquad \text{y} \qquad L_2^2 = b^2 + (d - x)^2$$

Puede verse la curva del tiempo en función de *x*. Para el valor de *x* en que el tiempo es mínimo, la pendiente de esta curva es cero:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$



Derivando respecto a x e igualando el resultado a cero:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\left(n_1 \frac{dL_1}{dx} + n_2 \frac{dL_2}{dx}\right) = 0$$

Calculando tenemos:

$$2L_1 \frac{dL_1}{dx} = 2x \qquad \text{o} \qquad \frac{dL_1}{dx} = \frac{x}{L_1}$$

Pero x/L_1 es precisamente el $sen\theta_1$ el ángulo de incidencia. Por lo tanto,

$$\frac{dL_1}{dx} = \textbf{sen}\theta_1$$

Análogamente, $$2L_2\frac{dL_2}{dx} = 2(d - x)(-1)$$

o bien $$\frac{dL_2}{dx} = -\frac{d - x}{L_2} = -\textbf{sen}\theta_2$$ donde θ_2 es el ángulo de refracción

De aquí que la ecuación $$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\left(n_1\frac{dL_1}{dx} + n_2\frac{dL_2}{dx}\right) = 0$$ se pueda escribir:

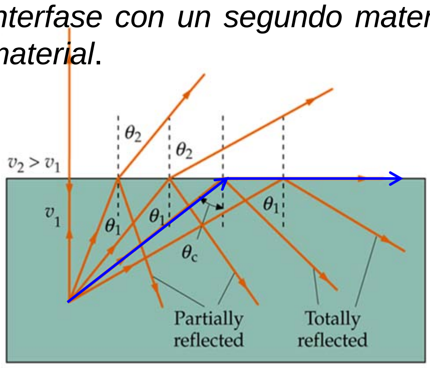
Sustituyendo obtenemos, $$n_1\, \textbf{sen}\theta_1 + n_2(-\textbf{sen}\theta_2) = 0$$

$$\boxed{n_1\, \textbf{sen}\theta_1 = n_2\, \textbf{sen}\theta_2}$$ **ley de refracción o ley de Snell**

El tiempo es un mínimo en el punto en que los ángulos de incidencia y de refracción obedecen la ley de Snell.

Reflexión total interna

En ciertas circunstancias, ***toda*** la luz se puede reflejar en la interfase, sin que se transmita nada de ella, aún si el segundo material es transparente. Esta situación, llamada **reflexión total interna**, sólo ocurre cuando *un rayo incide sobre la interfase con un segundo material cuyo índice de refracción es* ***menor*** *que el del material*.



$$\boxed{n_1 \ \mathrm{sen}\theta_1 = n_2 \ \mathrm{sen}\theta_2}$$

$n_1 / n_2 > 1$

$\theta_2 = 90°$

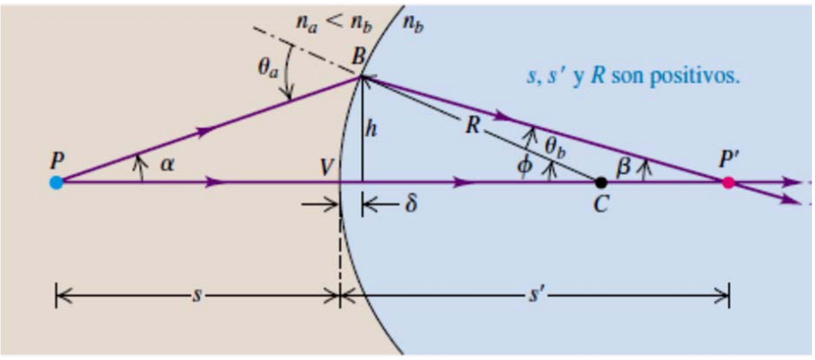
$\mathrm{sen}\ \theta_2 = 1$

$$\boxed{\mathrm{sen}\ \theta_{crit} = (n_2 / n_1)}$$

ángulo crítico para la reflexión total interna

$\theta_i > \theta_c \Rightarrow$ **TIR**

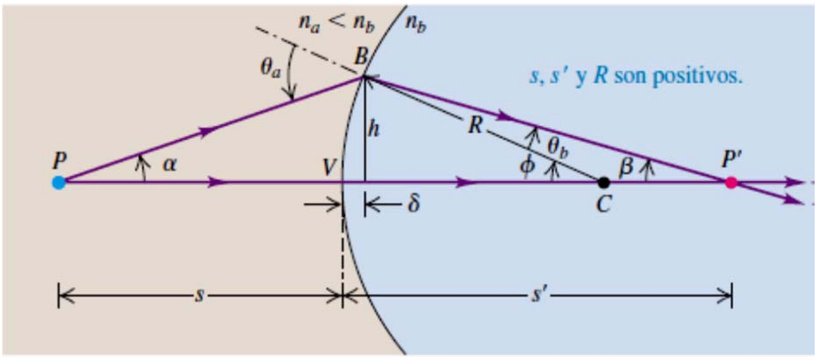
Imagen de un objeto puntual: *refracción en una superficie esférica*



Convención de signos

***s*:** posición del objeto (positiva en el espacio objeto, negativa en el espacio imagen)
s': posición de la imagen (positiva en el espacio imagen, negativa en el espacio objeto)
y,y': alturas del objeto y de la imagen (positivas hacia arriba)
R: radio de curvatura (positivo si en centro de curvatura C está en el espacio imagen)
f, f': distancias focales objeto e imagen (la misma convención de signos que s y s')
n, n': índices de refracción del espacio objeto e imagen, respectivamente
ϕ: potencia de la dioptra (positiva implica dioptra convergente; negativa para dioptra divergente)
m, aumento lateral

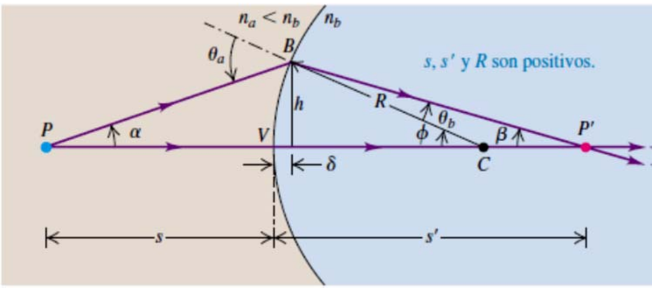
Tenemos una superficie esférica de radio ***R*** que forma una interfaz entre dos materiales con índices de refracción diferentes n_a y n_b. La superficie forma una imagen ***P'*** de un punto de objeto ***P***; *nos proponemos averiguar cuál es la relación entre las distancias de objeto y de imagen* (***s*** y ***s***').



- *na* < *nb*
- *R* es positivo
- rayo *PV* incide en el vértice *V* y es perpendicular a la superficie
- rayo *PB*, que forma un ángulo α con el eje, incide a un ángulo θ_a con respecto a la normal, y se refracta a un ángulo
- estos rayos se intersecan en *P*', a una distancia *s*' a la derecha del vértice
- probaremos que si el ángulo α es pequeño, *todos* los rayos provenientes de *P* se intersecan en el mismo punto *P*', por lo que *P*' es la *imagen real* de *P*.

Aplicamos el teorema según el cual el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos; la aplicación de esto a los triángulos *PBC* y *P'BC* da lo siguiente:

$$\theta_a = \alpha + \phi \qquad \phi = \beta + \theta_b$$



Según la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen} \theta_a = n_b \operatorname{sen} \theta_b$$

Las tangentes de α, β y ϕ son

$$\tan\alpha = \frac{h}{s+\delta} \qquad \tan\beta = \frac{h}{s'-\delta} \qquad \tan\phi = \frac{h}{R-\delta}$$

Como aproximación del seno y de la tangente de ϕ,

$$n_a\theta_a = n_b\theta_b$$

Combinando esto con la primera de las ecuaciones

$$\theta_b = \frac{n_a}{n_b}(\alpha + \phi)$$

La sustitución de esto da,

$$n_a\alpha + n_b\beta = (n_b - n_a)\phi$$

Despreciando la pequeña distancia δ;

$$\alpha = \frac{h}{s} \qquad \beta = \frac{h}{s'} \qquad \phi = \frac{h}{R}$$

Por último,

$$\boxed{\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R}}$$