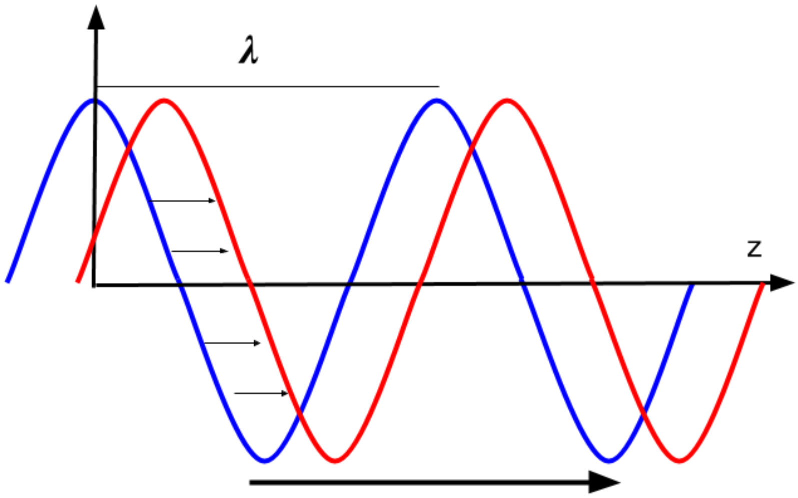
<u>**Resumen de clase práctica - Guía interferencia.**</u>

Descripción de una onda armónica que se propaga.



Queremos escribir la onda en todo el espacio, asi como en el tiempo. En el diagrama tenemos una onda que se esta propagando en z, con longitud de onda λ.

Para no confundirnos entre z y t, podemos imaginarnos que la linea azul sería como tomarle una foto en t=0, y en rojo sera una foto dejando pasar t.

Periodicidad espacial:
Si en el espacio la onda se "repite" moviéndome en una longitud de onda λ, entonces necesito que el término espacial sea:

$$k.z = \frac{2\pi}{\lambda}.z$$

Entonces defino el **"numero de onda"** como **k**

Una forma más general de ver a esta constante es como "vector de onda", donde además de tener la misma expresión, tiene una dirección, y apunta en el sentido de propagación de la onda.
$\overline{k} = k.\hat{z} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{z}$ *(si se propaga en z versor)*

Periodicidad temporal
Si en el tiempo la onda se "repite" cuando transcurre un tiempo $\tau(período)$, entonces necesito que el término temporal sea:

$$wt = \frac{2\pi}{\tau}.t$$

Entonces defino **w** como la frecuencia angular tal que $w = \frac{2\pi}{\tau}$ (donde τ es el período de la onda)

Expresión final

Onda armónica transversal

$$\overline{E}(z,t) = E_0.cos(kz - wt + \varphi)\,\widehat{x}$$

Onda armónica longitudinal

$$\overline{E}(z,t) = E_0.cos(kz - wt + \varphi)\,\widehat{z}$$

$\overline{E}$: *onda*
E_0 : *Amplitud*
k : *número de onda* $(\frac{2\pi}{\lambda})$
w : *frecuencia angular* $(\frac{2\pi}{\tau})$
φ : *fase inicial*

La diferencia entre transversal y longitudinal se puede ver en:
https://www.youtube.com/watch?v=7cDAYFTXq3E
Comentario
Termino kz-wt (onda avanza hacia z positivo)
Termino kz+wt (onda avanza hacia z negativo)

Dato adicional:

v : *velocidad de propagación* $v = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{w}{k}$
(velocidad a la que se avanza la onda en el espacio)

Superposición:

Si tengo dos ondas que llegan a un punto, y quiero ver cuál es la onda total, ésta misma es la suma de las dos.

$$\overline{E_{Total}} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$$

Si una onda respecto a la otra posee una diferencia de fase φ constante (no depende de z ni de t), las ondas se les dice que son **coherentes.**

Intensidad:

Pregunta: Si la luz puede modelarse como una onda, ¿Qué es lo que vemos? ¿La perturbación? ¿La amplitud?

$$Intensidad\ \alpha\ < \left|\overline{E_{Total}}\right|^2 > \ = \frac{1}{N\tau} \int_0^{N\tau} \left|\overline{E_{Total}}\right|^2 dt$$

(la “igualdad” α implica que es igual a menos de una constante que multiplica)

La respuesta es que cuando se habla, por ejemplo, de la luz, y queremos saber qué magnitud de la luz estamos detectando con nuestros ojos, aquí es donde se utiliza la **Intensidad.**

Podemos ver que estamos integrando la onda total elevada al cuadrado, en N períodos, y dividiéndolo por N períodos. Esto se lo llama **promedio temporal,** y lo que estamos haciendo es integrar la onda en un tiempo, y dividiéndolo por la longitud de ese mismo tiempo. Si pensamos la integral como una suma de pequeños cuadrados, queda más claro la analogia con el promedio.

Comentario: Podemos ver que si la onda es perfectamente armónica, no importa si lo integro en 5, 10, 5000 períodos, la respuesta sería siempre lo mismo. Se puede ver en el ejercicio 2 más adelante qué sucede si la onda no es perfectamente armónica en la “ventana” donde calculamos la intensidad.

La guía provee las siguientes ayudas:

$$\int_0^{2\pi} cos(x)dx = \int_0^{2\pi} sin(x)dx = \int_0^{2\pi} cos(x+\varphi) = \int_0^{2\pi} cos(x).sin(x)dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} cos^2(x)dx = \int_0^{2\pi} sin^2(x)dx = \pi$$

EJEMPLO:
Entonces calculemos la intensidad de solamente una onda $\overline{E}$, en z=0, en un solo período (N=1)

$$\overline{E}(z=0) = E_0.cos(k.0 - wt)\,\widehat{x} = E_0.cos(-wt)\,\widehat{x} = E_0.cos(wt)\,\widehat{x}$$

$$I = \frac{1}{N\tau}\int_0^{N\tau} \left|\overline{E}\right|^2 dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} {E_0}^2.cos^2(wt)dt =$$

$$(sust:\ x = wt,\ dt = \frac{dx}{w})$$

$$= \frac{{E_0}^2}{\tau.w}\int_0^{2\pi} cos^2(x)dx = \frac{{E_0}^2\pi}{\tau.w} = \frac{{E_0}^2\pi.\tau}{\tau.2\pi} = \frac{{E_0}^2}{2}$$

EJEMPLO:
Miremos dos ondas, pero $\varphi = 0$, $E_{01} = E_{02}$

$$\overline{E}_1(z=0) = E_0.cos(k.0 - wt)\,\widehat{x} = E_0.cos(wt)\,\widehat{x}$$
$$\overline{E}_2(z=0) = E_0.cos(k.0 - wt)\,\widehat{x} = E_0.cos(wt)\,\widehat{x}$$

$$\overline{E_{total}} = 2\,\overline{E}_1$$

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left|2\overline{E}_1\right|^2 dt = 4.\frac{{E_0}^2}{2} = 4\,I_1$$

A esto se le llama **interferencia constructiva**. Vemos que ambas ondas de la misma frecuencia, sin importar el tiempo, dan el doble de amplitud sumadas. Entonces la intensidad percibida se cuatrplica! (respecto a la intensidad que tendría solo la primera)

EJEMPLO: (ejercicio 1->a y b->ii)
Si me piden por ejemplo calcular la intensidad de la onda total formada por E1 y E2 en z=0, $\varphi = \pi/2$, $E_{01} = E_{02} = E_0$

$$\overline{E}_1(z=0) = E_0.cos(k.0 - wt)\,\widehat{x} = E_0.cos(wt)\,\widehat{x}$$
$$\overline{E}_2(z=0) = E_0.cos(k.0 - wt + \pi/2)\,\widehat{x} = E_0.sin(wt)\,\widehat{x}$$

$$\overline{E_{total}} = E_0.cos(wt)\,\widehat{x} + E_0.sin(wt)\,\widehat{x}$$

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left|\overline{E_1} + \overline{E_2}\right|^2 dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left|E_0.cos(wt)\widehat{x} + E_0.sin(wt)\,\widehat{x}\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} (E_0{}^2.cos^2(wt) + E_0{}^2.sin^2(wt) + 2E_0{}^2 cos(wt)sin(wt))dt = (sust:\ x = wt,\ dt = \tfrac{dx}{w}) =$$

$$= \frac{E_0{}^2}{\tau.w}\left(\int_0^{2\pi} cos^2(x)dx + \int_0^{2\pi} sin^2(x)dx + 2\int_0^{2\pi} cos(x).sin(x)dx\right) =$$
$$= \frac{E_0{}^2(\pi + \pi + 0)}{\tau.w} = \frac{E_0{}^2 2\pi.\tau}{\tau.2\pi} = E_0^2 = I_1 + I_2$$

EJEMPLO: (ejercicio 1->a y b->iii)
Mismo caso, pero esta vez $\varphi = \pi$, $E_{01} = E_{02}$

$$\overline{E}_1(z=0) = E_0.cos(k.0 - wt)\,\widehat{x} = E_0.cos(wt)\,\widehat{x}$$
$$\overline{E}_2(z=0) = E_0.cos(k.0 - wt + \pi)\,\widehat{x} = -E_0.cos(wt)\,\widehat{x}$$

$$\overline{E_{total}} = 0$$

$$I = 0$$

A esto se le llama **interferencia destructiva**. Vemos que ambas ondas de la misma frecuencia, sin importar el tiempo, dan cero, y la intensidad percibida, es cero.

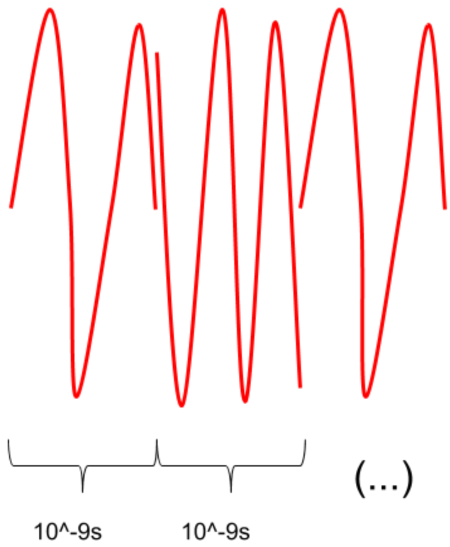
EJEMPLO : ejercicio 2 (ES DEMOSTRATIVO)

Supongamos que tenemos dos haces de luz natural, y quiero ver cómo es la intensidad total en z=0.
El problema es que la luz natural está cuantizada(se emite en paquetes o “cuantos”), y cada $10^{-9}s$ cambia la fase inicial (para simplificar las cuentas, diré que esa fase inicial sólo aparece en la segunda onda, y que ese intervalo es fijo $10^{-9}s$)

¿Cuál será su intensidad total final, en una ventana de 1 segundo?.

Bien, este problema es engañoso, y para resolverlo voy a tomar esa ventana de 1 segundo, y voy a partirlo en intervalos de $10^{-9}s$. La idea allí es que yo sé que durante ese intervalo la fase φ se mantendrá constante, y en el siguiente, tomará otro valor completamente aleatorio.

Representación del tren de ondas con fases iniciales aleatorias. (no está a escala)



Como sé que la intensidad es un promedio, la intensidad final será el promedio de la suma total de intensidades, es decir:

$$I = \frac{I_{primero} + I_{segundo} + I_{tercero} + ... + I_{10^9-ésimo}}{10^9}$$

Planteo dos ondas (dos haces de luz) con uno de ellos con una fase inicial

$$\overline{E}_1(z=0) = E_1.cos(k.0 - wt)\,\widehat{x} = E_1.cos(wt)\,\widehat{x}$$
$$\overline{E}_2(z=0) = E_2.cos(k.0 - wt + \varphi)\,\widehat{x} = E_2.cos(wt - \varphi_i)\,\widehat{x}$$

Entonces ahora sólo resta calcular cualquiera de esas intensidades
(puedo integrar en todos los períodos que haya dentro de esa ventana de $10^{-9}s$, o en uno de ellos)

$$I_{primero} \; \alpha \; \frac{1}{N\tau}\int_0^{N\tau}\left|\overline{E_{total}}\right|^2 dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left|\overline{E_1} + \overline{E_2}\right|^2 dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left|E_1.cos(wt)\widehat{x} + E_2.cos(wt-\varphi)\,\widehat{x}\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}(E_1{}^2.cos^2(wt) + E_2{}^2.cos^2(wt-\varphi) + 2E_1\,E_2 cos(wt)cos(wt-\varphi))dt =$$

Aquí me detengo porque los primeros dos términos ya los hemos resuelto, el primero sería I_1, mientras que el segundo será I_2. (es decir, la intensidad del primer y segundo haz separados; no confundirse con $I_{primero}$, etc...)

$$I_{primero} \;\; \alpha \;\; I_1 + I_2 + 2E_1E_2\,\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} cos(wt)cos(wt-\varphi))dt$$

Aquí separo el angulo del coseno:

$cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta)$

$$I_{primero} \;\alpha\; I_1 + I_2 + 2E_1E_2\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} cos(wt)[cos(wt)cos(\varphi) + sin(wt)sin(\varphi)]dt$$

Como elegí calcular solo un intervalo con φ constante (en este caso la primera, pero podría ser cualquiera), entonces, al ser constante, sale afuera de la integral, y distrbuyo el coseno.

$$I_{primero} \;\alpha\; I_1 + I_2 + 2E_1E_2\frac{1}{\tau}[cos(\varphi)\int_0^{\tau} cos^2(wt)dt + sin(\varphi)\int_0^{\tau} cos(wt)sin(wt)]dt$$

Nuevamente, estas integrales suenan muy familiares, la primera es π/w, la segunda es cero.

$$I_{primero} \;\alpha\, I_1 + I_2 + 2E_1E_2\,\frac{1}{\tau}cos(\varphi)\frac{\pi}{w} = I_1 + I_2 + 2E_1E_2\,\frac{1}{2}\,cos(\varphi) = I_1 + I_2 + cte\,.\,cos(\varphi)$$

Lo reemplazo en la intensidad final(es la misma expresión para cada intervalo, excepto cada φ):

$$I \;\; \alpha \; \frac{I_{primero}+I_{segundo}+I_{tercero}+...+I_{10^9-ésimo}}{10^9} = \frac{10^9 I_1}{10^9} + \frac{10^9 I_2}{10^9} + cte.\frac{\sum_i^{10^9} cos(\varphi_i)}{10^9}$$

Sé que el $cos(\varphi_1)$ es igual de probable que sea positivo o negativo, entre -1 y 1, entonces su suma no tomará valores muy grandes. Sin embargo, 10^9 es un numero enorme (1000000000) . Entonces ese término será prácticamente nulo.

$$I \simeq I_1 + I_2$$

La conclusión es que la luz natural (en esta simplificación) no puede generar una interferencia constructiva o destructiva. Es decir, ese término que se volvió prácticamente cero, podría haber contribuido a la intensidad final, pero dado que las fases cambian cada $10^{-9}s$ *tenderá a cero en una ventana de 1 segundo.*

<u>Una recomendación final:</u>

Una forma alternativa (diferente a la guía) que tal vez sea menos intensiva es la siguiente (la recomiendo para los que ya se sientan cómodos con las cuentas)

uso los siguientes promedios temporales (como las cuentas de integrales son parecidas, esto acelera un poco)

$$< cos^2(wt) > \ = \ \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} cos^2(wt)dt = (sust.\ como\ siempre) = \pi/w = \frac{1}{2}$$

$$< cos(wt) > \ = \ < sin(wt) > \ = \ < cos(wt+\varphi) > \ = \ < cos(wt)sin(wt) > \ = \ 0$$

Entonces probemos en **(ejercicio 1->a y b->ii)** :

$$\overline{E_{total}}(z=0) = E_0 cos(wt)\,\widehat{x} + E_0 sin(wt)\,\widehat{x}$$

$$I\ \alpha\ < \left|E_0 cos(wt)\,\widehat{x} + E_0 sin(wt)\,\widehat{x}\right|^2 > \ =< E_0{}^2 cos^2(wt) + E_0{}^2 sin^2(wt) + 2E_0{}^2 cos(wt)sin(wt) >$$

$$= E_0{}^2(\ < cos^2(wt) > \ + \ < sin^2(wt) > \ + \ < cos(wt)sin(wt) >) = E_0{}^2(\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0\ ) \ = E_0{}^2$$