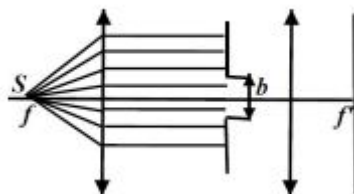


## Resumen difracción:

Arrancamos con la difracción de Fraunhofer:

Un frente de onda plano se encuentra con un obstáculo en forma de rendija de ancho  $b$ ,  
**¿qué figura de intensidad se observará sobre la pantalla?**

Para armar el setup completo que muestra el ejercicio debo entender por qué se utilizan dos lentes.

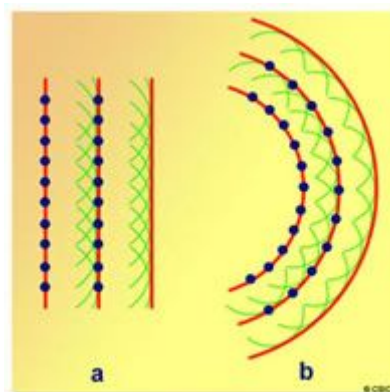


La primera (izquierda) se utiliza para convertir una fuente puntual en una fuente que esté en el infinito, o mejor dicho, quiero que incidan rayos paralelos sobre la rendija (frente de onda plano).

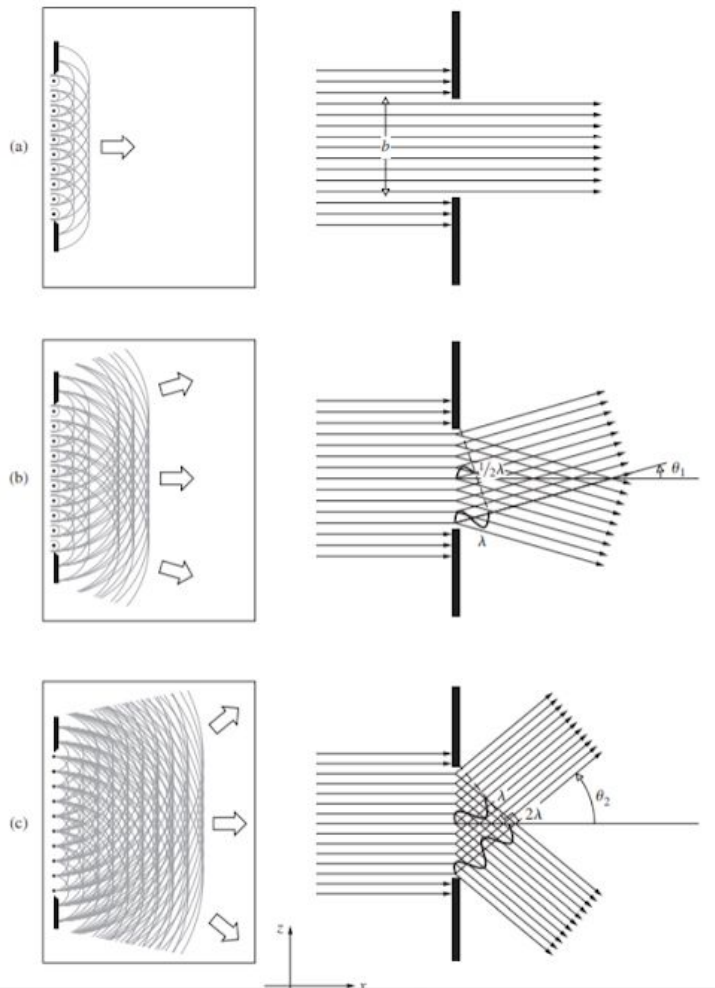
No será tratada la cuenta del patrón de difracción final, pero si es importante hablar de un poco lo que sucede en la rendija.

Para entender un poco por qué hay un patrón debido a la rendija, habría que hablar de la interpretación de Huygens de la luz.

Huygens postuló que todo frente de onda es conformado por la superposición de infinitas fuentes puntuales. Obviamente esto no cambia la forma final del frente de onda, pero sí es una interpretación útil para mirar cómo se comportaría el frente al encontrarse con un obstáculo.

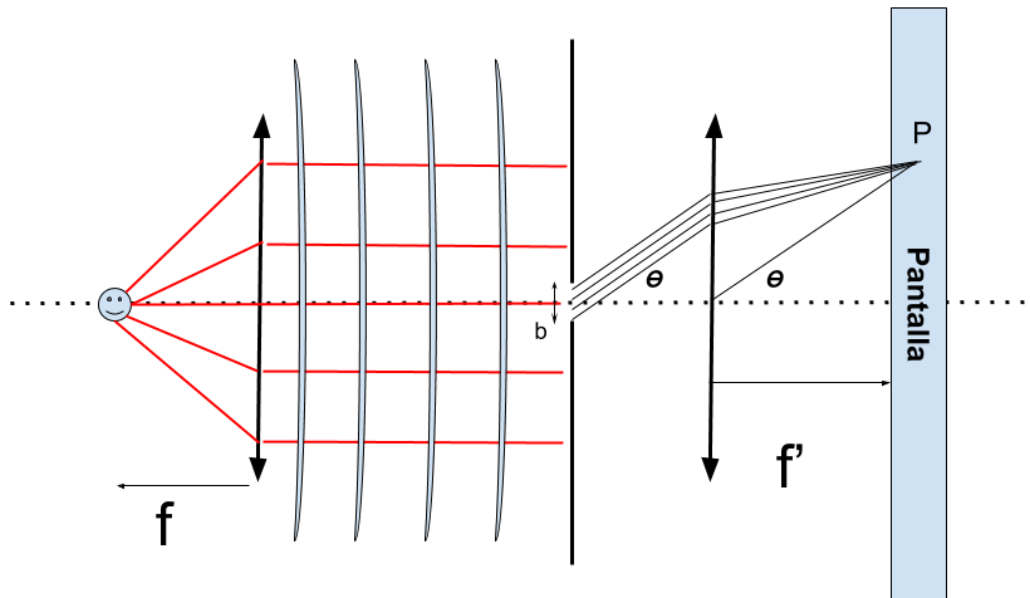


Entonces el frente de onda choca contra la rendija, y todos los puntos de la rendija según Huygens pueden ser interpretados como fuentes puntuales, así que es allí donde se realiza la cuenta que no mostraremos, integrando todas las diferencias de camino entre las fuentes puntuales de la rendija hasta la pantalla.



*Figura del Hecht*

Lo importante allí es que, tal como en interferencia de Young, nos importan los rayos que son paralelos, y la forma como los hacemos converger en una pantalla (y no en el infinito) es a través de la segunda lente, dado que rayos paralelos que llegan a una lente convergen en su foco, nos interesa no solo colocar la pantalla en el foco imagen de la segunda lente, sino también entender en qué posición vertical convergen (dependiendo del ángulo que estoy mirando).



Para entender entonces dónde convergen rayos paralelos en un ángulo  $\theta$  trazamos un rayo con ese mismo ángulo desde el vértice de la lente hasta la pantalla que se encuentra en  $f'$  (foco imagen de la segunda lente..

Tratemos entonces la ecuación de intensidad:

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 ; \beta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta)$$

Bien, analicemos esta ecuación.

### Mínimos y max. principal en difracción de Fraunhofer.

Puede calcularse directamente el máximo ppal y los mínimos sin necesidad de derivar. Esto es fácil de ver ya que la intensidad es siempre positiva, es decir que los ceros serán mínimos (si encuentro un cero de intensidad, será también un mínimo) . Eso sucederá cuando el  $\sin(\beta)$  sea cero EXCEPTO en el caso  $\sin(0)/0$  que sabemos que su limite es 1, es decir que la cuenta seria de la siguiente manera:

$$\sin(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = m \cdot \pi$$

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta) = m \pi$$

Como siempre utilizamos la aproximación paraxial

*Aproximación paraxial* ( $\theta$  pequeño):

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \alpha$$

En este caso estamos en el caso de una lente, no en una pantalla, es decir que el cateto adyacente ya no es D, sino f .

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta) \approx \frac{\pi b}{\lambda} \tan(\theta) = \frac{\pi b}{\lambda} \frac{y}{f} = m \cdot \pi$$

$y_{max\ ppal} = 0$  (máximo principal)

$y_{max\ ppal} = \frac{m \lambda f}{b}$  (mínimos de difracción)

Bueno, con esos datos, tenemos una idea general del patrón que se formaría, pero por completitud estaría bueno tener en cuenta qué magnitud tendrían los máximos secundarios.

### **Máximos secundarios.**

Para hacer esa cuenta es necesario derivar la intensidad

$$I' = 2 I_0 \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right) \cdot \left( \frac{\cos(\beta) \cdot \beta - \sin(\beta)}{\beta^2} \right) = 0 \text{ (ptos críticos)}$$

Aquí podemos ver que si el primer término del seno se va a cero, todo se va a cero, pero esos puntos críticos son los mismos que encontré antes (es decir, tiene sentido que los mínimos y el máximo principal sean puntos críticos, hasta ahí todo bien)

El segundo término entonces es el que al anularse nos daría los máximos secundarios:

$$\cos(\beta) \cdot \beta - \sin(\beta) = 0 \Rightarrow \tan(\beta) = \beta$$

Esa ecuación básicamente me indica que tengo que buscar los puntos donde la  $\tan(\beta)$  se cruza con la recta de pendiente 1 ( $\beta$ )

Cómo resolver esa ecuación lo vamos a hacer con wolfram alpha (una página muy copada para hacer cálculos rápidos)

queremos las n-soluciones a esa ecuación así que el comando que necesitamos será:

`nsolve (tan(x)==x)`

---

Numerical solutions:

$$x \approx \pm 10.9041216594289\dots$$

---

$$x \approx \pm 7.72525183693771\dots$$

---

$$x \approx \pm 4.49340945790906\dots$$

---

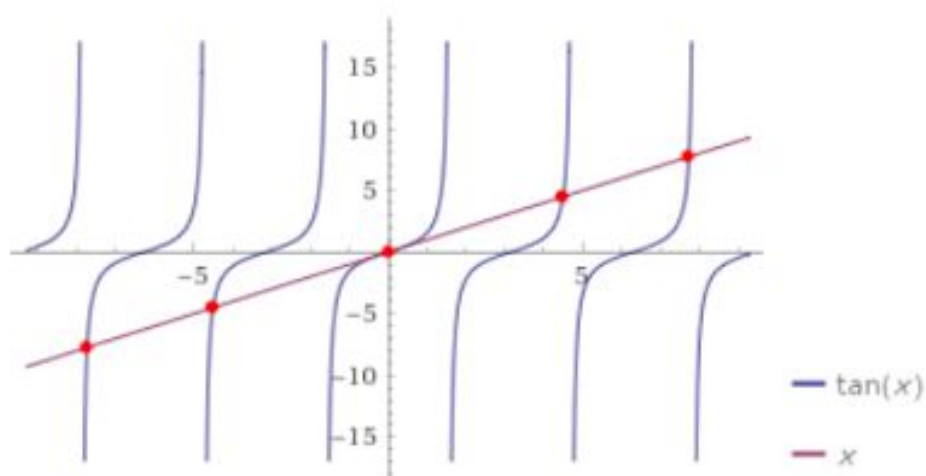
$$x = 0$$

---

$$x \approx 14.0661939128315\dots$$

---

Plot:



Y de esa manera wolfram alpha encontró las soluciones que necesitábamos para beta (beta es  $x$ ).

Descartamos  $\beta = 0$  ya que es el máximo principal.

Bien, entonces esos son los cruces, pero la intensidad que obtenemos en cada uno de ellos también es importante, nos da idea de la magnitud que tiene la intensidad en cada una de esas soluciones, y de esa manera sabemos a qué altura dibujar cada máximo secundario.

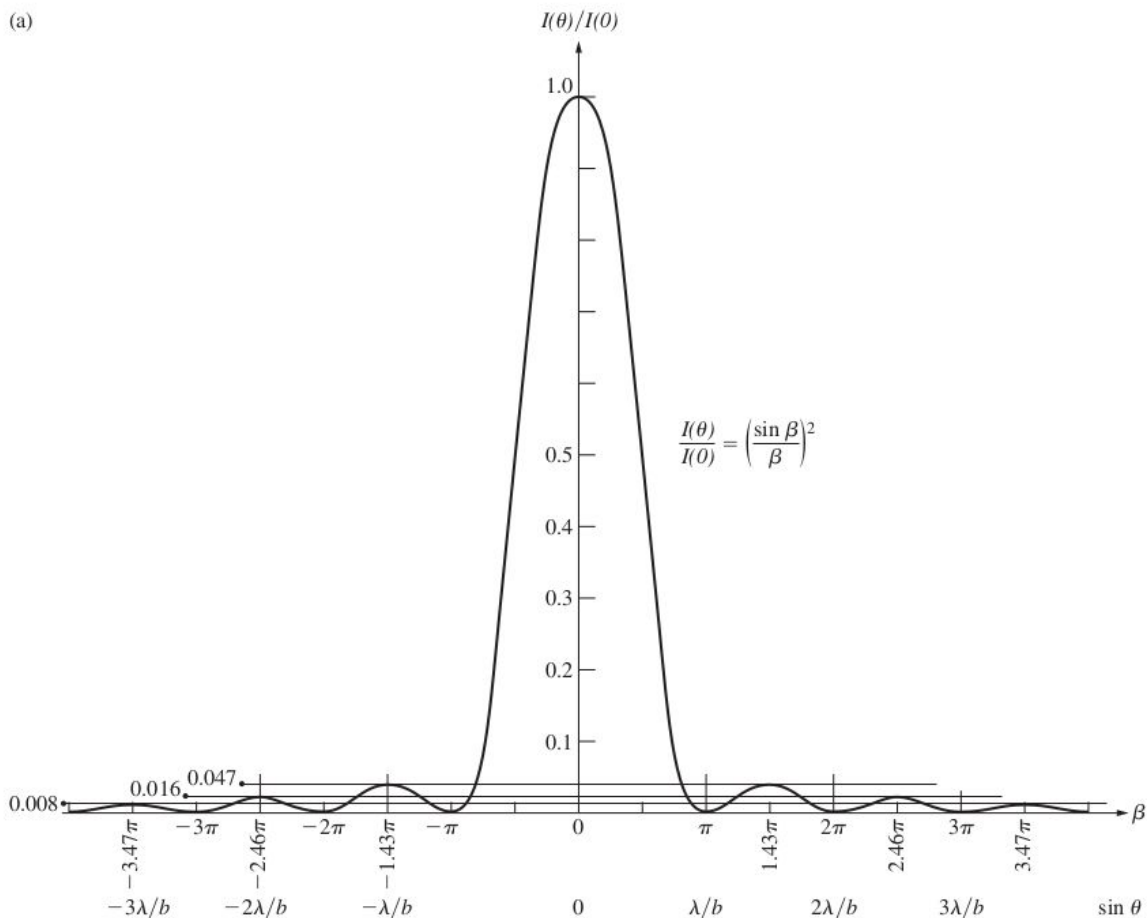
para saber la intensidad de cada máx secundario miramos  $\left(\frac{\sin(\beta)}{\beta}\right)^2$

$$x \approx 4.49 \Rightarrow \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta}\right)^2 = 0.047 \Rightarrow 4.7\% \text{ de la intensidad máxima}$$

$$x \approx 7.72 \Rightarrow \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta}\right)^2 = 0.016 \Rightarrow 1.6\%$$

etc...

La intensidad final la podemos observar en la siguiente figura



Vemos que la figura grafica el eje x en función de beta ( mínimos en  $m \pi$  ) o en función de  $\sin(\theta)$  (mínimos en  $\frac{m\lambda}{b}$  ). Pasar de  $\sin(\theta)$  a la posición "y" en la pantalla ya lo hicimos solo agrega el foco de la lente a los mínimos  $y_{max\ ppal} = \frac{m \lambda f}{b}$  .

Son todas formas diferentes de graficar lo mismo

**¿Qué sucede si la fuente no se encuentra sobre el eje óptico?**

Queremos ver qué sucede con el patrón de interferencia si elevo la fuente, tal como hicimos con interferencia de Young.

Aquí hay dos formas de pensarlo, y ofrezco ambas:

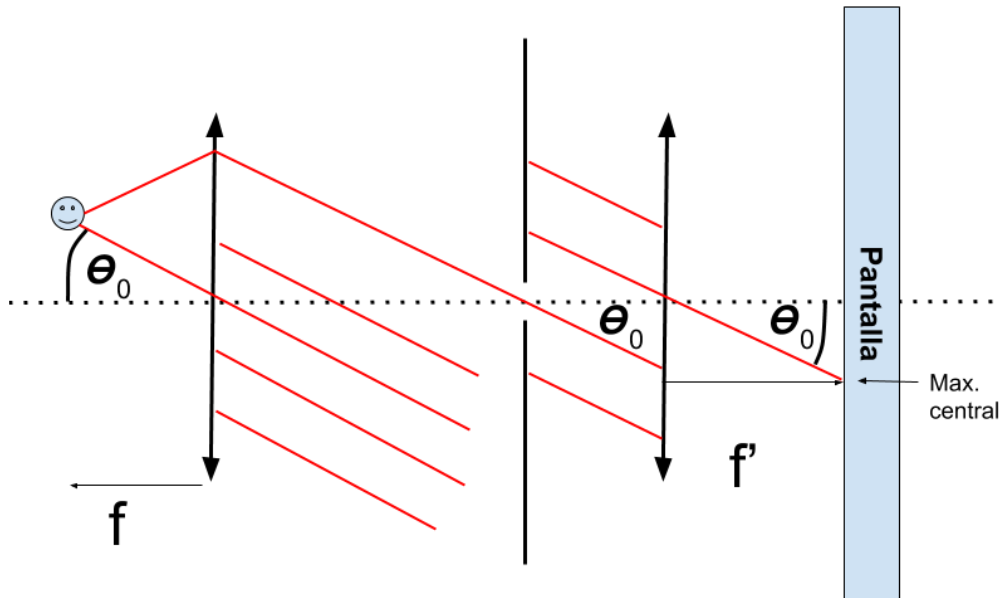
Podemos tomar las dos lentes, y quitando del medio la rendija, y lo tratamos como si fuera un dispositivo óptico con un objeto de altura  $h$  en el foco objeto de la primer lente.

El objeto estaría en el infinito para la segunda lente, y la imagen entonces aparecería en el foco imagen, con un aumento de  $M = -\frac{f'}{f}$  es decir que la posición del máximo central sería

$$h' \Rightarrow h' = \frac{-h.f'}{f} .$$

Esa cuenta no la muestro pero no es tan complicada, solo hace falta recordar la ecuación de lentes de la guía de lentes.

Otra manera intuitiva de verlo sería de la siguiente: si el "rayo" que se dirige hacia el máximo central para una fuente centrada pasa por el centro de la rendija y aparentemente no se desvía, podríamos decir que si quiero ver qué pasa para una fuente levantada hago lo mismo. Simplemente trazo los rayos como si pasaran por el centro de la rendija sin desviarse, y así veo el ángulo de la posición del máximo central (no confundir  $\theta_0$  con  $\theta$ ,  $\theta_0$  solo depende del objeto que emite luz, mientras que  $\theta$  es el parámetro de cada posición en la pantalla .



Vemos entonces que el ángulo del máximo central entonces será  $\theta_0$   
Si comparo la tangente de un lado y del otro, veré que

$$\frac{h}{f} = \frac{h'}{f'} \Rightarrow h' = \frac{-h.f'}{f}$$

Es decir que obtuve la misma ecuación de corrimiento que con la deducción de utilizar las lentes.

Tal como sucedió con el corrimiento de la figura de interferencia de Young, aquí también todo el espectro se correrá en conjunto.

El único cuidado aquí es de mirar que el corrimiento sea hacia el sentido correcto, eso es fácil de ver ya que veo que si respeto las convenciones de signos para ángulos

*$\theta_0$  del lado izquierdo tiene signo contrario del lado derecho*

O si lo quiero ver desde  $h'$ :

*$h'$  tiene signo contrario a  $h$ .*

También podemos recordar en Young hacia donde se corría el espectro cuando levantaba la fuente, obviamente aquí tenemos otras ecuaciones, pero el concepto es el mismo, sube la fuente, baja el máximo central.



## La rendija circular.

Este ejercicio busca aplicar lo que aprendimos en Fraunhofer, pero un poco distinto. Ahora la rendija es circular, y eso cambia un poco las cosas, ya que al ser circular, no solo tengo una rendija de fuentes puntuales que interferirán para generar el nuevo patrón, sino que tengo todo un círculo de fuentes. Eso significa que, además de que ahora la figura de difracción estará en 2D, el ancho de la campana no será la misma.

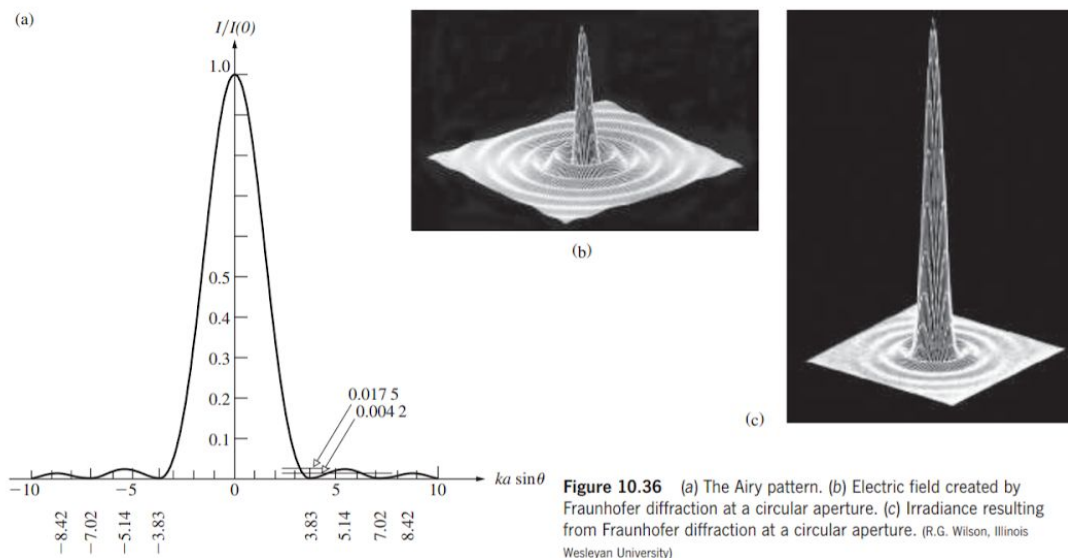


Figura ejemplo (Hecht) Podemos ver que el eje  $x$  ( $ka \sin(\theta)$ ) para mostrar la posición del primer mínimo es  $1.22 \pi \approx 3.83$ . En las otras dos figuras muestra el campo eléctrico y la intensidad sobre la pantalla.

Bueno, a las cuentas entonces:

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{J_1(2\pi a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)))}{\pi a \sin(\theta) - \sin(\theta_0)} \right)^2$$

Aquí simplemente he utilizado “a” para el radio de la abertura, ya que no quiero se confunda con el ancho de la rendija anterior que usaron la letra “d”

$\theta_0$  es el ángulo del máximo central en la pantalla y es constante. Si está centrado significa  $\theta_0 = 0$

$J_1$  es una función de Bessel, de la cual no nos interesa mucho más allá del hecho de que se utiliza en soluciones donde es importante la simetría de revolución, pero mucho más importante que eso:

$$J_1(1.22\pi) = 0$$

Es decir que allí me están diciendo la posición del primer cero de la función de Bessel, y con ello, el primer cero de la intensidad.

Si yo quisiera saber el radio de la campana central ( $R_{Airy}$ ), simplemente necesito la distancia desde el centro al primer mínimo, que es el dato que me acaban de dar. Cuentas (considero que  $\theta_0 = 0$  (máximo está en  $y = 0$ )):

$$1.22\pi = \frac{2\pi q \cdot \sin(\theta)}{\lambda} \approx 2\pi q \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{y_{1er\ min}}{f'} \approx 2\pi q \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{R_{Airy}}{f'}$$

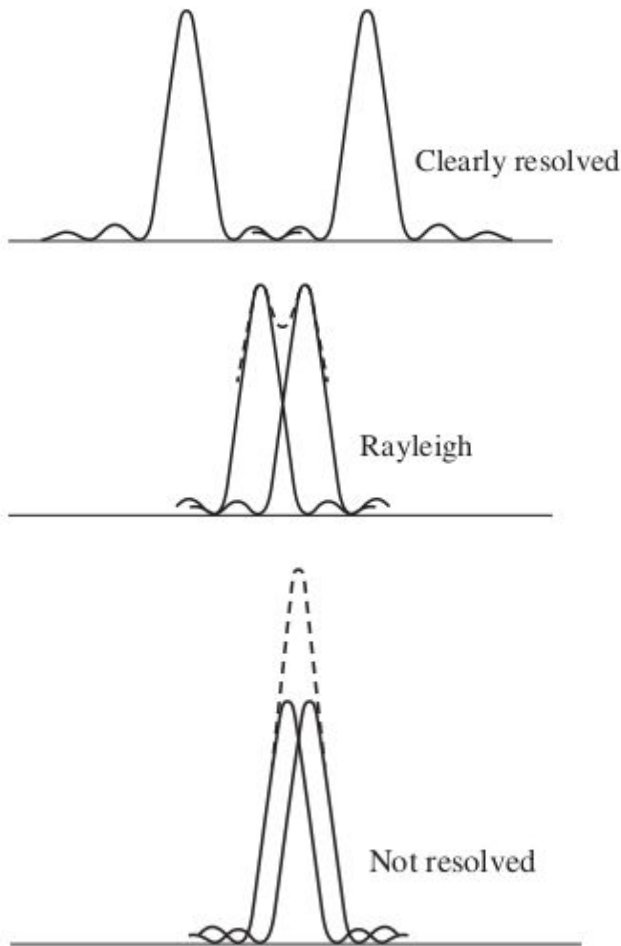
(es decir que la posición del primer mínimo en la pantalla sería el radio de Airy).

$$R_{Airy} = \frac{1.22 \cdot f' \lambda}{2q}$$

El ancho de la campana no será otra cosa que el diámetro de la misma, es decir,  $2R_{Airy}$ .

**¿Como lograr que dos fuentes a una distancia  $s$  de una lente de radio  $q$  se resuelvan correctamente bajo el criterio de Rayleigh?**

**El criterio de Rayleigh:** La distancia entre los máximos principales de dos patrones de difracción mínima para que se consideren bien resueltos es la distancia cuando hago coincidir el primer mínimo de uno con el máximo del siguiente.



*Aquí vemos los tres casos posibles: claramente separados, en la distancia mínima del criterio de Rayleigh, y finalmente no resueltos.*

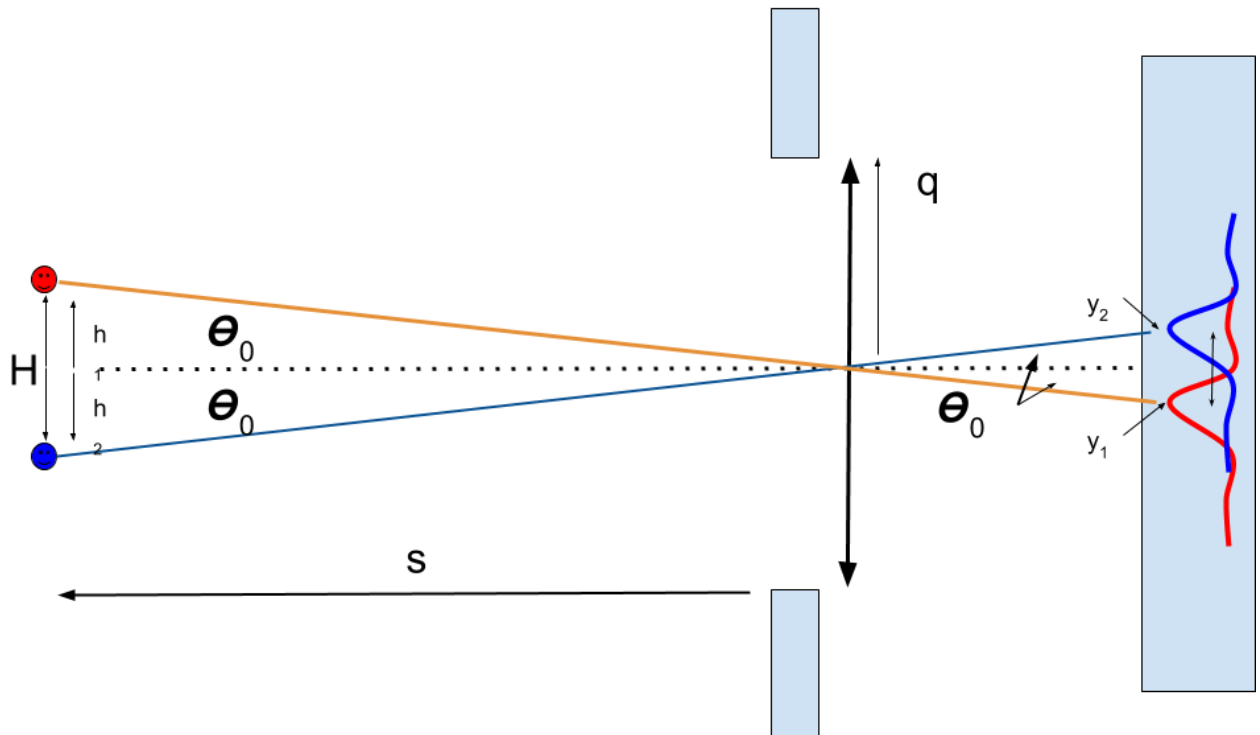
En otras palabras, si dos patrones de difracción están caen sobre la pantalla, entonces necesito que la distancia entre sus máximos sea mayor o igual que el radio de Airy, ya que de otra manera, según el criterio de Rayleigh, no están bien resueltos.

Bien, y qué tiene que ver eso con el radio de una lente? El ejercicio está indicando, que ahora la segunda lente y la rendija circular ya son la misma cosa, es decir, que el radio de la lente (no confundir con el radio de sus caras, estamos hablando de la distancia desde el centro al borde) ahora actúa como el radio de la rendija.

*Comentario: Esto puede sonar confuso de imaginar :una lente como rendija, pueden pensarlo como que la rendija está muy muy cerca de la lente, con el mismo radio que ella si les resulta más cómodo.*

*Pensemos en una aplicación: una lente de un telescopio. La luz que llega de las estrellas al telescopio fue originada a largas distancias (años luz) y por lo tanto llega como una onda plana, pero al llegar a la Tierra, se encuentra que el tubo que*

encierra la lente del telescopio se encarga de solo dejar pasar un círculo que tiene el mismo radio de la lente. Es decir que se comporta como una rendija también. Obviamente esto es una simplificación de toda la óptica que implica un telescopio, pero sirve como ejemplo.



Bien, ahora a las cuentas:

Como quiero ver cual es la distancia entre dos objetos a una distancia  $s$  (la considero muy lejana para que sean ondas planas y no necesitar la primer lente) necesito pasar esa distancia  $H$  a una distancia entre los espectros de difracción de manera que cumpla el criterio de Rayleigh. Eso lo hago muy parecido a las fuentes levantadas, ahora solamente debo tener cuidado con los signos (son distancias geométricas, toda posición negativa tendrá signo)

$$\frac{h_1}{s} = \tan(\theta_0) = \frac{-y_1}{f'}$$

$$\frac{-h_2}{s} = \tan(\theta_0) = \frac{y_2}{f'}$$

$h_1, h_2$  son las alturas del primer y segundo objeto

$y_1, y_2$  son las posiciones (sin considerar signo) de los dos máximos.

Entonces 
$$H = h_1 - h_2 = -\frac{s}{f'}y_1 + \frac{s}{f'}y_2 = \frac{s}{f'}(y_2 - y_1)$$

Sin embargo ya dijimos que la distancia entre los máximos tiene que ser al menos el

radio de Airy, por lo tanto

$$H_{min} > \frac{s}{f'} R_{Airy} = \frac{s}{f'} \frac{1.22 \cdot \lambda f'}{2q} = \frac{1.22 \lambda s}{2q}$$

También lo puedo ver con el ángulo (H/s):

$$2\theta_0 = \Delta\theta_{resol} = \frac{1.22 \lambda}{2q}$$

(es decir, el ángulo que forman dos objetos)

También lo puedo ver en la distancia entre las posiciones de los máximos:

$$\Delta y_{resol} = \frac{1.22 f \lambda}{2q}$$

Aquí podría definir el poder resolvente (angular y de posición)

$$\frac{1}{\Delta\theta_{resol}} ; \frac{1}{\Delta y_{min}}$$

Es básicamente una magnitud que me permite saber qué tan bien mi dispositivo detecta objetos cercanos entre sí. El poder resolvente al ser mayor me indica una mejor capacidad para resolver distancias pequeñas entre objetos.

## N rendijas (interferencia y difracción )

Aquí nos encontramos con el problema de mayor dificultad.

Consiste en N rendijas, cada una de ellas difractando luz, y todas las N rendijas interfiriendo entre ellas. La ecuación me la dan ya calculada, y debo encontrar una manera de obtener una noción de cual será la forma de la intensidad sobre una pantalla (buscar mínimos y máximos)

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} \right)^2$$

$$\beta = \frac{\pi b}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)),$$

b es el ancho de las rendijas

$$\delta = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)),$$

d es la distancia entre los centros de las rendijas.

Bien, miremos ordenadamente esta ecuación.

En primer lugar, tenemos el término que ya nos es familiar de difracción:  $\left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2$   
Luego tendremos un término nuevo con  $\delta$  que al tener d (distancia entre rendijas) ya nos está dando la idea de que tendrá que ver con interferencia.

Usaré de ahora en adelante  $\theta_0 = 0$  ya que  $\theta_0$  solo implica un corrimiento de todo el espectro y no afecta nada.

### Arranquemos por lo fácil: mínimos de difracción y máximo de difracción

Este término es idéntico al de difracción así que no nos demoraremos mucho

**mínimos y máximo principal:**

$$\beta = m\pi \text{ (me dará el max. ppal para } m=0, \text{ y el resto serán mínimos)}$$

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta) = m\pi$$

(lo haré con  $\theta$  como en la práctica)

$$\theta_{\min Dif} = \frac{m\lambda}{b}$$

### máximos secundarios de difracción:

Me queda entonces los máximos secundarios, pero esos ya los conocemos, son aquellos que resolvimos usando Wolfram Alpha.

$$\tan(\beta) = \beta$$

### Ahora vamos a la parte de interferencia

$$\left(\frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)}\right)^2$$

### Miro los máximos principales

(son los que dan el límite  $\sin(0)/0=1$ )

$$\sin(\delta) = k\pi$$

Aquí pido que el denominador se vaya a cero, que también hará que el numerador haga lo mismo, ya que  $N.k.\pi$  también es múltiplo de  $\pi$ .

$$\theta_{max\ ppales\ Interf} = k \frac{\lambda}{d}$$

### Busquemos los mínimos:

Serán aquellos que vuelvan cero al numerador de  $\left(\frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)}\right)^2$  pero sin volver cero al denominador (los que vuelven cero al denominador serían los máximos principales de interferencia, porque es el conocido límite de  $\sin(0)/0$ ).

$$\sin(N\delta) = 0$$

$$N\delta = n \pi$$

$$\frac{N\pi d}{\lambda} \sin(\theta) = n \pi$$

$$\theta_{min\ Interf} = n \frac{\lambda}{Nd}$$

### máximos secundarios de interferencia:

Y finalmente los máximos secundarios, que siguen una ecuación similar a los

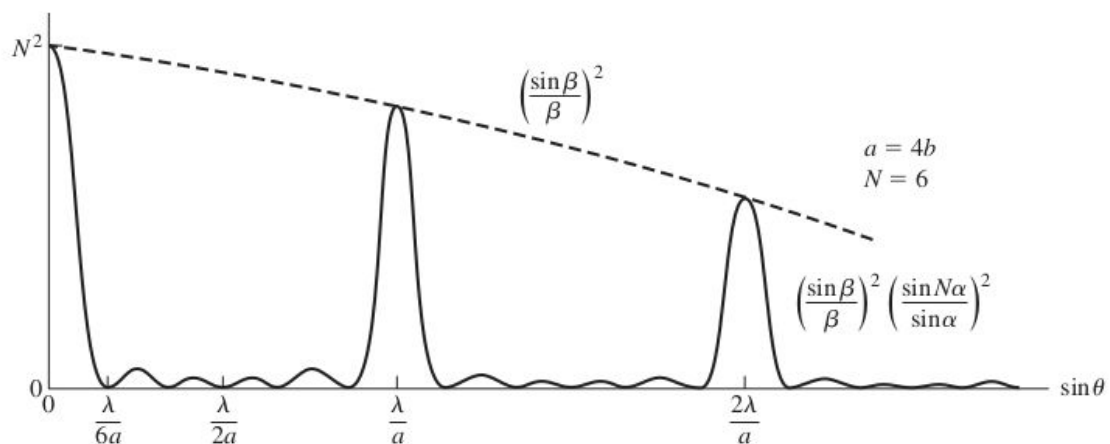
máximos secundarios de difracción (es parecido a los maximos secundarios de difracción tengo que derivar el término de interferencia etc...) Terminó obteniendo la siguiente ecuación

$$\tan(N\delta) = N \cdot \tan(\delta)$$

Una aprox razonable deja eso en una expresión mucho más manejable aunque pueden colocar la ecuación anterior en el wolfram si quieren.

$$\theta_{max \text{ Sec Interf}} = \frac{(2n+1) \lambda}{2N} \frac{\lambda}{d}$$

**Recomendación:** concentrarse en los mínimos de difracción e interferencia y los máximos principales, NO embrollarse con los máximos secundarios de nada.



*Ejemplo del Hecht (ellos usan a cuando nosotros usamos d)*

**Bien, de esa manera una cuenta que podríamos hacer es contar cuántos máximos principales de interferencia habría dentro de una campana de difracción:**

1er mínimo izq de difracción < posición de máximo ppal de interf < 1er mínimo der de dif.

$$-\frac{\lambda}{b} < \frac{k\lambda}{d} < \frac{\lambda}{b}$$

$$-\frac{1}{b} < \frac{k}{d} < \frac{1}{b} \quad (\text{multiplico todo por } 1/\lambda)$$

$$-\frac{d}{b} < k < \frac{d}{b} \quad (\text{multiplico todo por } d)$$

Listo, entonces veo que depende de la relación entre b y d.

*supongamos que d/b=4*



$-4 < k < 4$  (podemos ver que  $k=-3,-2,-1,0(\text{max central}),1,2,3$ ) tendré 7 máximos de interferencia en la campana central.

Uso  $<$  y no  $=$  porque si coincide un mínimo de difracción con un máximo de interferencia, el mínimo de difracción simplemente lo apaga ( $I=0$ ) y de todos modos no lo contamos. Por eso las desigualdades son estrictas.

**Busquemos ahora cuantos mínimos de interferencia hay entre dos máximos ppales de interferencia:**

**max interf central  $<$  mín de interf  $<$  primer max ppal de interf.**

$$0 < \frac{n \lambda}{N d} < \frac{\lambda}{d}$$

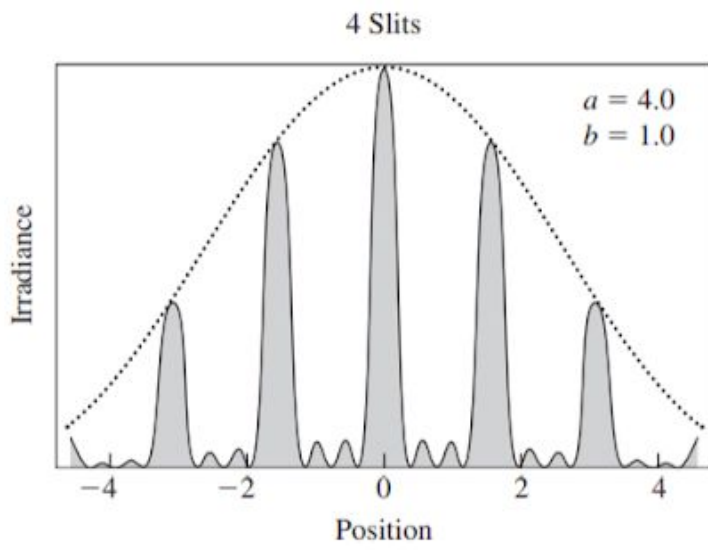
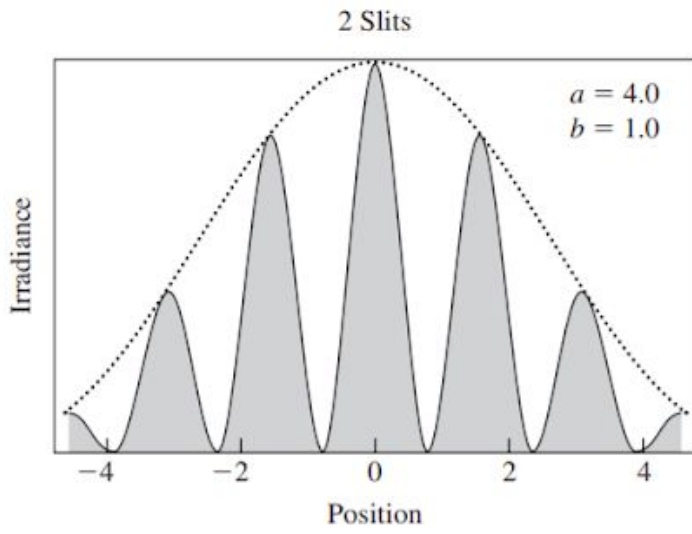
**$0 < \frac{n}{N} < 1$  (y así veo que depende de  $N \rightarrow$  serán  $N-1$  mínimos de interferencia entre dos máximos ppales de interf.)**

*Comentario: cuántos máximos secundarios hay entre dos principales es una cuenta similar, es fácil ver que si entre dos mínimos tendré un máximo, será  $N-2$  la cantidad de máximos secundarios entre dos máximos principales, pueden verlo en las figuras también.*

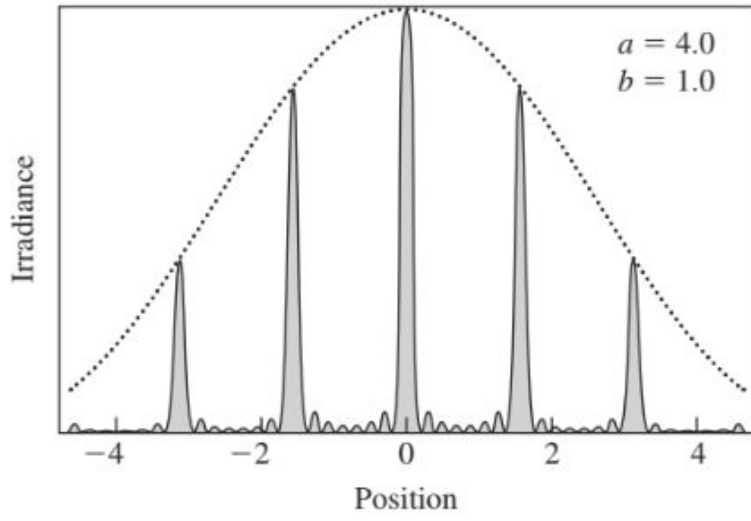
**miremos  $N=5$**

**$1/5, 2/5, 3/5, 4/5$  (4 mínimos= $5-1$ )**

El libro Hecht nos ofrece algunos ejemplos (los ofrezco para que se convenzan contando los mínimos centrales que se pueden



8 Slits



### **Adicional redes de difracción.**

Debemos caracterizar una red de difracción, es así que tenemos que que detectar algunas características distintivas de la misma.

Recordemos que aquí estaríamos analizando los picos más brillantes, es decir, los máximos principales de interferencia, que siguen la siguiente ecuación:

$$d \sin(\theta_m) = m \lambda$$

$$(\theta_m \approx \frac{m\lambda}{d})$$

Quiero entonces imaginar que si incido a la red de difracción con dos longitudes de onda (por ejemplo), la red tendrá el problema de que los picos estén bien resueltos, es decir, estén a una distancia que cumpla el criterio de Rayleigh.

### **Dispersión angular:**

La dispersión angular para un orden específico se define como la relación entre la distancia angular entre dos picos distintos (orden  $m$ ) de dos longitudes de onda tal que

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos(\theta_m)}$$

### **Ancho de un máximo principal de una onda monocromáticas:**

Para el caso específico de una onda monocromática ( $\lambda$  único) tengo que los picos principales tendrán un ancho angular con la siguiente ecuación

$$\Delta\theta = 2 \frac{\lambda}{Nd \cos(\theta_m)}$$

$Nd$ : ancho total de la red de difracción

### **Poder de resolución:**

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} = Nm$$

Aquí  $\lambda$  es la longitud de onda promedio que incide sobre la red, mientras que  $\Delta\lambda_{min}$  es la distancia mínima entre longitudes tal que sus picos estén bien resueltos (bien separados según Rayleigh)

A esto se le llama poder de resolución y caracteriza la capacidad de una red de difracción de separar dos longitudes de onda, es así si incido con una longitud de

onda  $\lambda$  , la mínima distancia de longitud de onda respecto de esa longitud  $\lambda$  que sabrá separar esa red de difracción será  $\Delta\lambda_{min}$  , y su poder resolvente será el cociente.

Es básicamente una medida de qué tan bien puede separar los picos de dos longitudes de onda diferentes.

Eso significa que cuantas más rendijas tenga (N) mejor el poder resolvente.

Cuanto mayor sea el orden (pico que estoy mirando), también mejor será el poder resolvente.

A veces se utiliza la cantidad de ranuras por cm

sepan que la confusión puede estar en que lo escriben con N también, sin embargo

$$\hat{N}(\text{cant de líneas por cm}) = 1/d(\text{en cm})$$