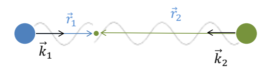
Interferencia

Interferencia de ondas

- La idea del tema es analizar situaciones donde actúen más de una fuente
- Toda la gracia va a estar en analizar con qué **fase** llega cada perturbación a un punto dado

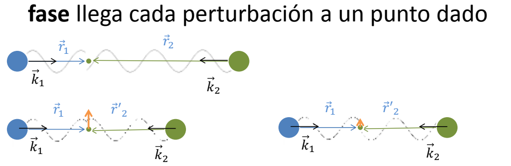


$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_1 r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$

$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_2 r_2 - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$

Interferencia de ondas (si entienden esto…listo)

- La idea del tema es analizar situaciones donde actúen más de una fuente
- Toda la gracia va a estar en analizar con qué **fase** llega cada perturbación a un punto dado

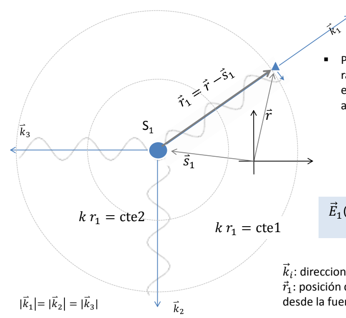


$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_1 r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$

$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_2 r_2 - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$

Una fuente puntual
y tres de sus rayos

$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{\vec{k}.\vec{r}_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$



- Para ondas esféricas la dirección de los rayos es **radial** desde la fuente, por lo que el rayo que pasa por el punto $\vec{r}$ tiene asociado un *vector de onda*:

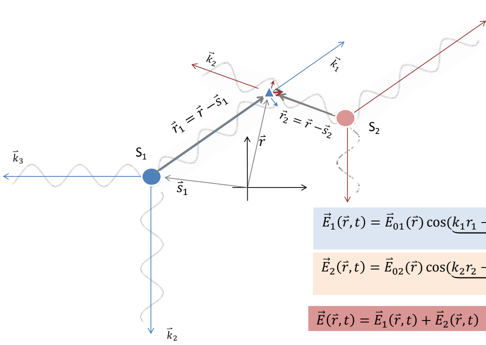
$$\vec{k} = k\,\hat{r}_1$$

$$\varphi_1 = \vec{k}.\vec{r}_1 - w\,t + \varepsilon_1 = k\,r_1 - w\,t + \varepsilon_1$$

$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k\,r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$

$\vec{k}_i$: direccion del rayo i
$\vec{r}_1$: posición del punto de interes $\vec{r}$, medida desde la fuente S_1

Sumando fuentes



$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_1 r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$

$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_2 r_2 - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$

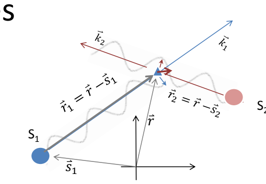
$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)$

Sumando fuentes

$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_1 r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$

$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_2 r_2 - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$

$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)$



Las perturbaciones se suman…como vectores

Cuando tengo más de una fuente puede interesar:
- Cuál es el campo $\vec{E}$ total en todo el espacio y para todo tiempo?
- Interés práctico: cuál es la distribución espacial de la irradiancia $I = \varepsilon_o c\ \langle E(\vec{r},t)^2\rangle_T$ (dónde se localiza espacialmente la energía de la onda?)

*Periodos típicos para luz visible T=1.3-2.3 10^{-15} s

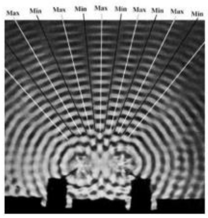
Chapa chapa

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\vec{k}_1\vec{r}_1 - w\,t + \varepsilon_1)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}(\vec{r})\cos(\vec{k}_2\vec{r}_2 - w\,t + \varepsilon_2)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)$$

En cada punto del espacio, la perturbación total dependerá de las **amplitudes** y **fases** con las que ambas ondas alcanzan al punto en cuestión



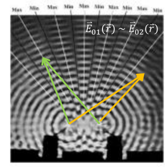
Onditas en el agua producidas por dos fuentes *puntuales* que emiten en fase. Notar que hay direcciones donde hay crestas y valles muy pronunciados (Max) y direcciones de *calma* (Min)

En este ejemplo:
- Cómo son $\vec{E}_{01}(\vec{r})$ y $\vec{E}_{02}(\vec{r})$?
- Cómo son ε_1 y ε_2?

$$I = \varepsilon_o c\ \langle E(\vec{r},t)^2\rangle_T$$

Habra zonas de muchas olas y zonas calmas. La energia no se distribuye homogeneamente en el espacio

Las perturbaciones se suman



En este ejemplo:
- Cómo son $\vec{E}_{01}(\vec{r})$ y $\vec{E}_{02}(\vec{r})$? $\quad \vec{E}_{01}(\vec{r}) \parallel \vec{E}_{02}(\vec{r})$
- Cómo son ε_1 y ε_2? $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\cos(\underbrace{\vec{k}_1\vec{r}_1 - w\,t + \varepsilon}_{\varphi_1})$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\cos(\underbrace{\vec{k}_2\vec{r}_2 - w\,t + \varepsilon}_{\varphi_2})$$

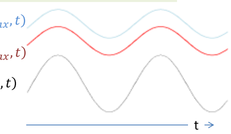
- Que pasa para los puntos $\vec{r}$ que cumplen

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \vec{k}_2\vec{r}_2 - \vec{k}_1\vec{r}_1 = 2\pi\, m$$

$\vec{E}_1(\vec{r}_{max},t)$

$\vec{E}_2(\vec{r}_{max},t)$

$\vec{E}(\vec{r}_{max},t)$

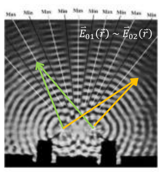


$$\vec{E}(\vec{r}_{max},t) = \vec{E}_0(\vec{r}_{max})\cos\left(\vec{k}_1\vec{r}_{max1} - w\,t + \varepsilon\right) + \vec{E}_0(\vec{r}_{max})\cos\left(\vec{k}_1\vec{r}_{max1} - w\,t + \varepsilon + 2\pi\right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_{max}) = 2\,\vec{E}_0(\vec{r}_{max})\cos\left(\vec{k}_1\vec{r}_{max} - w\,t + \varepsilon\right)$$

$$I = \varepsilon_o c\ \langle E(\vec{r},t)^2\rangle_T = 4\, I_1$$

Las perturbaciones se suman



En este ejemplo:
- Cómo son $\vec{E}_{01}(\vec{r})$ y $\vec{E}_{02}(\vec{r})$? $\quad \vec{E}_{01}(\vec{r}) \parallel \vec{E}_{02}(\vec{r})$
- Cómo son ε_1 y ε_2? $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\cos(\underbrace{\vec{k}_1\vec{r} - w\,t + \varepsilon}_{\varphi_1})$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\cos(\underbrace{\vec{k}_2\vec{r} - w\,t + \varepsilon}_{\varphi_2})$$

- Que pasa para los puntos $\vec{r}$ que cumplen

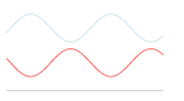
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \vec{k}_2\vec{r}_2 - \vec{k}_1\vec{r}_1 = \pi(2m+1)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_{min},t) = \vec{E}_0(\vec{r}_{min})\cos\left(\vec{k}_1\vec{r}_{min1} - w\,t + \varepsilon\right) + \vec{E}_0(\vec{r}_{min})\cos\left(\vec{k}_1\vec{r}_{min1} - w\,t + \varepsilon + \pi\right)$$

$\vec{E}_1(\vec{r}_{min},t)$

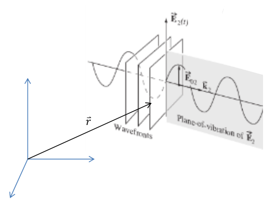
$\vec{E}_2(\vec{r}_{min},t)$

$\vec{E}(\vec{r}_{min},t)$



Applet

Como describo ondas planas?



$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\underbrace{\vec{k}_2.\vec{r} - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$$

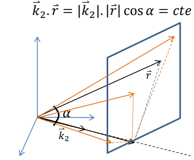
Onda de fase constante sobre planos perpendiculares a la dirección de propagación

La condición que satisfacen todos los puntos del plano perpendicular a $\vec{k}_2$ es:

Producto escalar

$$\vec{k}_2.\vec{r} = cte$$

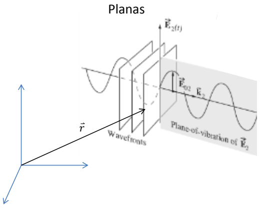
$$\vec{k}_2.\vec{r} = |\vec{k}_2|.|\vec{r}|\cos\alpha = cte$$



Dado $\vec{k}_2$, todos los puntos que tengan igual producto escalar con él, perteneceran a un mismo plano (perpendicular a $\vec{k}_2$)

Como describo ondas?

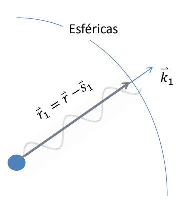
Planas



$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\underbrace{\vec{k}_2.\vec{r} - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$$

Onda de fase constante sobre planos perpendiculares a la dirección de propagación

Esféricas



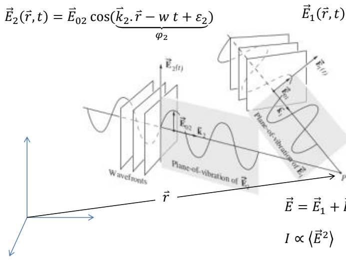
$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_1 r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$$

Onda de fase constante sobre esferas centradas en S_1 (y por tanto… perpendiculares a la dirección de propagación)

Ahora si…sabemos como describirlas, sabemos lo que esperamos …calculemos como interfieren dos ondas planas*

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\underbrace{\vec{k}_2.\vec{r} - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$$

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}\cos(\underbrace{\vec{k}_1.\vec{r} - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$$



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2).(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \vec{E}_1^{\,2} + \vec{E}_2^{\,2} + 2\vec{E}_1.\vec{E}_2$$

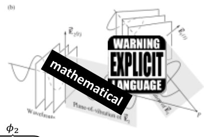
$$I \propto \langle \vec{E}^2\rangle \quad = \left\langle \vec{E}_1^{\,2}\right\rangle + \left\langle \vec{E}_2^{\,2}\right\rangle + 2\langle \vec{E}_1.\vec{E}_2\rangle$$

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

*Para dos ondas esfericas se muy similar, solo que hay que usar la fase correspondiente

Término de interferencia

El término de interferencia



$$I = \underbrace{\left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle}_{I_1} + \underbrace{\left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle}_{I_2} + \underbrace{2\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle}_{I_{12}}$$

$$\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle = \vec{E}_{01}\, \vec{E}_{02} < \cos(\overbrace{\vec{k}_1 . \vec{r} + \varepsilon_1}^{\phi_1} - w\,t) \cos(\overbrace{\vec{k}_2 . \vec{r} + \varepsilon_2}^{\phi_2} - w\,t) >$$

$$= \vec{E}_{01}\, \vec{E}_{02} < [\cos(\phi_1)\ \cos(w\,t) + \sin(\phi_1) \sin(w\,t)]$$

$$[\cos(\phi_2)\ \cos(w\,t) + \sin(\phi_2) \sin(w\,t)]>$$

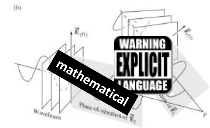
$\cos(a-b) = \cos(a)\ \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$

Como si fuera poca maldad … ahora distribuyo:

$$< \vec{E}_{01}\ \vec{E}_{02} \left[\underline{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)\ \cos^2(w\,t)} + \underline{\sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \sin^2(w\,t)}\ + \right.$$

$$\left. \underline{\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) \sin(w\,t) \cos(w\,t)} + \underline{\sin(\phi_1) \cos(\phi_2)\ \cos(w\,t) \sin(w\,t)} \right]>$$

El término de interferencia

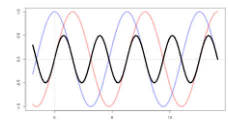


$$I = \underbrace{\left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle}_{I_1} + \underbrace{\left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle}_{I_2} + \underbrace{2\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle}_{I_{12}}$$

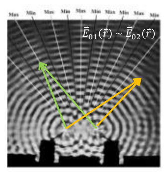
$$\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle =$$

$$\vec{E}_{01}\, \vec{E}_{02} \left[\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)\ \underbrace{\langle \cos^2(w\,t) \rangle}_{1/2} + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \underbrace{\langle \sin^2(w\,t) \rangle}_{1/2} + \right.$$

$$\left. [\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) + \sin(\phi_1) \cos(\phi_2)\ ] \underbrace{\langle \cos(w\,t) \sin(w\,t) \rangle}_{0}\ \right]$$



El término de interferencia



$$I = \underbrace{\left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle}_{I_1} + \underbrace{\left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle}_{I_2} + \underbrace{2\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle}_{I_{12}}$$

$$\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle =$$

$$\frac{\vec{E}_{01}\, \vec{E}_{02}}{2} [\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)\ + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2)]$$

$$\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle = \frac{\vec{E}_{01}\, \vec{E}_{02}}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\vec{E}_{01}\, \vec{E}_{02}}{2} \cos \Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = (\overbrace{\vec{k}_2 . \vec{r} + \varepsilon_2}^{\phi_2} - w\,t)\text{-}(\overbrace{\vec{k}_1 . \vec{r} + \varepsilon_1}^{\phi_1} - w\,t) = \Delta\phi$$

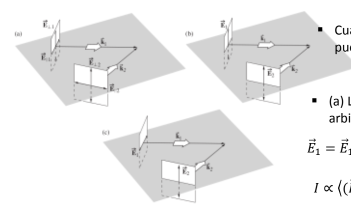
$$\boxed{I = \frac{\vec{E}_{01}^{\ 2}}{2} + \frac{\vec{E}_{02}^{\ 2}}{2} + \vec{E}_{01}\, \vec{E}_{02} \cos \Delta\varphi(\vec{r})}$$

Notar:

- Los terminos I_1 e I_2 son constantes
- I_{12} varia en el espacio : $\Delta\varphi = \Delta\varphi(\vec{r})$
- I_{12} se anula si $\vec{E}_{01} \perp \vec{E}_{02}$

*Para dos ondas esfericas se muy similar, solo que hay que usar la fase correspondiente

Interferencia con luz polarizada



- Cualquier estado de polarización puede escribirse como:

$$\vec{E} = \vec{E}_{||} + \vec{E}_{\perp}$$

- (a) La interferencia de dos ondas arbitrariamente polarizadas resulta

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1,||} + \vec{E}_{1,\perp} \qquad \vec{E}_2 = \vec{E}_{2,||} + \vec{E}_{2,\perp}$$

$$I \propto \left\langle (\vec{E}_{1,||} + \vec{E}_{1,\perp} + \vec{E}_{2,||} + \vec{E}_{2,\perp})^2 \right\rangle$$

- No hay interferencia para perturbaciones ortogonales (c)
- Se produce,por separado, interferencia entre componentes || por un lado y ⊥por otro (b)

$$I = \frac{\vec{E}_{01}^{\ 2}}{2} + \frac{\vec{E}_{02}^{\ 2}}{2} + \vec{E}_{01||}\, \vec{E}_{02||} \cos \Delta\varphi_{||}\,(\vec{r}) + \vec{E}_{01\perp}\, \vec{E}_{02\perp} \cos \Delta\varphi_{\perp}\,(\vec{r})$$