Difraccion 1/3

Clase tributo al gran M. Sigman

Recordemos una equivalencia que viene apareciendo desde hace rato

$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\cos(\underbrace{kr - w\,t + \varepsilon}_{\varphi})$

$\vec{E}(\vec{r},t=0) = \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r})\cos(\underbrace{kr + \varepsilon}_{\varphi})$

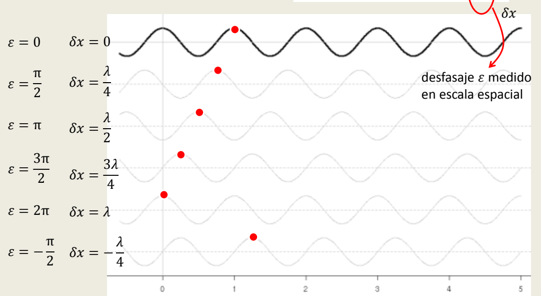
Nosotros vemos las cosas a *t* fijo…olvidemonos de *t*…o sea pensemos por ejemplo que estamos analizando las cosas a *t=0*

$\cos(kr+\varepsilon) \quad = \cos\left(kr + k\frac{\varepsilon}{k}\right) \quad = \cos\left(k(r+\frac{\varepsilon}{k})\right) \quad = \cos\left(k(r+\frac{\varepsilon}{2\pi}\lambda)\right)$

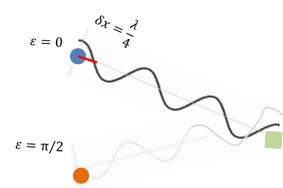
Un **desfasaje** ε equivale a un **desplazamiento** adicional $\frac{\varepsilon}{2\pi}\lambda$

Fuentes desfasadas

$\psi(x,t) = E_0\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varepsilon) \rightarrow \psi(x,t) = E_0\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{\lambda}\underbrace{\frac{\lambda}{2\pi}\varepsilon}_{\delta x})$

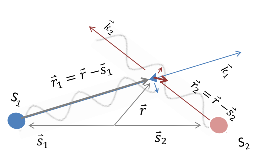


Un **desfasaje** $\varepsilon + 2m\pi$ equivale a un **desplazamiento** relativo de $\frac{\varepsilon}{2\pi}\lambda + m\lambda$



Ejemplo de posción de interferencia constructiva

Habiamos visto que cuando hay dos…



$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_1r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$

$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_2r_2 - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$

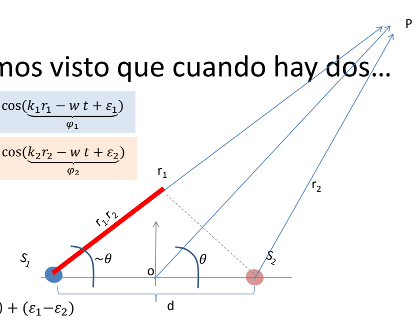
$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)$

*Periodos típicos para luz visible T=1.3-2.3 10^{-15} s

Habiamos visto que cuando hay dos…

$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_1r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$

$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_2r_2 - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$



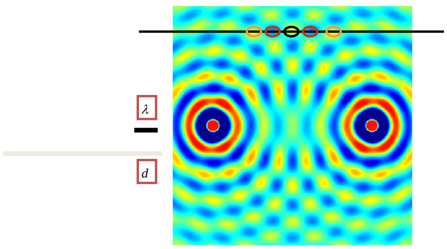
$\Delta\varphi = k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$

$\Delta\varphi_{max} = 2m\pi \qquad k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 2m\pi \qquad (r_1 - r_2) = \frac{2m\pi - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{k}$

$(r_1 - r_2) = m\lambda - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi}\lambda \xrightarrow{\text{OP>>1}} d\,\sin\theta_{max} = m\lambda - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi}\lambda$

Aguita de colores

$$d\ \sin\theta_{max} = m\lambda - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi}\lambda$$

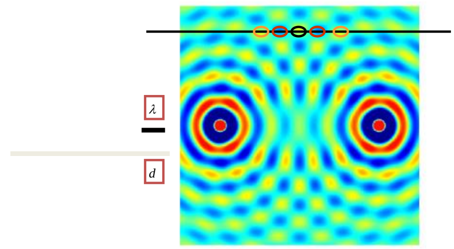


Fuentes en fase: las direcciones donde encontrar maximos son $\sin\theta_{max} = m\frac{\lambda}{d}$

Por que si $\frac{\lambda}{d}$ es chico voy a ver muchos ordenes de maximos sobre la pantalla?

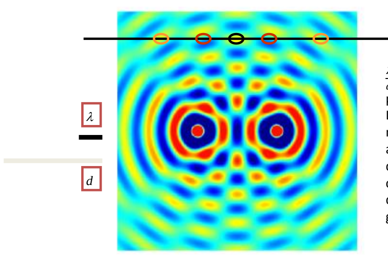
Aguita de colores

$$d\ \sin\theta_{max} = m\lambda - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi}\lambda$$



Fuentes en fase: las direcciones donde encontrar maximos son $\boxed{sen(\theta) = \frac{m\,\lambda}{d}}$

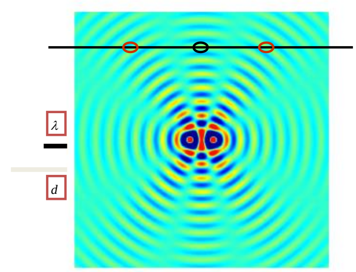
Aguita de colores



$\frac{\lambda}{d}$ es ahora un poco mas grande. Las fuentes estan mas cerca y los angulos donde veo diferencias de caminos como las de antes son mas grandes.

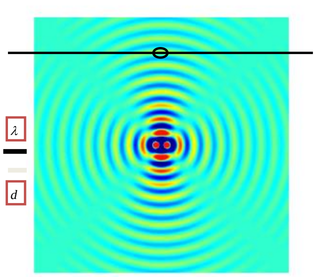
$$\boxed{sen(\theta) = \frac{m\,\lambda}{d}}$$

Aguita de colores



$$\boxed{sen(\theta) = \frac{m\,\lambda}{d}}$$

Aguita de colores



$$\boxed{sen(\theta) = \frac{m\,\lambda}{d}}$$

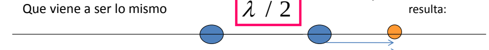
Cuando d es menor que la longitud de onda, para ningun angulo llegan a separarse en un ciclo completo con lo que el unico maximo esta en el centro.

El juego de la antena

Se dispone de dos fuentes que emiten luz monocromatica. Las fuentes pueden ubicarse donde queramos y podemos ajustar su fase a voluntad. Queremos emitir en la dirección norte sur, pero no en la dirección Este-Oeste.
Que hacer?

Que viene a ser lo mismo $\boxed{\lambda\ /\ 2}$

Para cualquier punto en este eje, la diferencia de fase resulta:

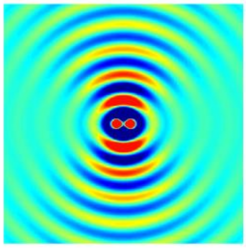


$$\Delta\varphi = k(r_1 - r_2) = -\pi$$

$$\Delta\varphi = k(r_1 - r_2) = k\ \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi$$

Si están en fase, acabamos de ver, en el centro y hacia el norte la interferencia es constructiva. (mitad del problema resuelto – que esten en fase)

Para que en el eje horizontal la interferencia sea destructiva, la distancia ha de ser la mitad de la longitud de onda. (problema resuelto)



SUPONGAMOS QUE POR ALGUN MOTIVO LAS FUENTES HAN DE QUEDAR ALINEADAS EN EL EJE X, EXISTE ALGUNA OTRA SOLUCION?

$$\boxed{\lambda / 2 + \lambda = 3\lambda / 2}$$

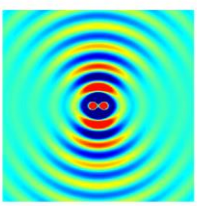
Para cualquier punto en este eje, la diferencia de fase resulta:

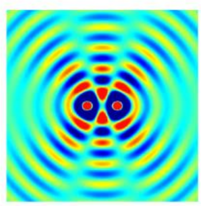
$$\Delta\varphi = k(r_1 - r_2) = k\,\frac{3\lambda}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{2} = 3\pi$$

Agregarle una longitud de onda entera.

Esto resultara en algún cambio o será todo lo mismo.

SUPONGAMOS QUE POR ALGUN MOTIVO LAS FUENTES HAN DE QUEDAR ALINEADAS EN EL EJE X, EXISTE ALGUNA OTRA SOLUCION?





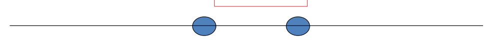
$$\boxed{sen(\theta) = m\,\frac{\lambda}{d}}$$

A medida que d aumenta, esta ecuación tiene mas soluciones enteras (recordar que el seno vale como mucho uno) y por ende mas máximos.

SUPONGAMOS QUE POR ALGUN MOTIVO LAS FUENTES HAN DE QUEDAR ALINEADAS EN EL EJE X, Y QUEREMOS TRANSMITIR EN LA DIRECCION ESTE-OESTE. SE PUEDE?

$$\boxed{d = \lambda / 2}$$

$$\boxed{\Delta\varepsilon = \pi}$$



Para cualquier punto en este eje, la diferencia de fase resulta:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda} + \Delta\varepsilon = \frac{\lambda}{2}\frac{2\pi}{\lambda} + \pi = 2\pi\text{=0}$$

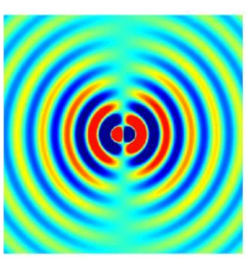
Primer problema. Como hacer que en la dirección norte, en el centro de los dos emisores, donde el camino es necesariamente el mismo, la senal sea nula?

…**desfasando las fuentes en medico ciclo**. Primer mitad resuelta!

Como hacer que sobre el eje x haya un maximo de transmision?

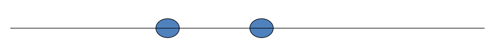
La diferencia de camino en el eje x ha de completar el otro medio ciclo, por ende **d=lambda/2**

SUPONGAMOS QUE POR ALGUN MOTIVO LAS FUENTES HAN DE QUEDAR ALINEADAS EN EL EJE X, EXISTE ALGUNA OTRA SOLUCION?



ULTIMO PROBLEMA… UN POCO MAS DIFICIL. COMO HACER PARA TRANSMITIR AL ESTE, PERO NO AL OESTE. O VICEVERSA.

$$\boxed{d = \lambda / 4} \qquad \Delta\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$$



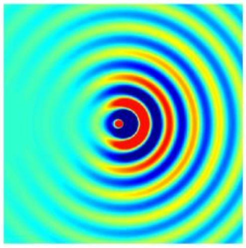
$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{\lambda} + \Delta\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{\lambda} + \Delta\varepsilon = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

Primer hecho, las fases han de ser distintas. Sino, para que no transmita a la izquierda no queda otra que hacer que la diferencia de camino sea media longitud de onda.

Interferencia destructiva corresponde a un desfasaje de pi, y constructiva de dos pi (o cero pi) la solucion, que el desfasaje este en el medio….

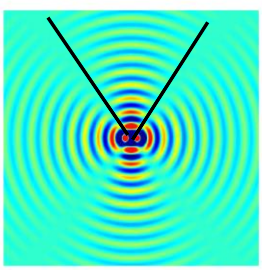
PROBLEMA… UN POCO MAS DIFICIL. COMO HACER PARA TRANSMITIR AL ESTE,



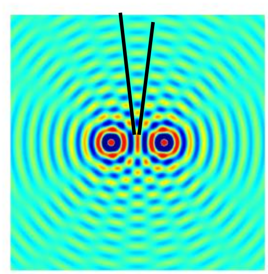
Interferencia aplicada:

AHORA QUE SABEMOS DIRECCIONAR LA LUZ (O LA RADIO) COMO DIRIGIR ESE HAZ EN UNA BANDA ANGOSTA?

VOLVAMOS AL PROBLEMA ORIGINAL. LA ANTENA QUE EMITE AL NORTE. COMO PODEMOS CONTROLAR EL ANCHO DEL MAXIMO?

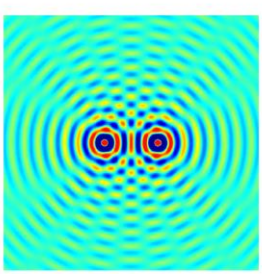


VOLVAMOS AL PROBLEMA ORIGINAL. LA ANTENA QUE EMITE AL NORTE. COMO PODEMOS CONTROLAR EL ANCHO DEL MAXIMO?



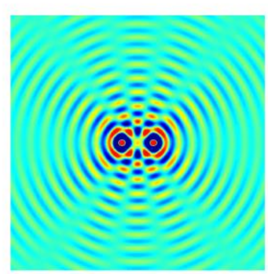
Resolvimos un problema para agregar otro. El máximo es mas angosto, pero hay (como hubiésemos podido predecir), mas máximos…
Como resolverlo?

VOLVAMOS AL PROBLEMA ORIGINAL. LA ANTENA QUE EMITE AL NORTE. COMO PODEMOS CONTROLAR EL ANCHO DEL MAXIMO?



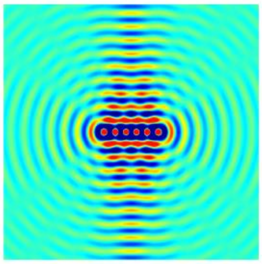
Resolvimos un problema para agregar otro. El máximo es mas angosto, pero hay (como hubiésemos podido predecir), mas máximos…
Como resolverlo?

VOLVAMOS AL PROBLEMA ORIGINAL. LA ANTENA QUE EMITE AL NORTE. COMO PODEMOS CONTROLAR EL ANCHO DEL MAXIMO?



Resolvimos un problema para agregar otro. El máximo es mas angosto, pero hay (como hubiésemos podido predecir), mas máximos…
Como resolverlo?

VOLVAMOS AL PROBLEMA ORIGINAL. LA ANTENA QUE EMITE AL NORTE. COMO PODEMOS CONTROLAR EL ANCHO DEL MAXIMO?

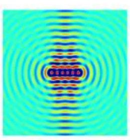


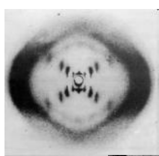
Dos hechos que merecen una pausa:
1) En que difiere esta solución de las anteriores.
2) Además de para emitir como una quiere, lo que constituye un problema no menor. Para que sirve saber todo esto?

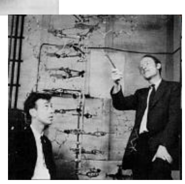
Interferencia aplicada:

AHORA QUE SABEMOS COMO SE SUMA LA LUZ, PODEMOS CALCULAR LOS SUMANDOS (LAS MOLECULAS QUE CONFORMAN UNA MUESTRA) A PARTIR DEL PATRON DE INTERFERENCIA?

El problema inverso y el problema directo. Como siempre. Si uno sabe como emite algo en función de su forma, viendo un espectro de emisión se puede conocer la forma de algo desconocido. Muy resumidamente, ahí vamos…

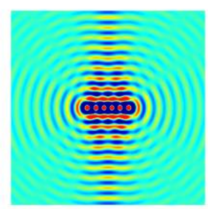


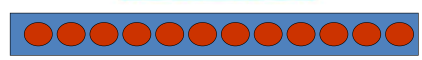




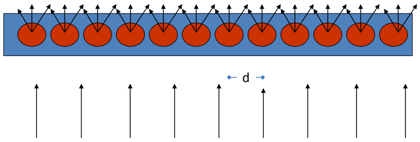
Calcular el campo de varias fuentes, equiespaciadas a quien sabe que distancia, con algún ángulo y fase relativa y bla bla bla.es un asunto olvidable, pero, visto al revés, de que se trata?

Interferencia aplicada:
Difracción, o la suma de muchas fuentes.
La versión mas sencilla (a modo de ejemplo y ablande para el que le verse) de una de las formas mas efectivas de entender la estructura de aquello que ocupa porciones mas pequeñas que la luz.

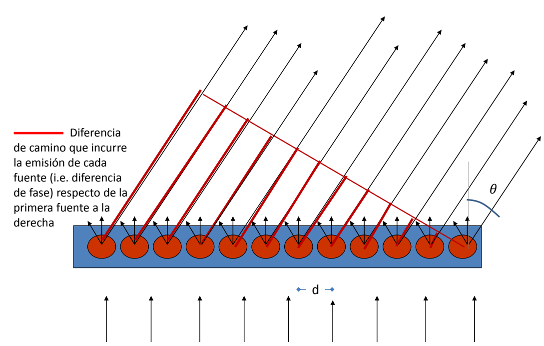




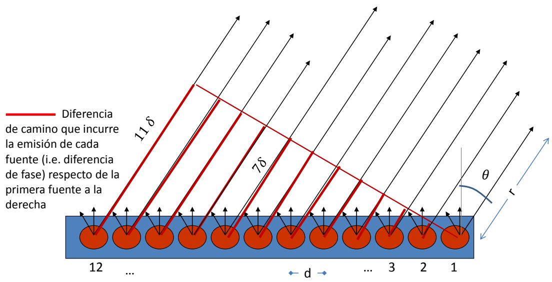
- Supongamos una onda plana incidente perpendicular al arreglo de **fuentes**.
- Las fuentes pueden ser, en nuestro ejemplo:
  - Agujeritos equiespaciados sobre una pantalla opaca
  - Reemisores atómicos equiespaciados linealmente



Esto hace que la fase inicial de las fuentes sea identica…nocierto?



Nos va a interesar analizar el patron generado **muy lejos** de las fuentes…
Por ejemplo, aquel que se forma en el infinito (condición de difracción de **Franhauffer**).
En otras palabras quiero caracterizar la **emisión en una dirección dada**.



Para la fuente i-esima, el desfasaje respecto a la primera resulta:

$$k(r_i - r_1) = k(i * d)\sin\theta = i * \underbrace{k\ d\ \sin\theta}_{\delta} = i * \delta$$

El campo resultante en direccion θ:

$$R = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt +$$

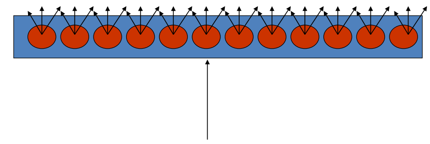
con $\delta = k\ d\ \sin\theta$

Es un problema de interferencia de muchas fuentes, para calcular la intensidad en algún punto hay que resolver como sumar este tipo de cosas…

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

Hay que calcular el campo resultante como función del desfasaje entre fuentes δ

Y luego, calcular el desfasaje en función de la geometría del problema
$\delta(\theta) = k\ d\ \sin\theta$



Es un problema de interferencia de muchas fuentes, para calcular la intensidad en algún punto hay que resolver como sumar este tipo de cosas…

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

Como sumar esto?
1) Abrir todos los cosenos, anular mil términos y enfermarse.
2) Pasarlo a números complejos, donde los cosenos se vuelven exponenciales y la suma se resuelve muy fácil … si uno sabe complejos.
3) **Geométricamente.**

Veamos como sumar las dos primeras

$$R_2(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$
$$= A\ \cos(\alpha_1) + A\ \cos(\alpha_2)$$

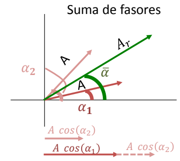
Analiticamente…(slide siguiente)

$$R_2(\delta) = \underbrace{2A\,cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}_{A_r}\ \cos(\bar{\alpha})$$

con $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}$
$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

Amplitud A_r de la suma de fasores

Suma de fasores



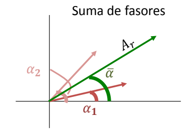
La matematica del slide anterior*

$$R = A\ cos(\alpha_1) + A\ cos(\alpha_2)$$

definimos

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \qquad \alpha_1 = \bar{\alpha} - \frac{\Delta\alpha}{2}$$
$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad \alpha_2 = \bar{\alpha} + \frac{\Delta\alpha}{2}$$

Suma de fasores



$$R = A\ cos\left(\bar{\alpha} - \frac{\Delta\alpha}{2}\right) + A\ cos\left(\bar{\alpha} + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)$$

$$= A\ cos\,\bar{\alpha}\cos\frac{\Delta\alpha}{2} + A\sin\bar{\alpha}\sin\frac{\Delta\alpha}{2} + A\ cos\,\bar{\alpha}\cos\frac{\Delta\alpha}{2} - A\sin\bar{\alpha}\sin\frac{\Delta\alpha}{2}$$

$$R = 2A\ \cos\frac{\Delta\alpha}{2}\,cos\,\bar{\alpha}$$

Entonces ya sabemos sumar contribuciones desfasadas geometricamente

$$R_2(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$
$$= A\ \cos(\alpha_1) + A\ \cos(\alpha_2)$$

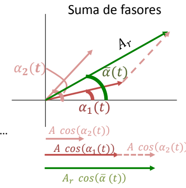
$$R_2(\delta) = 2A\,cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)\ \ \cos(\bar{\alpha})$$

con $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}$
$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

$2A\,cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$

Esta parte depende del tiempo…
$\cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon + \delta/2)$

Suma de fasores



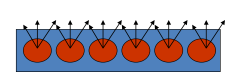
$$A_r = 2A\,cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 2A\cos\frac{\delta}{2}$$

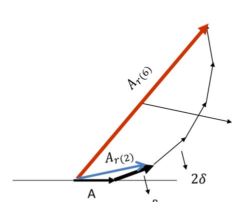
La amplitud resultante depende de la diferencia de fases

Para seguir sumando fuentes seguimos geometricamente…..

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

N=6



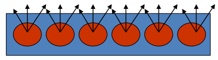


El vector resultante de sumar la suma de arriba, con seis términos. Esta resultante es una función geométrica no trivial de:
- el desfasaje δ,
- el numero de términos (resulta en una suerte de espiral)
- y es, sencillamente multiplicativa por la amplitud (si todas son iguales.)

$A_{r(6)}$ = expresion analitica?

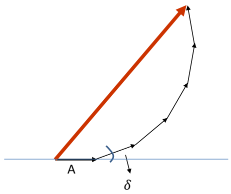
$$R(\delta) = A\,\cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

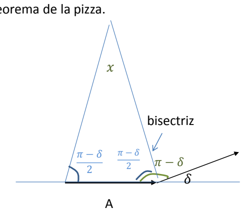
N=6



Ya encontramos graficamente Ar... habra una manera de obtener una expresion analitica?

El teorema de la pizza.



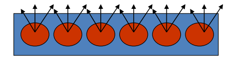


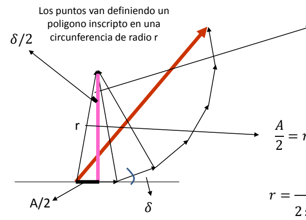
Como en todo triangulo: la suma de sus angulos debe ser π

$$\frac{\pi-\delta}{2} + \frac{\pi-\delta}{2} + x = \pi \longrightarrow x = \delta$$

$$R(\delta) = A\,\cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

N=6





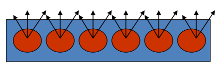
δ Por el teorema de la pizza.

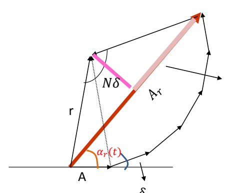
$$\frac{A}{2} = r\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$r = \frac{A}{2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$R(\delta) = A\,\cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

N=6





$$\frac{A_R}{2} = r\,\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

$$r = \frac{A}{2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Amplitud de la onda resultante

$$A_R(\delta) = A\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

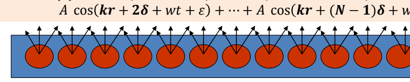
$E_R = A_R\cos(\alpha_r(t))$

$I_R = {A_R}^2\langle\cos^2(\alpha_r(t))\rangle$

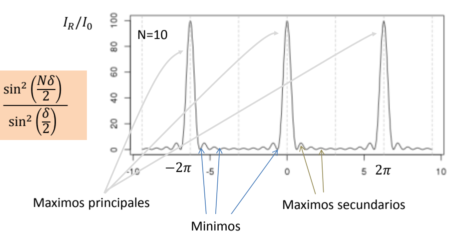
Irradiancia resultante en funcion del desfasaje entre fuentes δ

$$I_R(\delta) = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

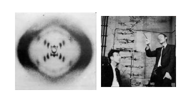
$$R(\delta) = A\,\cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



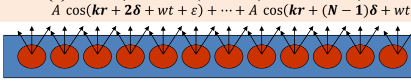
$$I_R(\delta) = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



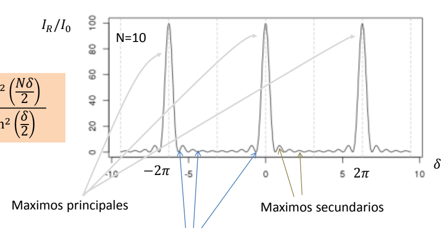
El patron de maximos y minimos tiene mucha estructura relacionada con la geometria de las fuentes. En esto se basan las aplicaciones derivadas de solucionar el **problema inverso** que mencionabamos antes



$$R(\delta) = A\,\cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

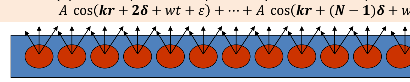


$$I_R(\delta) = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

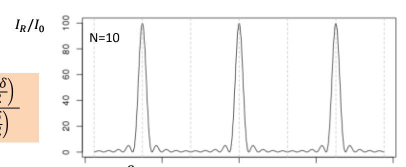


Animemonos!

$$R(\delta) = A\,\cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\,\cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



$$I_R(\delta) = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



Maximos principales se producen cuando se anula el denominador (y por tanto tambien el numerador):

$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{N\delta}{2} = m\pi \rightarrow \delta = m\frac{2\pi}{N}$$

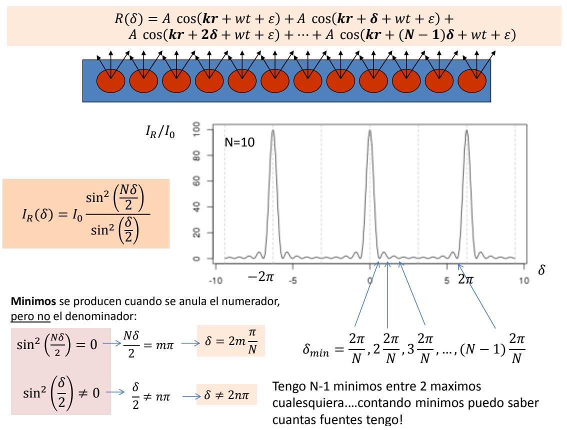
$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{\delta}{2} = n\pi \rightarrow \delta = 2n\pi$$

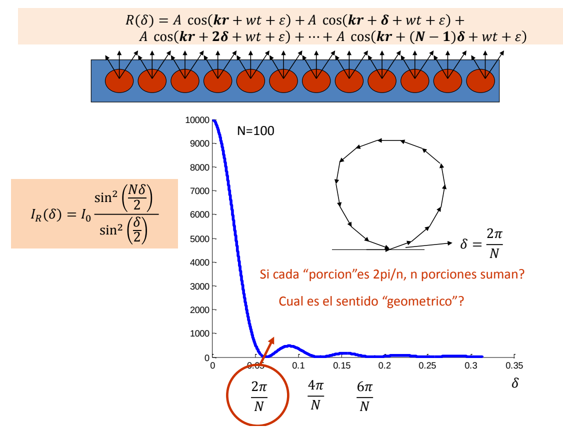
(si se cumple esto, se cumple lo de arriba: m=2*n*N)

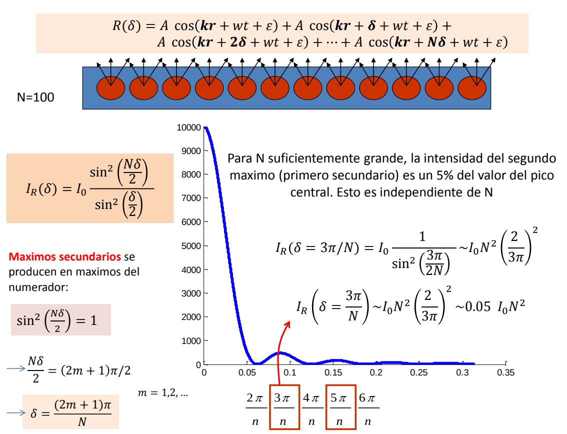
Vemos cuanto valen los max: Si $\delta \rightarrow 0$

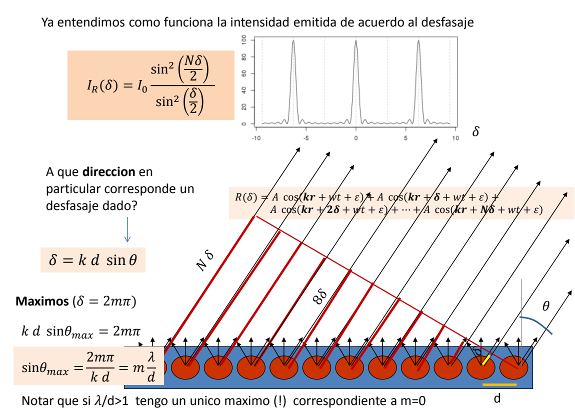
$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{N\delta}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

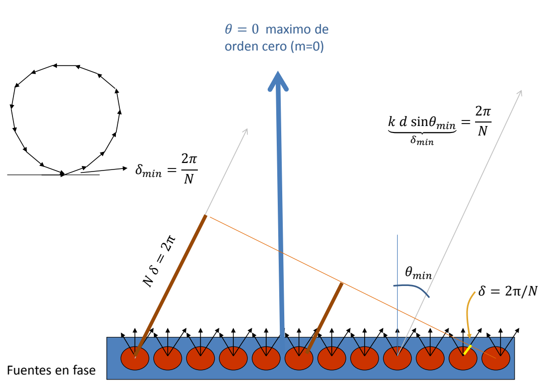
$$I_R(\delta) = I_0\frac{\left(\frac{N\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \qquad I_R(\delta = 0) = I_0 N^2$$

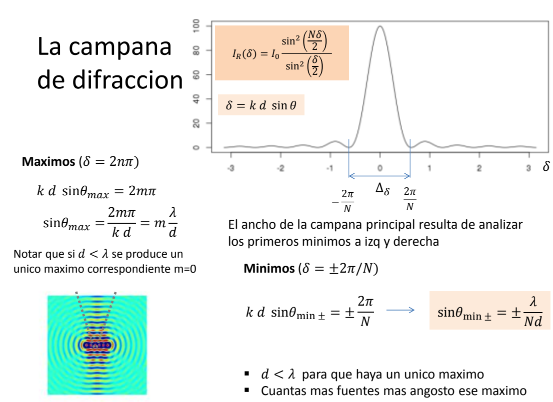

$R(\delta) = A\cos(\mathbf{kr}+wt+\varepsilon) + A\cos(\mathbf{kr}+\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon) + A\cos(\mathbf{kr}+2\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon)+\cdots+A\cos(\mathbf{kr}+(\mathbf{N}-\mathbf{1})\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon)$
I_R/I_0
N=10
$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$
-2π
2π
δ
Minimos se producen cuando se anula el numerador, pero no el denominador:
$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)=0 \rightarrow \frac{N\delta}{2}=m\pi \rightarrow \delta = 2m\frac{\pi}{N}$
$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\neq 0 \rightarrow \frac{\delta}{2}\neq n\pi \rightarrow \delta \neq 2n\pi$
$\delta_{min} = \frac{2\pi}{N}, 2\frac{2\pi}{N}, 3\frac{2\pi}{N}, \ldots, (N-1)\frac{2\pi}{N}$
Tengo N-1 minimos entre 2 maximos cualesquiera....contando minimos puedo saber cuantas fuentes tengo!

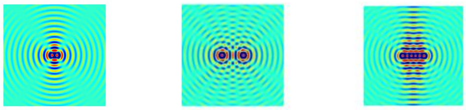

$R(\delta) = A\cos(\mathbf{kr}+wt+\varepsilon) + A\cos(\mathbf{kr}+\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon) + A\cos(\mathbf{kr}+2\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon)+\cdots+A\cos(\mathbf{kr}+(\mathbf{N}-\mathbf{1})\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon)$
N=100
$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$
$\delta = \frac{2\pi}{N}$
Si cada "porcion"es 2pi/n, n porciones suman?
Cual es el sentido "geometrico"?
$\frac{2\pi}{N}$ $\frac{4\pi}{N}$ $\frac{6\pi}{N}$
δ


$R(\delta) = A\cos(\mathbf{kr}+wt+\varepsilon) + A\cos(\mathbf{kr}+\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon) + A\cos(\mathbf{kr}+2\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon)+\cdots+A\cos(\mathbf{kr}+\mathbf{N}\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon)$
N=100
$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$
Para N suficientemente grande, la intensidad del segundo maximo (primero secundario) es un 5% del valor del pico central. Esto es independiente de N
$I_R(\delta = 3\pi/N) = I_0 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2N}\right)} \sim I_0 N^2 \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2$
$I_R\left(\delta = \frac{3\pi}{N}\right) \sim I_0 N^2 \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 \sim 0.05\ I_0 N^2$
Maximos secundarios se producen en maximos del numerador:
$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 1$
$\rightarrow \frac{N\delta}{2} = (2m+1)\pi/2$
$\rightarrow \delta = \frac{(2m+1)\pi}{N}$
$m = 1,2,\ldots$
$\frac{2\pi}{n}$ $\frac{3\pi}{n}$ $\frac{4\pi}{n}$ $\frac{5\pi}{n}$ $\frac{6\pi}{n}$


Ya entendimos como funciona la intensidad emitida de acuerdo al desfasaje
$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$
δ
A que **direccion** en particular corresponde un desfasaje dado?
$\delta = k\ d\ \sin\theta$
$R(\delta) = A\cos(\mathbf{kr}+wt+\varepsilon) + A\cos(\mathbf{kr}+\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon) + A\cos(\mathbf{kr}+2\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon)+\cdots+A\cos(\mathbf{kr}+\mathbf{N}\boldsymbol{\delta}+wt+\varepsilon)$
$N\ \delta$
8δ
θ
Maximos ($\delta = 2m\pi$)
$k\ d\ \sin\theta_{max} = 2m\pi$
$\sin\theta_{max} = \frac{2m\pi}{k\ d} = m\frac{\lambda}{d}$
d
Notar que si $\lambda/d>1$ tengo un unico maximo (!) correspondiente a m=0


$\theta = 0$ maximo de orden cero (m=0)
$\delta_{min} = \frac{2\pi}{N}$
$\underbrace{k\ d\ \sin\theta_{min}}_{\delta_{min}} = \frac{2\pi}{N}$
$N\ \delta = 2\pi$
θ_{min}
$\delta = 2\pi/N$
Fuentes en fase


La campana de difraccion
$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$
$\delta = k\ d\ \sin\theta$
δ
$-\frac{2\pi}{N}$ Δ_δ $\frac{2\pi}{N}$
Maximos ($\delta = 2n\pi$)
$k\ d\ \sin\theta_{max} = 2m\pi$
$\sin\theta_{max} = \frac{2m\pi}{k\ d} = m\frac{\lambda}{d}$
Notar que si $d < \lambda$ se produce un unico maximo correspondiente m=0
El ancho de la campana principal resulta de analizar los primeros minimos a izq y derecha
Minimos ($\delta = \pm 2\pi/N$)
$k\ d\ \sin\theta_{min\,\pm} = \pm\frac{2\pi}{N} \rightarrow \sin\theta_{min\,\pm} = \pm\frac{\lambda}{Nd}$
▪ $d < \lambda$ para que haya un unico maximo
▪ Cuantas mas fuentes mas angosto ese maximo



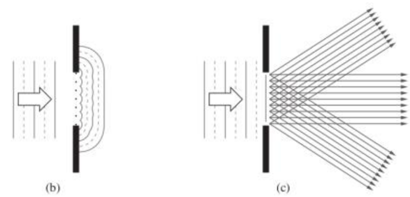
$$sen(\theta) = \frac{\lambda}{d} \qquad sen(\theta) = \frac{\lambda}{D} \qquad sen(\theta) = \frac{\lambda}{nd} = \frac{\lambda}{D}$$

Lo mejor de los dos mundos … un máximo central angosto sin máximos laterales.

Nuevamente una estrategia de borrado constructiva.
Para eliminar los máximos laterales, agregar mas fuentes.

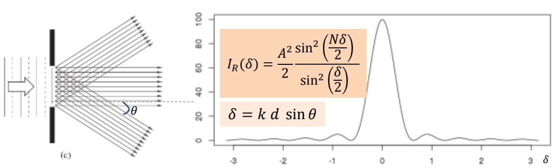
En términos del problema inverso, de adivinar la fuente que emite (o la textura del material que difracta la luz) a partir del espectro. Hay algún problema?

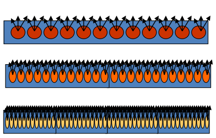
La rendija



En una rendija de ancho D sobre la que incide luz
Cuantas fuentes hay?

La rendija





Tengo muchisisimas fuentes (Huygens) — $\lim N \to \infty$

Infinitamente cerca unas de otras — $\lim d \to 0$

Cada una emite una amplitud diferencial — $\lim A \to 0$

$N * d = cte = D$

$N * A = cte$

Tomando limites para entender la rendija

(no prigunto cuantos son…sino que vayan saliendo)

$$I_R(\delta) = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

Tengo muchisisimas fuentes (Huygens) — $\lim N \to \infty$

Infinitamente cerca unas de otras — $\lim d \to 0$

Cada una emite una amplitud diferencial — $\lim A \to 0$

$N * d = cte = D$

$N * A = cte$

$$I_{Rendija}(\delta) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ d\to 0 \\ A\to 0 \\ Nd=D \\ NA=cte}} \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{Nk\ d\ \sin\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\ d\ \sin\theta}{2}\right)} = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\ d\ \sin\theta}{2}\right)}$$

$$\underset{\substack{\sin\alpha\sim\alpha \\ \alpha\to 0}}{\sim} \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\ d\ \sin\theta}{2}\right)^2} = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\ Nd\ \sin\theta}{2N}\right)^2} = \frac{(AN)^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)^2}$$

Tomando limites para entender la rendija

$$I_R(\delta) = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

Tengo muchisisimas fuentes (Huygens) — $\lim N \to \infty$

Infinitamente cerca unas de otras — $\lim d \to 0$

Cada una emite una amplitud diferencial — $\lim A \to 0$

$N * d = cte = D$

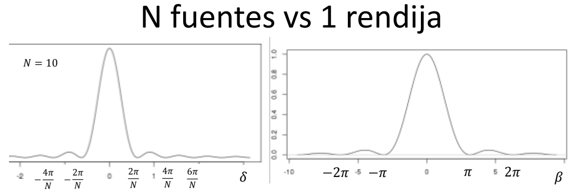
$N * A = cte = \mathcal{A}$

$$I_{Rendija} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ d\to 0 \\ A\to 0 \\ Nd=D \\ NA=cte}} \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)^2} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{k\ D\ \sin\theta}{2}$$

$$I_{Rendija} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

N fuentes vs 1 rendija



$$I_R(\delta) = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

$\lim N \to \infty$
$\lim d \to 0$
$\lim A \to 0$

$$I_{Rendija} = \frac{(AN)^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{k\ D\ \sin\theta}{2}$$

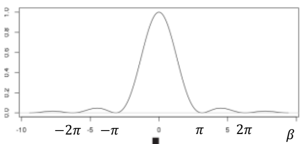
Ancho campana (minimos $\delta = \pm 2\pi/N$)

$$k\ d\ \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{2\pi}{N} \qquad \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{\lambda}{Nd}$$

(minimos $\beta = \pm\pi$)

$$\frac{\pi\ D\ \sin\theta_{min}}{\lambda} = \pm\pi \qquad \sin\theta_{min} = \pm\frac{\lambda}{D}$$

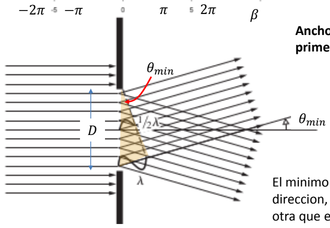
Entendamos los minimos de la rendija



$$I_{Rendija} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\mathrm{sinc}^2\,\beta$$

con $\beta = \frac{k\,D\,\sin\theta}{2}$

manera ñoña de escribir $\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$



Ancho de la campana de difraccion: primeros minimos a izq y derecha

$$\beta = \pm\pi$$

$$\frac{\pi\,D\,\sin\theta_{min}}{\lambda} = \pm\pi$$

$$D\sin\theta_{min} = \pm\lambda$$

El minimo se produce porque en esta direccion, por cada fuente secundaria hay otra que emite a contrafase

Lo que acabamos de resolver es esto

$$I_{Rendija} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\mathrm{sinc}^2\,\beta$$

con $\beta = \frac{k\,D\,\sin\theta}{2}$