Física II (ByG) - Eficiencia de Máquinas Térmicas - por Alvaro Caso

Resumen. Es posible demostrar que si uno tiene N fuentes térmicas a disposición y tiene que armarse una máquina térmica que realice un trabajo $W > 0$, lo mejor que uno puede hacer es elegir las fuentes de mayor y de menor temperaturas (descartando todas las demás) y realizar un ciclo reversible (que tiene la eficiencia de un ciclo de Carnot). Es decir que cualquier máquina térmica, sin importar el número de fuentes a las que se encuentre conectada, tiene su eficiencia acotada por la eficiencia de una máquina de Carnot funcionando entre las temperaturas extremas. El teorema vale tanto para máquinas reversibles como irreversibles.

Como corolario del teorema se desprende que la eficiencia de cualquier máquina reversible que intercambie calor con por lo menos 3 fuentes es estrictamente menor que la eficiencia de un ciclo de Carnot funcionando entre las temperaturas extremas. Esto es lo que sucedía en el punto 3.b) del segundo parcial y también en el ejercicio 22.b) de la guía 8.

Teorema. *Sea M una máquina térmica que realiza un trabajo $W > 0$ y se encuentra conectada a N fuentes térmicas ($N \geq 3$) con temperaturas $\{T_k\colon 1 \leq k \leq N\}$ tales que $T_k \geq T_m$ si $k > m$. Y sean $\{Q_k \neq 0 : 1 \leq k \leq N\}$ los respectivos calores que M intercambia con las N fuentes. Entonces la eficiencia de la máquina M es estrictamente menor que la eficiencia de una máquina de Carnot operando entre T_1 y T_N.*

Demostración. Definimos los siguientes conjuntos de índices

$$I = \{l : Q_l > 0\}\,, \tag{1}$$
$$J = \{k : Q_k < 0\}\,, \tag{2}$$

donde I agrupa los índices de todas las fuentes de las que M absorbe calor y J agrupa los índices de todas las fuentes a las que M entrega calor.

Sea entonces $i \in I$ tal que $i \geq l$ para todo $l \in I$, es decir que i corresponde a la fuente más caliente de la cual la M absorbe calor. Análogamente, sea $j \in J$ tal que $j \leq k$ para todo $k \in J$, es decir que j corresponde a la fuente más fría a la cual M entrega calor.

Definimos entonces los siguientes conjuntos de índices auxiliares

$$\hat{I} = \{l \neq i : Q_l > 0\} = I - \{i\} \tag{3}$$
$$\hat{J} = \{k \neq j : Q_k < 0\} = J - \{j\}\,. \tag{4}$$

Cabe destacar que cualquiera de estos dos nuevos conjuntos de índices podría ser vacío. Si, por ejemplo, M absorbe calor de una única fuente, esa sería la fuente i-ésima y en consecuencia $\hat{I}$ sería un conjunto vacío. En el caso de que M entregue calor a una única fuente, esa sería la fuente j-ésima y en consecuencia $\hat{J}$ sería un conjunto vacío. Lo que no puede suceder es que ambos conjuntos sean vacíos, pues hay por lo menos 3 fuentes, es decir que o absorbe calor de por lo menos 2 fuentes o entrega calor a por lo menos 2, con lo cual al menos uno de los conjuntos tiene por lo menos un elemento.

Por el primer principio de la termodinámica,

$$W = \sum_{l=1}^{N} Q_l = \sum_{l \in I} Q_l + \sum_{k \in J} Q_k. \tag{5}$$

Separando el término j-ésimo obtenemos

$$W = \sum_{l \in I} Q_l + Q_j + \sum_{k \in \hat{J}} Q_k, \tag{6}$$

y despejando Q_j,

$$Q_j = W - \sum_{l \in I} Q_l - \sum_{k \in \hat{J}} Q_k. \tag{7}$$

Por el teorema de Clausius sabemos que

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k}{T_k} \leq 0, \tag{8}$$

donde la igualdad vale sólo para máquinas reversibles.

Separando el término j-ésimo y multiplicando por T_j obtenemos

$$\sum_{l\in I}\frac{Q_l}{\tilde{T}_l}+Q_j+\sum_{k\in\hat{J}}\frac{Q_k}{\tilde{T}_k}\leq 0, \tag{9}$$

donde, para una dada temperatura T, se definió

$$\tilde{T}=\frac{T}{T_j}. \tag{10}$$

Reemplazando (7) en (9),

$$\sum_{l\in I}\frac{Q_l}{\tilde{T}_l}+\left(W-\sum_{l\in I}Q_l-\sum_{k\in\hat{J}}Q_k\right)+\sum_{k\in\hat{J}}\frac{Q_k}{\tilde{T}_k}\leq 0, \tag{11}$$

y despejando W y separando el i-ésimo término,

$$W\leq Q_i\left(1-\frac{1}{\tilde{T}_i}\right)+\sum_{l\in\hat{I}}Q_l\left(1-\frac{1}{\tilde{T}_l}\right)+\sum_{k\in\hat{J}}Q_k\left(1-\frac{1}{\tilde{T}_k}\right). \tag{12}$$

Como se menciona en el enunciado del teorema $T_k\geq T_m$ si $k>m$ porque M podría absorber calor de una fuente en determinada etapa y entregar calor a esa misma fuente en otra etapa. En ese caso $T_k=T_{k+1}$ con $Q_k<0$ y $Q_{k+1}>0$. Podría ser también que en varias etapas distintas se conecte a la misma fuente entregando calor. En ese caso todos los calores entregados se combinan en un único Q_k, porque lo único que importa es distinguir entre calor entregado y calor absorbido y no el calor particular de cada etapa. Por lo tanto, dentro de cada conjunto de índices, vale la desigualdad estricta (porque no distinguimos por etapas sino por fuentes).

En este momento debemos considerar la posibilidad de que alguno de los conjuntos $\hat{I}$ o $\hat{J}$ sea vacío. Si $\hat{J}$ es vacío, se desprende de (12) que

$$W\leq Q_i\left(1-\frac{1}{\tilde{T}_i}\right)+\sum_{l\in\hat{I}}Q_l\left(1-\frac{1}{\tilde{T}_l}\right). \tag{13}$$

Como $T_l<T_i$ para todo $l\in\hat{I}$,

$$T_l<T_i\Rightarrow -T_l>-T_i\Rightarrow -\frac{1}{T_l}<-\frac{1}{T_i}\Rightarrow -\frac{T_j}{T_l}<-\frac{T_j}{T_i}\Leftrightarrow -\frac{1}{\tilde{T}_l}<-\frac{1}{\tilde{T}_i}\Rightarrow 1-\frac{1}{\tilde{T}_l}<1-\frac{1}{\tilde{T}_i}. \tag{14}$$

En este paso es que se introduce la desigualdad estricta tanto para máquinas reversibles como irreversibles. W queda entonces

$$W<Q_i\left(1-\frac{1}{\tilde{T}_i}\right)+\sum_{l\in\hat{I}}Q_l\left(1-\frac{1}{\tilde{T}_i}\right)=\left(\sum_{l\in I}Q_l\right)\left(1-\frac{1}{\tilde{T}_i}\right). \tag{15}$$

Considerando que la suma de todos los calores positivos es el calor total absorbido, es decir

$$Q_{abs}=\sum_{l\in I}Q_l, \tag{16}$$

entonces (15) se puede escribir como

$$W<Q_{abs}\left(1-\frac{1}{\tilde{T}_i}\right). \tag{17}$$

La eficiencia de M es

$$\eta=\frac{W}{Q_{abs}}. \tag{18}$$

De (17) se desprende que

$$\eta < 1 - \frac{1}{\tilde{T}_i} = 1 - \frac{T_j}{T_i}, \tag{19}$$

de donde se desprende que $T_i > T_j$ porque el cociente entre W y Q_{abs} tiene que ser positivo porque ambas cantidades son positivas.

Como $T_i \leq T_N$ y $T_j \geq T_1$ entonces,

$$\frac{T_j}{T_i} \geq \frac{T_1}{T_N} \Rightarrow -\frac{T_j}{T_i} \leq -\frac{T_1}{T_N} \Rightarrow 1 - \frac{T_j}{T_i} \leq 1 - \frac{T_1}{T_N} \tag{20}$$

Por lo tanto,

$$\eta < 1 - \frac{T_1}{T_N}. \tag{21}$$

Es decir que, en este caso, la eficiencia de la máquina M es estrictamente menor que la eficiencia de una máquina de Carnot operando entre las temperaturas T_1 y T_N, que corresponden a la fuente más fría y la más caliente respectivamente.

Ahora consideremos el caso en que $\hat{I}$ es vacío. En este caso se desprende de (12) que

$$W \leq Q_i \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_i}\right) + \sum_{k \in \hat{J}} Q_k \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_k}\right). \tag{22}$$

Como $T_k > T_j$ para todo $k \in \hat{J}$ entonces

$$T_k > T_j \Rightarrow -T_k < -T_j \Rightarrow -\frac{1}{T_k} > -\frac{1}{T_j} \Rightarrow -\frac{T_j}{T_k} > -\frac{T_j}{T_j} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\tilde{T}_k} > 1 - \frac{1}{\tilde{T}_j} = 0, \tag{23}$$

donde la última igualdad se desprende del hecho de que, por definición, $\tilde{T}_j = 1$.

Utilizando además que $Q_k = -|Q_k|$ para todo $k \in \hat{J}$, entonces podemos escribir (22) como

$$W \leq Q_{abs} \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_i}\right) - \sum_{k \in \hat{J}} |Q_k| \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_k}\right). \tag{24}$$

Todos los términos de la segunda sumatoria son positivos en virtud de (23) y, por lo tanto, la segunda sumatoria es positiva. Entonces en este paso se introduce la desigualdad estricta tanto para máquinas reversibles como irreversibles, resultando

$$W \leq Q_{abs} \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_i}\right) - \sum_{k \in \hat{J}} |Q_k| \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_k}\right) < Q_{abs} \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_i}\right). \tag{25}$$

De la fórmula de la eficiencia (18), de (25) y de (20) se desprende que

$$\eta < 1 - \frac{1}{\tilde{T}_i} = 1 - \frac{T_j}{T_i} \leq 1 - \frac{T_1}{T_N} \tag{26}$$

Por lo tanto,

$$\eta < 1 - \frac{T_1}{T_N}. \tag{27}$$

Es decir que, en este caso, la eficiencia de M es también estrictamente menor que la eficiencia de una máquina de Carnot operando entre las temperaturas T_1 y T_N, que corresponden a la fuente más fría y la más caliente respectivamente.

Resta el caso en que tanto $\hat{I}$ como $\hat{J}$ sean no vacíos. En ese caso basta notar que

$$\sum_{l \in \hat{I}} Q_l \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_l}\right) < \left(\sum_{l \in \hat{I}} Q_l\right) \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_i}\right), \tag{28}$$

$$\sum_{k \in \hat{J}} |Q_k| \left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_k}\right) > 0, \tag{29}$$

y por lo tanto de (12) se desprende que

$$W < Q_{abs}\left(1 - \frac{1}{\tilde{T}_i}\right), \tag{30}$$

y en consecuencia

$$\eta < 1 - \frac{1}{\tilde{T}_i} = 1 - \frac{T_j}{T_i} \leq 1 - \frac{T_1}{T_N} \tag{31}$$

Por lo tanto,

$$\eta < 1 - \frac{T_1}{T_N}. \tag{32}$$

Entonces, para este último caso, también la eficiencia de M es estrictamente menor que la eficiencia de una máquina de Carnot operando entre las temperaturas T_1 y T_N, que corresponden a la fuente más fría y la más caliente respectivamente. Esto completa la demostración.

$\square$