

1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones seno y coseno tienen una clara definición geométrica si pensamos en un círculo de radio 1. En particular, la coordenada sobre el eje horizontal de un punto sobre dicho círculo es el coseno del ángulo que el vector posición del punto forma con el eje horizontal. La coordenada sobre el eje vertical es el seno del mismo ángulo. Ver figura.

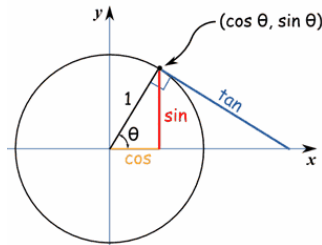


Figure 1: El círculo de radio 1 y el significado del seno y el coseno en este caso del ángulo θ .

A partir de la figura 1 se puede concluir que:

$$\begin{aligned}
 (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 &= 1, \\
 \sin(0) &= 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\
 \cos(0) &= 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

En la figura 2 se muestran gráficos de las funciones seno y coseno. Allí se puede ver que el seno es impar mientras que el coseno es par:

$$\sin(x) = -\sin(-x), \quad \cos(x) = \cos(-x). \tag{2}$$

La tangente de un ángulo es el cociente entre su seno y su coseno.

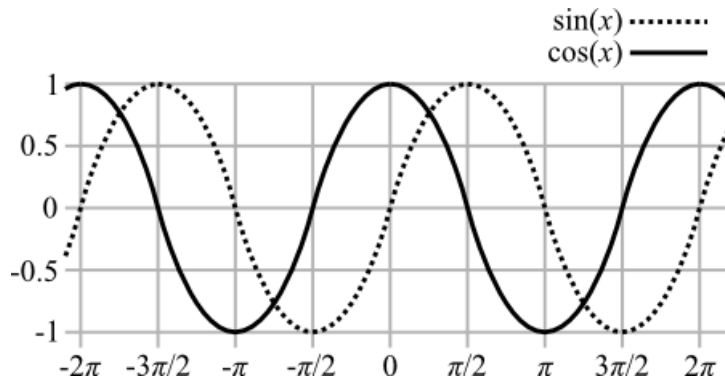


Figure 2: Las funciones $\sin(x)$ (en línea punteada) y $\cos(x)$ (en línea llena).

Las funciones trigonométricas satisfacen las siguientes propiedades:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta), \tag{3}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta), \tag{4}$$

a partir de las cuales se puede deducir que:

$$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(\alpha), \quad \sin(\alpha \pm \pi) = -\sin(\alpha), \quad (5)$$

$$\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(\alpha), \quad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos(\alpha), \quad (6)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha), \quad (7)$$

$$\cos(2\alpha) = (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2 = 2(\cos(\alpha))^2 - 1 = 1 - (\sin(\alpha))^2. \quad (8)$$

Las derivadas de las funciones seno y coseno son:

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x), \quad \frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x). \quad (9)$$

2 NÚMEROS COMPLEJOS

2.1 Definiciones básicas

Definimos la unidad imaginaria $i \equiv \sqrt{-1}$. Todos los números complejos se escriben de la forma:

$$z = a + ib, \quad (10)$$

donde a y b son números reales. Dado $z = a + ib$ con $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}$, se llaman parte real y parte imaginaria de z a las siguientes cantidades:

$$\operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b, \quad (11)$$

respectivamente. Es decir, las partes real e imaginaria de un número complejo son números reales. Vemos también que todos los reales son complejos con parte imaginaria nula. Dado un número complejo, $z = a + ib$, se define su complejo conjugado, z^* como

$$z^* \equiv a - ib. \quad (12)$$

Los números complejos pueden identificarse unívocamente en términos de sus partes real e imaginaria o de su módulo, $|z|$, y argumento, $\arg(z)$:

$$|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad (13)$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \quad (14)$$

donde \arctan denota el arco tangente. Esto es equivalente a decir:

$$a = |z| \cos(\varphi), \quad b = |z| \sin(\varphi), \quad (15)$$

$$z = |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)), \quad (16)$$

donde $\varphi = \arg(z)$. Los números complejos pueden representarse gráficamente en un plano, donde la coordenada horizontal de cada punto corresponde a la parte real del complejo y la coordenada vertical a la imaginaria. Si pensamos en el vector que une el origen de coordenadas con el punto del plano que representa al complejo, usar a y b para identificarlo es como usar coordenadas cartesianas para caracterizar

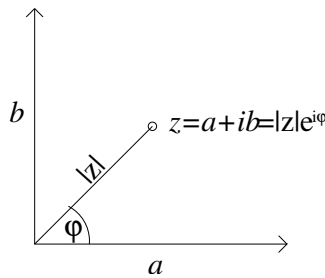


Figure 3: Asociación entre números complejos, z , y puntos del plano que ilustra las dos formas en que se los puede describir: en términos de sus partes real e imaginaria, a y b , o de su módulo y argumento, $|z|$ y φ . Explicamos más adelante qué significa $e^{i\varphi}$.

un vector. Usar $|z|$ y φ , por otro lado, sería equivalente a usar coordenadas polares (es decir, el módulo y el ángulo que forma con el eje horizontal el vector que va desde el origen de coordenadas hasta el punto del plano, ver figura).

La igualdad entre dos números complejos, $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, es equivalente a dos igualdades entre números reales:

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \quad \text{y} \quad b_1 = b_2, \quad \text{o equivalentemente} \quad |z_1| = |z_2| \quad \text{y} \quad \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2m\pi, \quad (17)$$

con m un número entero cualquiera.

2.2 Operaciones básicas con complejos

Las operaciones con números complejos se hacen del mismo modo que con los números reales, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. De este modo, se puede calcular:

$$-ii = -i^2 = 1, \quad i^3 = i^2i = -i, \quad i^4 = i^3i = 1, \quad (18)$$

de donde deducimos que, en general, i elevada a una potencia par, $2k$, o a una impar, $2k + 1$, resulta

$$i^{2k} = (-1)^k, \quad i^{2k+1} = (-1)^k i. \quad (19)$$

Podemos calcular también

$$z + z^* = a + ib + a - ib = 2a = 2\text{Re}(a), \quad (20)$$

$$z - z^* = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\text{Im}(b), \quad (21)$$

de donde vemos que sumando complejos podemos obtener números reales, y, finalmente,

$$z z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + iab - iba + b^2 = |z|^2. \quad (22)$$

Usando esto último podemos calcular $1/z$ como:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{z z^*} = \frac{z^*}{|z|^2}. \quad (23)$$

Entonces, si $z = a + ib$, resulta:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}. \quad (24)$$

Dados dos complejos cualesquiera, $z = a + ib$ y $w = c + id$, su producto resulta:

$$zw = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad), \quad (25)$$

de donde vemos que $\operatorname{Re}(zw) = ac - bd \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) = ac$. Estos son sólo algunos ejemplos de cálculos elementales con números complejos.

2.3 Funciones de números complejos

Así como se definen funciones sobre los números reales, también es posible definir funciones sobre los complejos. Dado que sabemos hacer una serie de operaciones con complejos (sumas, productos y potencias enteras) es fácil definir funciones que sólo involucran estas operaciones. Por ejemplo, $f(z) = z^2$ es la función que asigna a cada complejo, z , un número igual a su cuadrado. Algo similar ocurre con la función $f(z) = z^2 + z^4$.

Disgresión Opcional (*Permite entender de dónde sale la relación entre las funciones exponencial y senos y cosenos*).

Ahora bien, muchas funciones de los números reales pueden ser re-escritas en términos de una serie (es decir, una suma de infinitos términos) de potencias. Es la llamada expansión en serie de Taylor. En particular, dada una función definida sobre los reales, $f(x)$, la expansión en serie (alrededor del punto $x = a$) se calcula como:

$$f(x) = f(a) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} (x - a) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=a} (x - a)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=a} (x - a)^3 + \dots, \quad (26)$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n$ es el factorial de n y $\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=a}$ es la derivada n -ésima de f calculada en $x = a$. Para que este cálculo tenga sentido es necesario que la suma no diverja (a veces esto ocurre sólo para cierto rango de valores de x) y que las derivadas estén bien definidas. Supongamos que tenemos una función real para la cual esto se cumple. Entonces podemos usar su expansión en serie para definir la “versión compleja” de la función. Esto se hace, por ejemplo, con la exponencial. Consideremos la función $f(x) = e^x \equiv \exp(x)$ definida sobre los números reales. Como $\frac{d^n \exp(x)}{dx^n} = \exp(x)$ por lo que $\left. \frac{d^n \exp(x)}{dx^n} \right|_{x=0} = \exp(0) = 1$, la expansión en serie (alrededor de $x = a = 0$) de esta función es:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot x^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}. \quad (27)$$

Por otro lado, consideremos las expansiones del seno y el coseno alrededor de $x = 0$. Como $\frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)$, $\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x)$, $\sin(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$, resulta:

$$\cos(x) = 1 - 0 \cdot x - \frac{1}{2!} \cdot 1 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot 0 \cdot x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}, \quad (28)$$

$$\sin(x) = 0 + 1 \cdot x - \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot 1 \cdot x^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (29)$$

Usando estas expansiones podemos definir las funciones exponencial, seno y coseno de números complejos (reemplazando x por un número complejo en las expresiones (27)–(29)). En particular, si consideramos complejos de la forma $z = ix$ con $x \in \mathbf{R}$ (es decir, imaginarios puros) y tenemos en cuenta las igualdades de (19), la exponencial re-escrita como en (27) resulta:

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} i^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} i^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k \geq 0} i^{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned} \quad (30)$$

Para llegar a esta última igualdad agrupamos los términos de la serie de la exponencial con n par por un lado ($n = 2k$) y con n impar ($n = 2k + 1$) por el otro. Comparando la última expresión con los desarrollos del seno y el coseno de (28)–(29) llegamos a la igualdad (31) de la próxima sección.

2.4 Exponenciales complejas

A partir de la sección anterior deducimos que, dado un número real, x , resulta:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad (31)$$

donde i es la unidad imaginaria. Las operaciones con exponenciales complejas siguen las mismas reglas que con exponenciales reales (y que la exponenciación en general). Por ejemplo:

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}, \quad (e^{i\alpha})^\beta = e^{i\alpha\beta}, \quad e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}}. \quad (32)$$

Esto nos permite calcular e^z para un complejo, z , cualquiera. En particular, escribiendo a z como $z = a + ib$ con a y b reales llegamos a:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}. \quad (33)$$

En Física 2 no vamos a usar exponenciales de número complejos arbitrarios sino sólo de imaginarios puros (es decir, de complejos de la forma $z = ib$ con b real).

A partir de la ecuación (31) deducimos que, para x real, es:

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(x) + i \sin(-x) = \cos(x) - i \sin(x) = (e^{ix})^*, \quad (34)$$

$$\operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos(x), \quad \operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin(x), \quad |e^{ix}|^2 = (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1, \quad (35)$$

es decir, e^{ix} es un complejo de módulo 1 cuya parte real es $\cos(x)$ y su parte imaginaria es $\sin(x)$. Si pensamos en términos de la Fig. 3 vemos que un complejo de la forma e^{ix} está sobre el círculo de radio 1 centrado en el origen de la figura y forma un ángulo x con el eje horizontal. Teniendo en cuenta esto, las siguientes igualdades tienen una clara interpretación geométrica:

$$e^0 = \cos(0) = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i, \quad e^{i\pi} = \cos(\pi) = -1, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i. \quad (36)$$

A partir de las ecuaciones (31) y (34) se puede deducir que:

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad (37)$$

$$\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}. \quad (38)$$

Teniendo en cuenta la relación (16) y las definiciones del seno y el coseno en términos de exponenciales (37)–(38), podemos representar a cualquier complejo como:

$$z = |z|e^{i\arg(z)} = |z|e^{i\varphi}. \quad (39)$$

Esta forma de pensar a los números complejos permite calcular productos de complejos de un modo más sencillo que trabajando con sus partes real e imaginaria. Por ejemplo, si tomamos $z = |z|e^{i\varphi}$ y $w = |w|e^{i\gamma}$, su producto resulta $zw = |z||w|\exp(i\varphi)\exp(i\gamma) = |z||w|\exp(i(\varphi + \gamma)) = |z||w|(\cos(\varphi + \gamma) + i\sin(\varphi + \gamma))$. Las potencias enteras de complejos también resultan más fáciles de calcular: $z^\ell = |z|^\ell e^{i\ell\varphi}$. A su vez, es más fácil calcular la exponencial de una suma de argumentos que el seno o el coseno de una suma (ver ecuaciones (3)–(4) y (32)). Las integrales y derivadas de las exponenciales también son más sencillas que las de las funciones trigonométricas.

2.5 Algunos ejercicios.

- 1) Dibujar en el plano complejo los siguientes números: $2 + 3i$, $2 - 3i$, $4e^{i\pi/2}$, $2e^{-i\pi/4}$.
- 2) Calcular el módulo y el argumento de los siguientes números complejos: $z = \frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$, $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z = 1 - i\sqrt{3}$, $z = -1 - i\sqrt{3}$. Escribirlos de la forma $|z|e^{i\varphi}$ y representarlos en el plano complejo.
- 3) Sumar de a pares entre sí los tres últimos números del problema anterior. Calcular módulo y argumento del complejo resultante y escribirlo de la forma $|z|e^{i\varphi}$.
- 4) Multiplicar de a pares entre sí los tres últimos números del problema 2). Hacerlo escribiendo cada número de la forma $a + ib$ y después repetirlo escribiendo cada uno de la forma $|z|e^{i\varphi}$. Representar el resultado en el plano complejo.

3 Ondas armónicas, senos, cosenos y exponenciales.

Las ondas pueden pensarse como perturbaciones al estado de equilibrio de un sistema continuo (por ejemplo, un fluido, aunque en el caso de las ondas electromagnéticas el sistema puede ser el vacío). Estas perturbaciones pueden ser *escalares* (es decir, estar descritas por una única función, ψ de las coordenadas espaciales y el tiempo) o *vectoriales* (como en el caso de los campos eléctrico y magnético). A su vez las ondas pueden propagarse viajando en una única dirección espacial (caso unidimensional) o en varias a la vez (por ejemplo, las ondas esféricas que salen de una fuente puntual de luz o las circulares que se propagan sobre la superficie del agua al arrojar una piedra). En muchos casos la dinámica de estas perturbaciones está descrita por la ecuación de ondas clásica la que, en el caso escalar, se escribe como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \equiv v^2 \nabla^2 \psi, \quad (40)$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano que se reduce a $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ en el caso unidimensional. En el caso de perturbaciones vectoriales cada componente del vector satisface la ecuación (40). En la clase teórica derivamos esta ecuación para las oscilaciones transversales de una soga (próximamente agregaré la derivación a estas notas). Ahí vimos que v depende del medio en el que se propagan las ondas. En particular, en el caso de la soga, v^2 es igual al cociente entre la tensión y la densidad lineal de masa de la soga. En el caso de las ondas sonoras v es la velocidad del sonido en el medio y en el de las ondas electromagnéticas es la velocidad de la luz en el medio.

La ecuación de ondas clásica admite soluciones tipo onda viajera. Consideremos por simplicidad el caso unidimensional:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (41)$$

Las soluciones de esta ecuación tipo onda viajera son de la forma $\psi(x, t) = f(x - vt)$, que viajan a la derecha con velocidad v , o de la forma $\psi(x, t) = f(x + vt)$, que viajan hacia la izquierda (es decir, con $-v$). Entre las soluciones tipo onda viajera destacamos las *ondas armónicas* ya que las soluciones de la ecuación (40) pueden escribirse como superposición de ondas armónicas. En el caso unidimensional, las ondas armónicas que viajan a la derecha o a la izquierda son, respectivamente, de la forma:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(kx - \omega t + \varphi), \quad \psi(x, t) = \psi_0 \cos(kx + \omega t + \varphi), \quad (42)$$

donde φ es una fase inicial arbitraria, k es el número de onda que se relaciona con la longitud de onda, λ , mediante $k = 2\pi/\lambda$ y ω es la frecuencia angular que se relaciona con la frecuencia, ν , o el período, T , de la onda mediante: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$. A su vez, ω y k se relacionan con la velocidad, v , mediante la ecuación:

$$\frac{\omega}{k} = v. \quad (43)$$

ω/k se llama velocidad de fase. Las soluciones tipo onda armónica pueden también escribirse en términos de senos en lugar de cosenos. Claramente la función $\psi(x, t)$ de la ecuación a la izquierda en (42) toma el mismo valor para todos los puntos, x , y tiempos, t , para los que $kx - \omega t$ vale lo mismo. Podemos preguntarnos entonces, si tenemos un valor dado, ϕ , de $kx - \omega t$, cuáles son las posiciones como función del tiempo para los que $kx - \omega t$ toma ese valor. Claramente, es:

$$x = \frac{\phi}{k} + \frac{\omega}{k}t, \quad (44)$$

lo que implica que $dx/dt = \omega/k$. Es decir, el valor del argumento del coseno, $kx - \omega t + \varphi$ (la fase total) viaja con la velocidad ω/k de ahí el nombre de velocidad de fase. Algo análogo sucede con la función $\psi(x, t)$ de la ecuación a la derecha en (42). En este caso resulta $dx/dt = -\omega/k$

Hasta ahora escribimos las soluciones tipo ondas armónicas en términos de funciones trigonométricas. Sin embargo, como mencionamos anteriormente, para muchos cálculos es conveniente trabajar con exponenciales imaginarias. En ese caso escribimos las soluciones de la ecuación (41) como:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi)}, \quad (45)$$

entendiendo que la solución verdadera (la que tiene un significado físico) es la parte real de esta $\psi(x, t)$.

En el caso de propagación en más dimensiones se introduce el vector número de onda, \vec{k} , que indica la dirección de propagación y cuyo módulo satisface: $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$. En este caso multidimensional la fase de las soluciones tipo ondas armónicas es de la forma:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi, \quad \vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t + \varphi. \quad (46)$$

Todos los puntos del espacio, \vec{r} , para los que, a un dado instante, t , la fase total $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi$ toma el mismo valor constituyen el frente de onda. Cuando \vec{k} está a lo largo de un eje cartesiano (por ejemplo, $\vec{k} = k\hat{x}$) el frente de onda es plano. El vector, \vec{k} , de las ondas esféricas está lo largo de la dirección radial de esféricas y el de las circulares, a lo largo de la dirección radial de polares (o cilíndricas). Las ondas esféricas tienen simetría esférica por lo que sólo dependen de la coordenada radial: $\vec{k} \cdot \vec{r} = |\vec{k}|r$. Análogamente, las circulares tienen simetría cilíndrica y sólo dependen de la coordenada, r , de cilíndricas. Cuando la función $\psi(\vec{r}, t)$ tiene alguna de estas simetrías, el laplaciano, $\nabla^2\psi$ se simplifica. De este modo la ecuación (40) se reduce a:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{v^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = v^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right), \quad (47)$$

para ondas esféricas y a

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{v^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = v^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right), \quad (48)$$

para ondas circulares. Las soluciones tipo onda armónica de la ecuación (47) son de la forma

$$\psi(r, t) = \frac{\psi_0}{r} e^{i(kr - \omega t + \varphi)}. \quad (49)$$

Introducimos la descripción de las ondas armónicas en términos de exponenciales porque eso ayuda a hacer varias cuentas. En particular, en los cálculos de interferencia y difracción tenemos que sumar (o integrar) las ondas (esféricas) que llegan a un mismo punto del espacio (el punto sobre la pantalla) desde distintos puntos (los puntos sobre el frente de onda que se deforma por la presencia de un obstáculo) los que juegan el papel de fuentes puntuales. En el caso de interferencia lo hicimos inicialmente con funciones trigonométricas, pero el cálculo se puede hacer fácilmente con exponenciales. Por ejemplo, para analizar el experimento de las dos rendijas necesitamos sumar dos ondas:

$$\psi_1(r_1, t) = \frac{\psi_0}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \text{ y } \psi_2(r_2, t) = \frac{\psi_0}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)}, \quad (50)$$

donde r_1 y r_2 son las distancias desde el mismo punto de la pantalla hacia cada una de las fuentes (cada una de las rendijas). En la aproximación de Fraunhofer es $r_2 - r_1 = d\frac{y}{L}$ donde d es la separación entre las rendijas, L es la distancia entre el plano que contiene a las rendijas y el plano de la pantalla e y es la coordenada (vertical) del punto de la pantalla donde se está calculando la superposición de las dos ondas. La suma de ambas ondas resulta:

$$\psi(y, t) = \frac{\psi_0}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \left(1 + \frac{r_1}{r_2} e^{ik(r_2 - r_1)} \right) \approx \frac{\psi_0}{L} e^{i(kr_1 - \omega t)} \left(1 + e^{i\frac{kdy}{L}} \right), \quad (51)$$

donde estamos aproximando $r_1 \approx r_2 \approx L$ en todas partes salvo dentro de la fase total de la onda. Reescribimos:

$$1 + e^{i\frac{kdy}{L}} = e^{i\frac{kdy}{2L}} \left(e^{-i\frac{kdy}{2L}} + e^{i\frac{kdy}{2L}} \right) = 2e^{i\frac{kdy}{2L}} \cos\left(kd\frac{y}{2L}\right), \quad (52)$$

y reemplazamos en la ecuación (51). Recordando que $|e^{i\alpha}| = 1$ concluimos que la suma de la ecuación (51) satisface:

$$|\psi(y, t)|^2 = 4 \left| \frac{\psi_0}{L} \right|^2 \left(\cos\left(kd\frac{y}{2L}\right) \right)^2. \quad (53)$$

Dado que la intensidad de la luz sobre el punto de la pantalla de coordenada y es proporcional a $|\psi(y, t)|^2$ concluimos que esta intensidad es máxima cuando $(\cos(kd\frac{y}{2L}))^2 = 1$, es decir, cuando $kd\frac{y}{2L} = m\pi$ y mínima cuando $(\cos(kd\frac{y}{2L}))^2 = 0$, es decir, cuando $kd\frac{y}{2L} = (m + \frac{1}{2})\pi$ con m un número entero. Dado que $k = 2\pi/\lambda$, deducimos que:

$$\frac{y}{L} = m\frac{\lambda}{d}, \quad \text{para los maximos,} \quad (54)$$

$$\frac{y}{L} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}, \quad \text{para los minimos.} \quad (55)$$

En el caso de la difracción el cálculo involucraba integrar sobre un continuo de fuentes, todas las fuentes secundarias sobre el frente de onda que atraviesa la rendija de ancho b . Es decir, calculamos:

$$\psi(y, t) = \int_{-b/2}^{b/2} dy' \frac{\psi_0}{r(y')} e^{i(kr(y') - \omega t)} \approx \frac{\psi_0}{L} e^{i(kR - \omega t)} \int_{-b/2}^{b/2} dy' e^{ik(r(y') - R)}, \quad (56)$$

donde y , como antes, es la coordenada vertical del punto sobre la pantalla, y' (la variable sobre la que se hace la integral) es la coordenada (vertical) del punto sobre el frente de onda al atravesar la rendija, $r(y')$ es la distancia entre estos dos puntos (el de la pantalla y el del frente de onda al atravesar la rendija) y R es la distancia desde el centro de la rendija ($y' = 0$) hasta el punto sobre la pantalla de coordenada vertical, y . La rendija se extiende entre $y' = -b/2$ e $y' = b/2$, por eso la integral se hace entre estos dos extremos. Estamos también acá aplicando la aproximación de Fraunhofer (vean que reemplazamos $\frac{\psi_0}{r(y')}$ por $\frac{\psi_0}{L}$ y así pudimos sacar ese factor de la integral). En la aproximación de Fraunhofer resulta $r(y') - R = y'\frac{y}{L}$. Reemplazando esta igualdad en (56) llegamos a:

$$\begin{aligned} \psi(y, t) &= \frac{\psi_0}{L} e^{i(kR - \omega t)} \int_{-b/2}^{b/2} dy' e^{ik\frac{y'y}{L}} = \frac{\psi_0}{L} e^{i(kR - \omega t)} \left. \frac{e^{ik\frac{y'y}{L}}}{iky/L} \right|_{-b/2}^{b/2} = \frac{\psi_0}{L} e^{i(kR - \omega t)} \frac{e^{ik\frac{by}{2L}} - e^{-ik\frac{by}{2L}}}{iky/L} \\ &= b \frac{\psi_0}{L} e^{i(kR - \omega t)} \frac{e^{ik\frac{by}{2L}} - e^{-ik\frac{by}{2L}}}{2i} \frac{1}{kby/2L} = \frac{\psi_0}{L} e^{i(kR - \omega t)} \frac{\sin(\beta)}{\beta}, \end{aligned} \quad (57)$$

con $\beta = \frac{kby}{2L}$. En este caso deducimos que:

$$|\psi(y, t)|^2 = \left| \frac{b\psi_0}{L} \right|^2 \frac{(\sin(\beta))^2}{\beta^2}, \quad (58)$$

lo que da lugar al patrón de difracción.