$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q = 0$

$\bar{E}(\bar{r}) = E_r(r)\,\hat{r}$

$\Downarrow$

por simetría de traslación en $\hat{z}$ y rotación en φ

(I) $0 < r < a \Rightarrow \oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0 \Rightarrow \bar{E}(\bar{r}) = 0$ (conductor)

(II) $a < r < b \Rightarrow \oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \quad \text{con } Q_1 = \sigma_1 2\pi a h$$

$$E(r) = \frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0 r}$$

(III) $b < r < c \Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_1 + \sigma 2\pi b h}{\varepsilon_0}$

$$E(r) = \frac{\sigma_1 2\pi a h + \sigma 2\pi b h}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\sigma_1 a + \sigma b}{r \varepsilon_0}$$

(IV) $c < r < d \Rightarrow E(r) = 0$ (conductor) ~~$Q_1 + Q_2 + \sigma = 0 \Rightarrow \sigma = 0$~~

$\Rightarrow Q_{enc} = Q_1 + Q_2 + \sigma 2\pi b h = 0$

$\Rightarrow \sigma 2\pi b h = Q_3$

(V) $r > d \Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\cancel{Q}^{\,0} + \sigma 2\pi b h}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\sigma b}{\varepsilon_0 r}$$

Potenciales:

(I) $\bar{E}(\bar{r}) = -\nabla \phi(\bar{r}) \Rightarrow \bar{E}(\bar{r}) = 0 \Rightarrow \phi(r) = cte = A$

(II) $-\int_a^r \frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0 r}\, dr = -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + B$

(III) $-\int_b^r \left(\frac{\sigma_1 a}{r \varepsilon_0} + \frac{\sigma b}{r \varepsilon_0}\right) dr = -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right) - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right) + C$

(IV) $\bar{E}(r) = 0 \Rightarrow \phi(r) = cte = D$

(V) $-\int_d^r \frac{\sigma b}{\varepsilon_0 r}\, dr = \frac{-\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{d}\right)\right) + E$

$\Rightarrow$ como los dos conductores están unidos por un cable $\Rightarrow \phi_{IV}(r) = \phi_I(r) = A = D$

NOTA

continuidad del potencial:

I) $\phi_I(a) = A$

II) $\phi_{II}(a) = -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\overset{=0}{\ln\left(\frac{a}{a}\right)}\right) + B$ $\Rightarrow A = B$ ✓

II) $\phi_{II}(b) = -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) + A$

III) $\phi_{III}(b) = -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\overset{=0}{\ln\left(\frac{b}{b}\right)}\right) - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\overset{=0}{\ln\left(\frac{b}{b}\right)}\right) + C$ $\quad C = -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) + A$

III) $\phi_{III}(c) = -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right) - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right) - \frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) + A$

IV) $\phi_{IV}(c) = D = A$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right) - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right) - \frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) \cancel{+A} = \cancel{A}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(-\ln\left(\frac{c}{b}\right) - \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right)}$$

$$\cancel{\Rightarrow -\ln\left(\frac{c}{b}\right) - \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

$$\cancel{\ln\left(\frac{b}{a}\right) = 2\ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

IV) $\phi_{IV}(d) = D = A$

V) $\phi_V(d) = -\frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\overset{=0}{\ln\left(\frac{d}{d}\right)}\right) + E$ $\Rightarrow D = A = E$

$$\left(\frac{-\sigma_1 a}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right)\left(\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right) = \frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$\frac{-\sigma_1 a - \sigma b}{\cancel{\varepsilon_0}} = \frac{\sigma_1 a}{\cancel{\varepsilon_0}} \cdot \frac{\ln(b/a)}{\ln(c/b)}$$

$$-\sigma b = \sigma_1 a \frac{\ln(b/a)}{\ln(c/b)} + \sigma_1 a$$

$$-\sigma b = \sigma_1 a \left(\frac{\ln(b/a)}{\ln(c/b)} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = -\frac{\sigma b}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\ln(b/a)}{\ln(c/b)} + 1\right)}} = \frac{1 \cdot \ln c/b}{\ln b - \ln a + \ln c - \ln b} = \frac{\ln(c/b)}{\ln(c/a)}$$ ✓

$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 2\pi a h + \sigma_2 2\pi c h + \underbrace{\sigma_3 2\pi d h}_{=\sigma 2\pi b h} = 0$ porque $Q_3 = \sigma 2\pi b h$

$\sigma_2 2\pi c h = -\sigma 2\pi b h - \sigma_1 2\pi a h \Rightarrow$ Reemplazo $\sigma_1 \Rightarrow$

$$\sigma_2 2\pi c h = \frac{\sigma b}{a} 2\pi a h \cdot \frac{1}{\left(\frac{\ln(b/a)}{\ln(c/b)} + 1\right)} - \sigma 2\pi b h$$

NOTA

Adrián Godoy

HOJA N° 2/4

FECHA

$$\sigma_2 2\pi c h = \sigma 2\pi b h \left(\frac{1}{\left(\frac{\ln(b/a)}{\ln(c/b)}+1\right)} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_2 = \frac{\sigma b}{c} \left(\frac{1}{\left(\frac{\ln(b/a)}{\ln(c/b)}+1\right)} - 1 \right)}$$

$$\frac{1}{\frac{\ln b - \ln a + \ln c - \ln b}{\ln c/b}} - 1$$

$$= \frac{\ln c/b}{\ln c/a} - 1 = \frac{\ln c - \ln b - \ln c + \ln a}{\ln c/a}$$

$$= \frac{\ln a/b}{\ln c/a}$$

$$\sigma_3 2\pi d h = \sigma 2\pi b h$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_3 = \sigma \frac{b}{d}}$$

$$\phi_I(r) = A$$

$$\phi_{II}(r) = -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + A$$

$$\phi_{III}(r) = -\frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right) - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right) - \frac{\sigma_1 a}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) + A$$

$$\phi_{IV}(r) = A$$

$$\phi_V(r) = \frac{-\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{d}\right)\right) + A$$

$$\Rightarrow A = V_0$$

con $\sigma_1 = -\frac{\sigma b}{a} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{\ln(b/a)}{\ln(c/b)}+1\right)}}_{H}$

$$H \Rightarrow \begin{cases} H < 1 \text{ siempre} \\ H \geq 0 \text{ siempre} \end{cases}$$

Gráfico ϕ vs r

(I) $\phi(r) = V_0 \qquad 0<r<a$

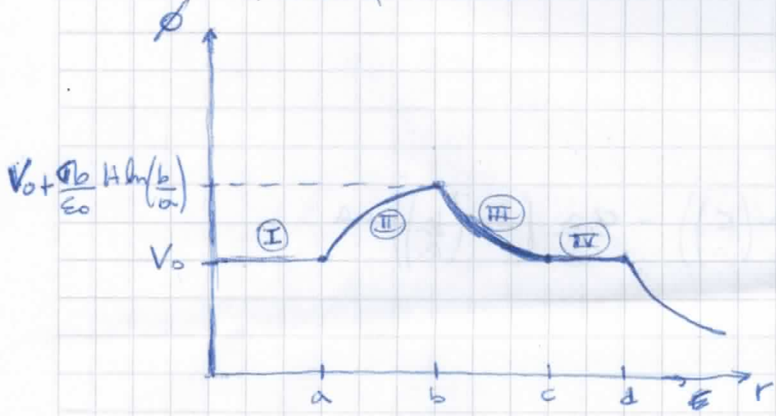
(II) $\phi(r) = \frac{\sigma b}{\varepsilon_0} H \left(\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + V_0 \qquad a<r<b$

(III) $\phi(r) = \frac{\sigma b}{\varepsilon_0} H \left(\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right) - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right) + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0} H \left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) + V_0$

$\Rightarrow \phi(r) = \underbrace{(H-1)}_{<0 \text{ porq } H<1} \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right) + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0} H \left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) + V_0 \qquad b<r<c$

(IV) $\phi(r) = V_0 \qquad c<r<d$

(V) $\phi(r) = -\frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{d}\right)\right) + V_0 \qquad r>d$



✓

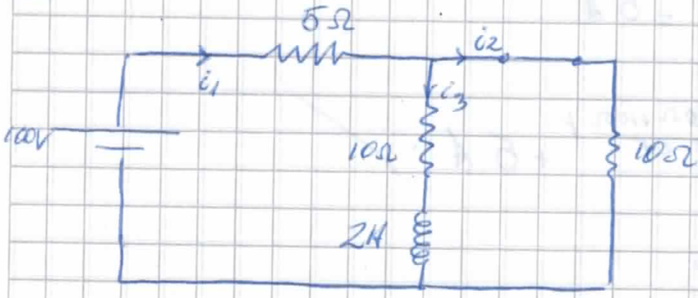
¡Muy Bien!

Damián Areny

HOJA N°

FECHA

Problema 2



$$i_1 = i_2 + i_3$$

a)

$$0 = 100V - i_1 5\Omega - i_3 10\Omega - 2H \frac{di_3}{dt}$$

$$0 = - i_2 10\Omega + 2H \frac{di_3}{dt} + i_3 10\Omega$$

Si sumamos las 2 ecuaciones:

$$0 = 100V - i_1 5\Omega - i_2 10\Omega \Rightarrow i_1 = \frac{100V - i_2 10\Omega}{5\Omega} = -2i_2 + 20A$$

$$i_2 + i_3 = -2i_2 + 20A$$

$$i_2 = -\frac{1}{3} i_3 + \frac{20}{3} A \qquad i_3 = -3i_2 + 20A$$

Reemplazamos i_2 en la segunda ecuación:

$$0 = \frac{10\Omega}{3} i_3 - \frac{200}{3} V + 2H \frac{di_3}{dt} + i_3 10\Omega$$

$$\frac{di_3}{dt} + \frac{\frac{10}{3}\Omega + 10\Omega}{2H} i_3 = \frac{200V}{6H}$$

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial tengo que buscar la solución de la homogénea (i_{3h}) y de la particular (i_{3p}).

$$\frac{di_{3h}}{dt} + \frac{\frac{10}{3}\Omega + 10\Omega}{2H} i_{3h} = 0 \Rightarrow \frac{di_{3h}}{dt} = -\frac{\frac{10}{3}\Omega + 10\Omega}{2H} i_{3h}$$

Una solución de esta ecuación es $i_{3h} = i_0 \, e^{-\frac{\frac{10}{3}\Omega + 10\Omega}{2H} t}$

Para la solución particular propongo que i_{3p} sea constante.

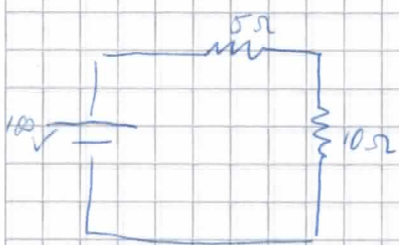
NOTA

$$\cancel{\frac{di_{3p}}{dt}} + \frac{\frac{10}{3}\Omega + 10\Omega}{2H}\, i_{3p} = \frac{200V}{6H}$$

$$\Rightarrow i_{3p} = \frac{200V \cdot 2H}{6H \cdot \left(\frac{10}{3}\Omega + 10\Omega\right)} = 5\,A$$

Por lo tanto $i_3 = i_{3h} + i_{3p} = i_0\, e^{-\frac{\frac{10}{3}\Omega + 10\Omega}{2H}t} + 5\,A$.

i_0 es la corriente antes de $t = 0$



$$0 = 100V - i_0\, 5\Omega - i_0\, 10\Omega = 100V - i_0\, 15\Omega$$

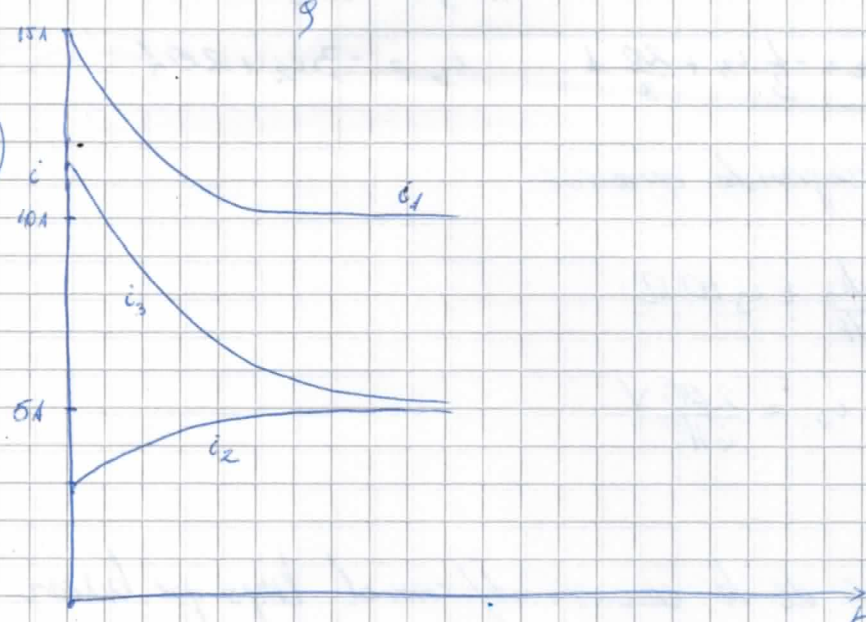
$$i_0 = \frac{100V}{15\Omega} = \frac{20}{3}\,A$$

$$\Rightarrow i_3 = \frac{20}{3}\,A\, e^{-\frac{\frac{10}{3}\Omega + 10\Omega}{2H}t} + 5\,A$$

$$i_2 = -\frac{1}{3}\, i_3 + \frac{20}{3}\,A = -\frac{20}{9}\,A\, e^{-\frac{\frac{10}{3}\Omega + 10\Omega}{2H}t} + 5\,A$$

$$i_1 = i_2 + i_2 = \frac{40}{9}\,A\, e^{-\frac{\frac{10\Omega}{3} + 10\Omega}{2H}t} + 10\,A$$

b)



OK

C

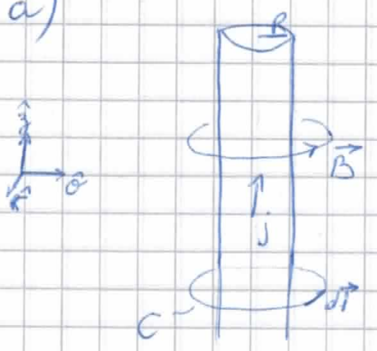
Damián
Ireny

HOJA N°

FECHA

Problema 3

a)



Dada la dirección de la corriente, el campo magnético $\vec{B}$ está en $\hat{\theta}$, es decir que las líneas de campo describen círculos alrededor del cilindro.

Para utilizar la ley de Ampère, suponemos una curva circular (C) paralela a las líneas de campo.

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I$$

En este caso, I es la corriente que atraviesa la superficie encerrada por C y $\vec{B} = B\,\hat{\theta}$ y $d\vec{l} = dl\,\hat{\theta}$.

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \oint_C B \cdot dl = B \int_C dl = B\, 2\pi r$$

Para calcular I, tenemos 2 casos:

$r < R$

$$I = \int j\, dS = j \int dS = j\, \pi r^2$$

$$B\, 2\pi r = \mu_0 j\, \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

$r > R$ $\quad I = j\, \pi R^2 \Rightarrow B\, 2\pi r = \mu_0 j\, \pi R^2$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2}\,\hat{\theta} \qquad r < R$$

$$= \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \qquad r > R$$

NOTA

5) ~~ϕ~~ El flujo ϕ está dado por:

$$\phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$ donde S es la superficie de la espira.

$\vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\hat{\theta}$ $\qquad d\vec{S} = dS\,\hat{n}$ $\qquad \hat{n}\cdot\hat{\theta} = 1$

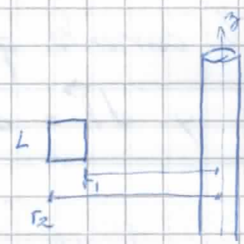
$$\phi = \iint_S B\, dS$$

~~La superficie S está definida por $0 < z < L$~~
~~$R+d < r < d+L+R$~~

~~La distancia d no es constante $d = vt$~~
~~Entonces $vt+R < r < vt+R+L$~~
~~Entonces el costado de la espira que está en r varía entre R y $L+vt$~~

$$\cancel{\phi = \int_0^L \int_{R+d}^{R+d+L}}$$

$$\cancel{\phi = \int_0^L}$$



$$\phi = \int_0^L \int_{r_1}^{r_2} B\, dS$$ donde r_1 y r_2 son los límites en $\hat{r}$ de la espira.

$$\phi = \int_0^L \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\, dr\, dz = \frac{\mu_0 j R^2}{2}\cdot L \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 j R^2 L}{2}\cdot \ln\frac{r_2}{r_1}$$

r_2 es constante e igual a $R+d+L$

r_1 varía con el tiempo ~~y~~ es igual a $R+d+vt$

$$\phi = \frac{\mu_0 j R^2 L}{2} \ln\frac{(R+d+L)}{(R+d+vt)}$$?

→ el flujo tiene que aumentar si aumenta el área. Tiene que ser $\phi = \frac{\mu_0 j R^2 L}{2} \ln\frac{(R+d+vt)}{(R+d+L)}$

ok
duro sí

NOTA

Damián
Areny

HOJA N°

FECHA

Problema 3

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} \quad \cancel{-\frac{\mu_0 j R^2 \cdot V}{2} \cdot \frac{V}{\ldots}}$$

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mu_0 j R^2}{2} \cdot \frac{d \ln(R+d+vt)}{dt} = -\frac{\mu_0 j R^2}{2} \cdot V \cdot \frac{1}{R+d+vt}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{Re} = \frac{-\mu_0 j R^2}{2 \cdot Re} \cdot \frac{V}{R+d+vt} \cdot \cancel{B}$$

Re = Resistencia

NOTA