Práctica #6
Circuito RLC

Objetivos

Encontrar la frecuencia de resonancia en un circuito RLC serie y paralelo. Estudiar el desfasaje en función de la frecuencia del generador.

1) Circuito RLC serie.

Se tiene un circuito compuesto por un capacitor C, una inductancia L y una resistencia conectados en serie a un generador de funciones como se muestra en la Figura 1.

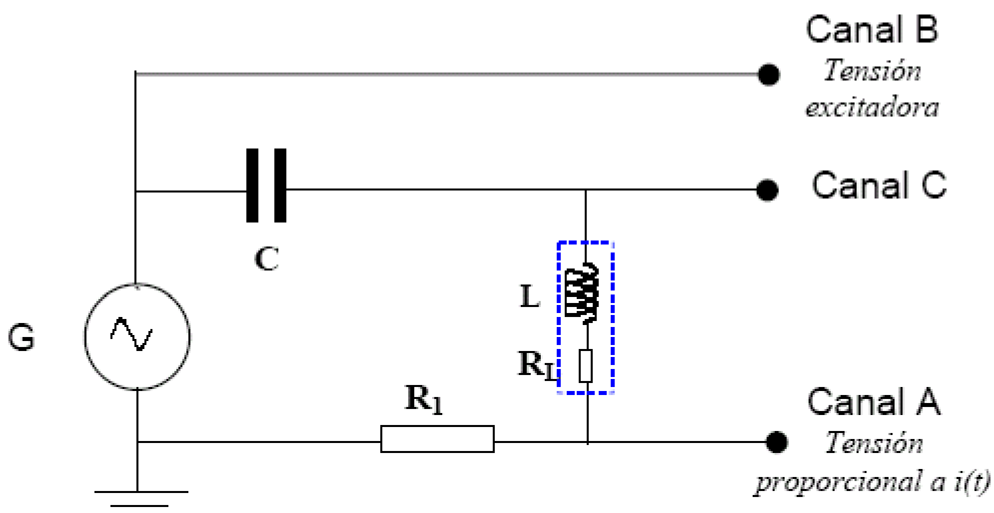

Figura 1: Circuito RLC serie.

Aplicando las leyes de Kirchoff al circuito de la figura:

$$V = V_R + V_C + V_L = iR + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} \qquad (1)$$

$$\frac{dV}{dt}=R\ \frac{di}{dt}+L\ \frac{d^2 i}{dt^2}+\frac{i}{C} \qquad (2)$$

Si el voltaje suministrado por el generador G es sinusoidal : V(t) = V_{max} sen(ω t), la corriente del circuito estará dada por I(t) = I_{max} sen (ω t + φ). Donde

$$\omega=2\ \pi\ f \qquad (3)$$

y f es la frecuencia suministrada por el generador. Se pueden calcular la impedancia del circuito

$$Z=Z_R+Z_L+Z_C=R+j\ \omega\ L+\frac{j}{\omega\ t} \qquad (4)$$

Entonces:

$$V=I\ Z=I[\ R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})] \qquad (5)$$

La tangente del ángulo de desfasaje será el cociente entre la parte imaginaria de la impedancia y la parte real:

$$tg(\phi)=\frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)}=\frac{(\omega\ L-{}^{1}\!/_{\omega\ C})}{R} \qquad (6)$$

y el módulo de la impedancia será:

$$|Z|^2=R^2+(\omega\ L-\frac{1}{\omega\ C})^2 \qquad (7)$$

El ángulo de desfasaje entre I y V puede ser mayor que cero, en cuyo caso el circuito es capacitivo, menor que cero en cuyo caso es inductivo o cero en cuyo caso el circuito es solamente resistivo, la tensión y la corriente están en fase y la parte imaginaria de la impedancia es cero.

$$\operatorname{Im}(Z)=0\ \Rightarrow\ \omega\ L-\frac{1}{\omega\ C}=0 \qquad (8)$$

Condición que se cumple para la llamada *frecuencia de resonancia:*

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L\ C}}\ \rightarrow\ f=\frac{1}{2\ \pi\ \sqrt{L\ C}} \qquad (9)$$

Para este caso la corriente del circuito se hace máxima.

Ancho de banda Δω es el intervalo de frecuencias para el que la potencia disipada cae a la mitad que la máxima.

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} \qquad (10)$$

Se define el factor de calidad o factor de merito Q:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \qquad (11)$$

Se relaciona con el ancho de banda

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \qquad (12)$$

Realización de la práctica:

- Montar un circuito como el de la Figura 1 y estudiar la variación de tensión sobre la resistencia en función de la frecuencia. Encontrar a partir de estas mediciones la frecuencia de resonancia y el valor del factor de mérito. Se debe tener presente que la inductancia tiene resistencia propia y en caso que corresponda debe ser tenida en cuenta en la resistencia total del circuito.
- Medir el desfasaje φ *(f)* en función de la frecuencia. Puede utilizar para esto el modo X-Y del osciloscopio.

2) Circuito RLC paralelo.

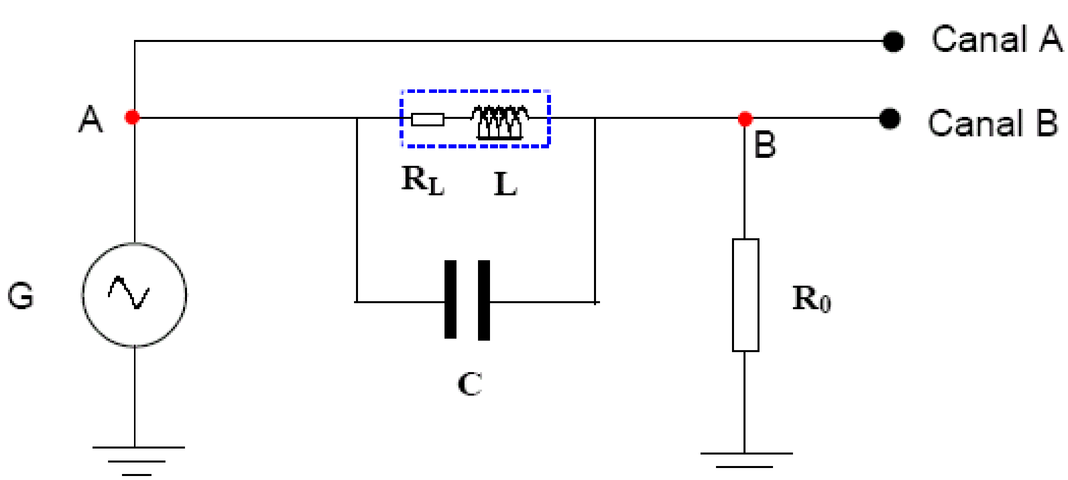

Figura 2. circuito RLC paralelo

La impedancia de este circuito viene dada por la impedancia del paralelo L, C (Z') en serie con la impedancia de la resistencia R. A su vez hay que recordar que la impedancia tiene una resistencia propia (R_L) $Z=R+Z'$ (13)

$$\frac{1}{Z'}=\frac{1}{Z_C}+\frac{1}{Z_L+R_L} \qquad (14)$$

$$Z'=\frac{(R_L+j\,\omega\,L)(\frac{-j}{\omega\,C})}{R_L+j\,(\omega\,L-\frac{1}{\omega\,C})} \qquad (15)$$

Para φ = 0, resonancia, habra un mínimo en la potencia transferida

$$\omega_0'=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-R_{L^2}\frac{C}{L}} \qquad (16)$$

Si la resistencia interna de la bobina es cero R_L=0 entonces

$$\omega_0'=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (17)$$

Realice mediciones similares a las indicadas para el circuito RLC serie. Encuentre la *frecuencia de antiresonancia*. Mida el ancho de banda y el factor de mérito. Compare con valores calculados.

APÉNDICE G

DETERMINACIÓN DE LA DIFERENCIA DE FASES ENTRE DOS SEÑALES

Consideremos dos señales eléctricas de variación senoidal de igual frecuencia pero de distintas amplitudes y con una diferencia de fases entre ellas que llamamos *f*. Las expresiones analíticas que las describen son:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \tag{G.1}$$

$$y(t) = B \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \tag{G.2}$$

Si a cada una de estas señales la enviamos a los canales 1 y 2 de un osciloscopio de doble traza funcionando en el "modo base de tiempo" (o las adquirimos con un sistema de toma de datos), las señales se verán como se muestra en la Fig. G.1.

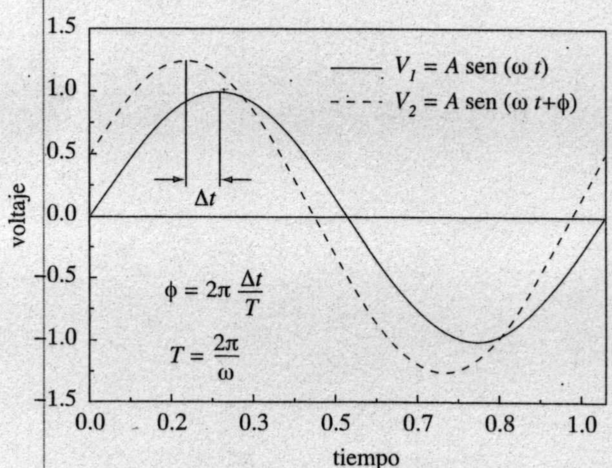

Figura G.1 - Vista de las señales (G.1) y (G.2) en un osciloscopio en función del tiempo.

La diferencia de fases ϕ de las ondas está relacionada con la diferencia Δt por:

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \tag{G.3}$$

donde $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. En el gráfico pueden medirse Δt y T con mucha precisión, y así determinar ϕ.

Si las mismas señales se analizan con un osciloscopio de doble traza funcionando en el "modo *XY*" (los osciloscopios digitales no poseen comúnmente esta función), lo que obtenemos es un gráfico similar al de la Fig. G.2. Lo que vemos es $y(t)$ en función de $x(t)$, y, en consecuencia, resulta un gráfico que es el lugar geométrico descrito por las ecuaciones paramétricas (G.1) y (G.2). Dicho lugar geométrico resulta –en este caso de funciones senoidales desfasadas– una elipse, con ejes que no caen alineados con los ejes vertical y horizontal del osciloscopio.

Es fácil ver de (G.1) y (G.2) que para $t = 0$, $x(0) = 0$ y $y(0) = B.\text{sen}(\phi)$. O sea que del cociente entre el valor de y donde la elipse corta al eje vertical y el valor máximo de la señal y ($y_{máx} \doteq B$), obtenemos el valor $sen(\phi)$. Un análisis similar se aplica al eje horizontal.

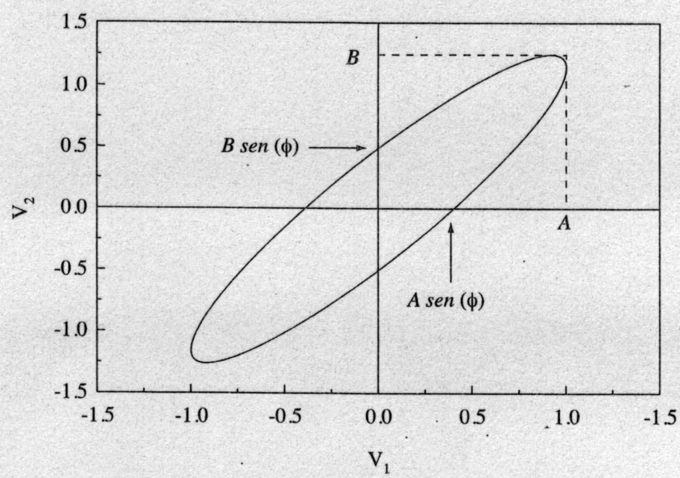

Figura G.2 - Señales (G.1) y (G.2) vistas en el modo *XY*. Descripción del procedimiento gráfico para obtener la diferencia de fases entre las dos señales.

Si las señales se adquieren con un sistema de toma de datos conectado a una PC, se deben obtener las dos ondas $x(t)$ y $y(t)$ por lo menos durante un período, y luego se representa gráficamente $y(x)$.