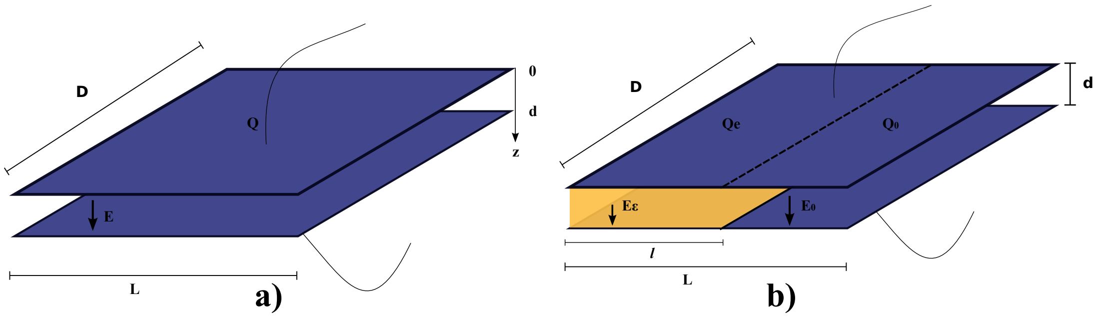
Problema 9

El otro día en clase vimos una forma de resolver el problema 9, convirtiéndolo en un problema de capacitores conectados en paralelo (o en serie, para la parte c). La idea es resolverlo acá sin hacer esa analogía, calculando explícitamente el campo y la caída de potencial dentro del capacitor, y discutir un poco más en detalle lo que se pregunta en el ítem b).



Empecemos por el campo eléctrico que se genera dentro de un capacitor de placas paralelas con ningún medio entre ellas, que se carga hasta obtener una carga Q. Podemos hacer la aproximación de utilizar el valor del campo del caso en que las placas tienen extensión infinita, lo cuál es una buena aproximación dentro del capacitor, fallando sobre todo en los bordes. Haciendo esto, el campo resulta ser

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} = \frac{Q}{L\,D\,\epsilon_0}\hat{z} = \frac{Q}{A\,\epsilon_0}\hat{z}$$

En donde $\hat{z}$ apunta hacia la cara con $-Q$ ¿Cómo calculo la disminución del potencial ΔV entre las caras, si voy desde la cara con $+Q$ hacia la que tiene $-Q$? De la siguiente forma:

$$\Delta V = V(0) - V(d) = \int_d^0 \nabla V \cdot \vec{dl} = -\int_d^0 \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_d^0 \frac{Q}{A\,\epsilon_0}dz = \frac{Q\,d}{A\,\epsilon_0} = E\,d$$

En este ecuación, ΔV es *la caída de potencial entre las chapas*, es decir cuánto disminuye V al ir desde la que tiene carga positiva hacia la que tiene carga negativa. Esto permite inmediatamente obtener la capacidad $C = \frac{A\epsilon_0}{d}$ ya que $\Delta V = \frac{d}{A\epsilon_0}Q$. Ahora, ¿De qué forma se ve afectado todo esto, si entre las placas se encuentra una medio dieléctrico de permitividad ϵ? Lo que sucede es que en el dieléctrico aparecen densidades de cargas en las superficies, que generan un campo que se opone al que generan las placas. Es decir dentro del medio se genera un campo que intenta cancelar el original, sin llegar a lograrlo. Esto hace que el campo total dentro del dieléctrico tenga el mismo sentido que el campo que había antes, pero menos intenso. Más precisamente, el campo entre las placas resulta ser

$$\vec{E} = \frac{Q}{A\,\epsilon}\hat{z} = \frac{\vec{E}_{\text{vacio}}}{\kappa}$$

Donde $\kappa = \epsilon/\epsilon_0 > 1$ y $\vec{E}_{\text{vacio}}$ es el campo que habría si entre las placas no hay ningún medio (es decir vacío). Ahora, si repetimos la cuenta para obtener la caída de potencial, vemos que esta resulta $\frac{Q\,d}{A\,\epsilon}$. La nueva capacidad es $C = \frac{A\epsilon}{d} = \kappa C_0$, siendo C_0 la capacidad sin el medio. En palabras, al insertar el dieléctrico aumenta la capacidad porque disminuye la caída de potencial (y la carga de las placas se mantiene constante). Vayamos ahora sí, a la resolución del problema.

a) El capacitor de la figura b) se carga hasta que obtiene una carga $Q = C\,V$. Luego, se desconecta la batería, lo cuál no tiene ninguna importancia para este ítem. Lo que nos dan como dato es Q, y tenemos que calcular V y C.

El capacitor está dividido ahora en dos regiones: una llena de dieléctrico, y la otra no, como se observa en la figura. Si voy desde una cara hacia la otra, a través de cualquiera de las dos regiones, la caída de potencial tiene que ser la misma, V, porque en ambos casos estoy yendo desde una placa hacia la otra. Lo que no necesariamente tiene que ser igual, es la carga que está distribuida en cada una de las dos regiones. Llamemos Q_ϵ a la carga que está sobre la región con el dieléctrico, y Q_0 a la que está sobre la región vacia. Es evidente que $Q_\epsilon + Q_0 = Q$. También puedo calcular cuanto tiene que valer el campo en cada una de las regiones:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\epsilon &= \frac{Q_\epsilon}{lD\epsilon}\hat{z} \\ \vec{E}_0 &= \frac{Q_0}{(L-l)D\epsilon_0}\hat{z} \end{aligned} \tag{1}$$

A eso se llega simplemente asumiendo que el campo en la región con dieléctrico es el generado *únicamente* por la carga distribuida en esa región de la chapa Q_ϵ, y que el campo en la región sin dieléctrico es el generado por Q_0. La región con dieléctrico tiene un área sobre la placa $l\,D$, y la otra tiene un área $(L-l)\,D$.

Ahora, ya sabemos que la caída de potencial tiene que ser la misma ya sea qué región elija para integrar, por lo tanto $V = E_\epsilon\,d = E_0\,d$, lo que implica que $E_\epsilon = E_0$, es decir el campo vale lo mismo en ambas regiones. Igualando las ecuaciones 1, y utilizando que $Q_\epsilon + Q_0 = Q$, obtenemos los valores de las cargas en cada una de las regiones, que resultan

$$Q_0 = \frac{L-l}{\kappa l + L - l} Q$$

$$Q_\epsilon = \frac{\kappa l}{\kappa l + L - l} Q$$

Sabiendo esto, inmediatamente conocemos el valor del campo, y como $V = E_\epsilon\, d$, ya tenemos la diferencia de potencial que se generó entre las placas:

$$V = d\, E_\epsilon = d\frac{Q_\epsilon}{lD\epsilon} = \frac{d\,\kappa}{D\epsilon(\kappa l + L - l)}\, Q = \frac{d}{D\epsilon_0(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} l + L - l)}\, Q \;\Rightarrow\; C = \frac{D\epsilon_0(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} l + L - l)}{d} \tag{2}$$

Finalmente, la energía la calculamos como $U = \frac{1}{2}Q^2/C$.

Con esto está resuelto el ítem a). Una forma de chequear este resultado es mirar los casos en que $l = 0$ (no hay dieléctrico) y $l = L$ (el dieléctrico ocupa todo el capacitor). Es muy fácil ver que haciendo esto se recuperan los valores de la capacidad que habíamos calculado al principio.

b) Ver lo que pasa si se retira el dieléctrico es ahora muy fácil. En primer lugar, como se desconectó el capacitor de la batería, la carga no puede irse a ningún lugar. Por lo tanto, Q permanece constante. ¿Qué pasa con la diferencia de potencial? Podemos ver esto explícitamente: l ahora vale cero, y reemplazando en la ecuación 2 resulta

$$V' = \frac{d\,\kappa}{L\,D\epsilon} Q = \frac{d\,Q}{LD\epsilon_0}$$

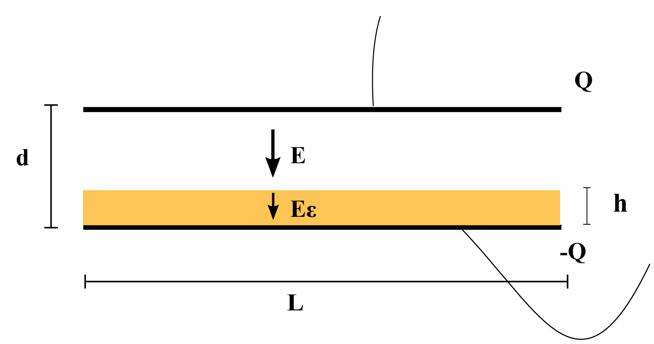
donde el primado indica que es la diferencia de potencial luego de haber quitado el dieléctrico. Es fácil ver que se cumple que $V < V'$, es decir la caída de potencial aumenta.

Si la batería no se hubiera desconectado, entonces lo que se mantendrá constante es V, y Q va a cambiar, ya sea recibiendo o entregándole cargas a la batería. Para calcular cuánto es ese cambio, simplemente observamos que $V = Q/C = Q'/C'$, donde Q' y C' son la carga y la capacidad al haber removido el medio dieléctrico, y C y Q son la carga y la capacidad que calculamos para el ítem a). Pero sabemos cuanto vale C', porque es la capacidad calculada en la ecuación 2 en el caso en que $l = 0$, que como dijimos es la capacidad de un capacitor con vacio entre sus placas. Por lo tanto

$$Q' = C'\frac{Q}{C} = \frac{L}{\kappa l + L - l} Q < Q$$

Ambos casos son entendibles intuitivamente de la siguiente manera. Agregar un dieléctrico entre las placas del capacitor *aumenta* la capacidad del mismo. En esta caso, lo estamos removiendo, por lo que estamos disminuyendo su capacidad. Esto lo podemos ver explícitamente, con la ecuación 2 (C disminuye con l). Ahora, si la carga no puede variar, al disminuir C inevitablemente tiene que aumentar la diferencia de potencial. Por el contrario, si es la diferencia de potencial V lo que permanece constante, en el caso de la batería conectada, al disminuir C es inevitable que disminuya la carga.

c)



Con esta nueva configuración, si calculamos la caída de potencial entre las placas, ahora habrá que sumar lo que cae a lo largo de la región vacia, y lo que cae al recorrer el medio dieléctrico. La carga Q, ahora sí está distribuida uniformemente por toda la chapa. Por lo tanto, la caída total de potencial será $V = h\,E_\epsilon + (d-h)\,E_0$. El valor del campo en cada región lo conocemos, el campo en el vacio es (su módulo) $E_0 = Q/A\epsilon_0$, y en el dieléctrico es $E_\epsilon = Q/A\epsilon$. En esta caso usamos directamente el área total de las chapas, A, en vez de sus dimensiones (L y D). Por lo tanto, tenemos la caída de potencial V en función de la carga Q que resulta $V = \frac{Q}{A\epsilon_0}(h/\kappa + d - h)$, y entonces la capacidad resulta

$$C = \frac{A\epsilon_0}{\frac{h}{\kappa} + d - h} = \frac{A\epsilon_0}{\frac{h}{\epsilon/\epsilon_0} + d - h}$$

De nuevo, podemos chequear que valores de $h = d$ y $h = 0$ den la capacidad que esperamos. Si ahora retiramos el dieléctrico, con el capacitor desconectado de la batería, la carga nuevamente tiene que mantenerse constante, y el nuevo potencial resulta de hacer $h = 0$, por lo que $V' = \frac{Qd}{A\epsilon_0} > V$. Si el capacitor siguiera conectado a la batería al retirar el dieléctrico, entonces V se mantendrá constante y el nuevo valor de la carga será $Q' = \frac{A\epsilon_0}{d} V = \frac{Q}{d}(h/k + d - h) < Q$.