a) Q_c = carga en el conductor → está en superficie

Además, en el conductor $V = V_0$ y $V(\infty) = 0$

Por simetría esférica, tanto el campo como el potencial dependen solo de la coordenada radial. Además el campo está en $\hat{r}$.

Ahora: para $r \leq a$, el potencial vale $V_0 \rightarrow V(r) = V_0 \quad r \leq a$

$a \leq r \leq b$ → acá el potencial es el que genera la carga Q_c más una constante a determinar: $V(r) = \dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r} + A$

Para $r \geq b$: el potencial es el que genera la carga del conductor, más la carga σ, más una cte a determinar

$$V(r) = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0} + \frac{4\pi b^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0} + B$$ ($4\pi b^2 \sigma$ es la carga del casquete)

$$\Rightarrow V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq a \\ \dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r} + A & a \leq r \leq b \\ \dfrac{Q_c + 4\pi b^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 r} + B & r \geq b \end{cases}$$

Incógnitas: A, B, Q_c

Tengo que imponer: $V(a) = V_0 \quad V(\infty) = 0$

y continuidad en $r = a$ y $r = b$

·) $V(\infty) = 0 \Rightarrow B = 0$

·) V continuo en b:

$$\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 b} + A = \frac{Q_c + 4\pi b^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 b} \rightarrow \text{despejo } A$$

$$A = \frac{4\pi b^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{b\sigma}{\varepsilon_0}$$

·) $V(a) = V_0 \rightarrow \dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 a} + A = V_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{b\sigma}{\varepsilon_0} = V_0 \Rightarrow \boxed{Q_c = \left(V_0 - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right) 4\pi\varepsilon_0 a}$$

b)

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq a \\ \left(V_0 - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right)\frac{a}{r} + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0} & a \leq r \leq b \\ \left(V_0 - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right)\frac{a}{r} + \frac{b^2\sigma}{\varepsilon_0 r} & r \geq b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

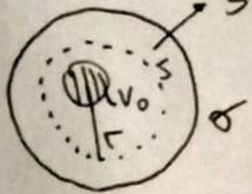
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \dfrac{a\left(V_0 - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right)}{r^2}\hat{r} & a \leq r \leq b \\ \left[\left(V_0 - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right)\frac{a}{r^2} + \frac{b^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2}\right]\hat{r} & r \geq b \end{cases}$$

Otra forma de resolver el problema:
(sin pasar por $V(r)$)

$\bar{E}(r) = 0$ si $r < a$ por ser un conductor ideal.

Para $a \leq r \leq b$, tomo una superficie de Gauss:

sup. esférica de radio r



Ley de Gauss: $\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = 4\pi r^2 E(r)$ porque $E(r)$ es constante

$Q_{enc} = Q_c \rightarrow$ la carga que tenga el conductor

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_c}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_c}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \qquad a \leq r < b$$

Para $r \geq b$:

$\rightarrow Q_{enc\ por\ S} = Q_c + 4\pi b^2 \sigma$

$$\Rightarrow \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_c + 4\pi b^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q_c + 4\pi b^2 \sigma}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \qquad r > b$$

Ahora, ¿como calculo Q_c? Se que $V(a) = V_0$ y $V(\infty) = 0$

$$\Rightarrow V(\infty) - V(a) = -V_0 = \int_a^\infty \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\int_a^\infty E(r)\, dr =$$

$$= -\left[\int_a^b \frac{Q_c}{4\pi \varepsilon_0 r^2} dr + \int_b^\infty \frac{Q_c + 4\pi b^2 \sigma}{4\pi \varepsilon_0 r^2} dr \right] =$$

$$= -\left[\frac{Q_c}{4\pi \varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr + \frac{Q_c + 4\pi b^2 \sigma}{4\pi \varepsilon_0} \int_b^\infty \frac{1}{r^2} dr \right]$$

$$\Rightarrow -V_0 = -\left[\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{Q_c+4\pi b^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{b}\right]$$

$$\int \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{-1}{r}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 a} - \cancel{\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 b}} + \cancel{\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 b}} + \frac{b\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_c = \left(V_0 - \frac{b\sigma}{\varepsilon_0}\right)4\pi\varepsilon_0 a}$$

c) en $a \leq r$, $V = V_0$ igual que antes

en $a \leq r \leq b$: $\varepsilon_0 \to \varepsilon \Rightarrow \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon r} + A = V(r)$

en $r \geq b$: no hay dieléctrico $\Rightarrow$ igual que en a): $V(r) = \frac{Q_c + 4\pi b^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$V(b) \to$ continuo $\Rightarrow \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon b} + A = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0} \Rightarrow A = \frac{Q_c}{4\pi b}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow A = \frac{Q_c}{4\pi b}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}$$

Ahora, $V(a) = V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon a} + \frac{Q_c}{4\pi b}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow Q_c = \frac{\left(V_0 - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right)}{\frac{1}{4\pi\varepsilon a} + \frac{1}{4\pi b}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{4\pi\left(V_0 - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right)}{\frac{1}{\varepsilon a} + \frac{1}{b}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow Q_c = \frac{\left(V_0 - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right)4\pi\varepsilon_0 a}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + \frac{a}{b}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}}$$

si $\varepsilon = \varepsilon_0 \Rightarrow Q_c = \left(V_0 - \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\right)4\pi\varepsilon_0 a$

igual que en a) ✓

El campo queda:

$$
E(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\[2ex] -\left[\dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon r^2} \right] \hat{r} & a \leq r \leq b \\[2ex] \dfrac{Q_c + 4\pi b^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} & r \geq b \end{cases}
$$

donde
$$
Q_c = \frac{\left(V_0 - \dfrac{\sigma b}{\varepsilon_0} \right) 4\pi\varepsilon_0 a}{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + \dfrac{a}{b}\,\dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}}
$$