Ítem (a)

Fijo el sistema de coordenadas de la siguiente manera en el esquema:

Origen en el cable, a la altura de la base de la espira.

Eje z a lo largo del cable, positivo hacia arriba.

Eje y hacia la derecha, en dirección a la espira

Eje x saliendo del plano de la espira.

Como sólo considero el campo del cable infinito, dada la simetría, uso coordenadas cilíndricas.

Dependencia del Campo: Por simetría de traslación en la dirección del eje z a lo largo del cable, el campo no depende de z. Por simetría de rotación alrededor del cable, el campo no depende de ϕ. Entonces:

$$\vec{B} = \vec{B}(r)$$

Dirección del Campo: Por la ley de Biot-Savart, el campo generado por un trozo pequeño de cable cumple:

$$d\vec{B} \sim I d\vec{l'} \times (\vec{r} - \vec{r'})$$

Los vectores $d\vec{l'} = \hat{z} dz'$, mientras que los $(\vec{r} - \vec{r'})$ tienen una componente en $\hat{z}$ y otra en $\hat{r}$ (es fácil verlo en un dibujo). Al hacer el producto vectorial, $\hat{z} \times \hat{z} = 0$ y $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi}$, entonces $d\vec{B}$ apunta en $\hat{\phi}$. Por superposición, sumando las contribuciones $d\vec{B}$ de todo el cable, entonces:

$$\boxed{\vec{B}(r) = B(r)\hat{\phi}}$$

Ítem (b)

Tomando la circulación del campo a lo largo de un círculo de radio r centrado en el cable, por la Ley de Ampère:

$$\mu_0 I(t) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B(r)\,\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}\, r\, d\phi = B(r) 2\pi r$$

entonces

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \hat{\phi}}$$

Ítem (c)

El flujo magnético es por definición:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Para hacer esta integral hay que evaluar el campo sobre la superficie de la espira. Dicha superficie es un cuadrado vertical de lado b, situado a una distancia a del cable, y digamos contenido en el plano y-z. Es decir, en coordenadas cilíndricas: $a < r < a + b$; $0 < z < b$. Allí el campo generado por el cable apunta en la dirección $-\hat{x}$, y eligiendo también $\hat{n} = -\hat{x}$, entonces:

$$\Phi = \int_{z=0}^{z=b} \int_{r=a}^{r=a+b} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} (-\hat{x}) \cdot (-\hat{x})\, dr\, dz$$

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_0\, b}{2\pi}\, I(t)\, \log\left(\frac{a+b}{a}\right)}$$

Ítem (d)

Según la Ley de Faraday sobre la espira se induce una *f.e.m.*:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde Φ es el flujo magnético calculado en el ítem anterior. Como la dependencia temporal entra solamente en la corriente $I(t) = \alpha t + \beta$ (la superficie del circuito no cambia), entonces la *f.e.m.* da:

$$\epsilon = -\frac{\mu_0\, b}{2\pi} \log\left(\frac{a+b}{a}\right)\alpha$$

Según la Ley de Kirchhoff, sobre la espira $\epsilon = I_{ind}R$. Entonces la corriente inducida será:

$$\boxed{I_{ind} = -\frac{\mu_0\, b\, \alpha}{2\pi R} \log\left(\frac{a+b}{a}\right)}$$

El hecho de haber elegido la normal a la superficie de la espira en $-\hat{x}$ me define (según el teorema de Stokes) un sentido de circulación positivo en sentido horario en la figura. Como la corriente I_{ind} tiene un signo menos, y además todas las constantes son positivas y $\log\left(\frac{a+b}{a}\right) > 0$, entonces la corriente circula en sentido antihorario.

Ítem (e)

Según la Ley de Lorentz:

$$\vec{F}_{neta} = \int_{espira} I_{ind}\, \vec{dl} \times \vec{B}_{cable}(r)$$

Para calcular esta integral la separamos en los cuatro tramos de la espira. Las integrales en los tramos de arriba y abajo dan iguales y de signo opuesto, y al sumarlas se cancelan. Las de los lados si bien son de signos opuestos, no son iguales en módulo debido a que el campo del cable es más intenso en el tramo izquierdo por estar más cerca del mismo. Para el tramo izquierdo tenemos:

$$I_{ind}\, \vec{dl} = -|I_{ind}|\hat{z}\, dz\,; \qquad \vec{B}_{cable}(r=a) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a}\hat{\phi}$$

mientras que para el tramo derecho tenemos:

$$I_{ind}\, \vec{dl} = |I_{ind}|\hat{z}\, dz\,; \qquad \vec{B}_{cable}(r=a+b) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi(a+b)}\hat{\phi}$$

y como $\hat{z} \times \hat{\phi} = -\hat{r}$, entonces

$$\begin{aligned}\vec{F}_{izq} &= \frac{\mu_0\, b\, \alpha}{2\pi R} \log\left(\frac{a+b}{a}\right) \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a}\left(-\hat{z} \times \hat{\phi}\right) \int_0^b dz \\ &= \left(\frac{\mu_0\, b}{2\pi}\right)^2 \log\left(\frac{a+b}{a}\right) \frac{\alpha(\alpha t + \beta)}{Ra}\,\hat{r}\end{aligned}$$

y análogamente:

$$\vec{F}_{der} = \left(\frac{\mu_0\, b}{2\pi}\right)^2 \log\left(\frac{a+b}{a}\right) \frac{\alpha(\alpha t + \beta)}{R(a+b)}\,(-\hat{r})$$

y finalmente:

$$\boxed{\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{izq} + \vec{F}_{der} = \left(\frac{\mu_0\, b}{2\pi}\right)^2 \log\left(\frac{a+b}{a}\right) \frac{\alpha(\alpha t + \beta)}{R}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right)\hat{r}}$$

Notar que $|F_{izq}| > |F_{der}|$ y por lo tanto la fuerza neta apunta alejándose del cable.