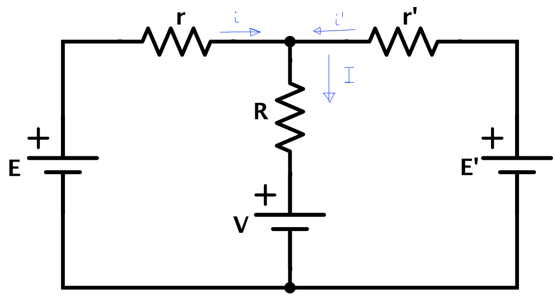
Problema 3

- *Método a): reglas de Kirchhoff.* Primero de todo, damos nombres a las corrientes que circulan por cada rama y elegimos su sentido.



La regla de los nodos nos dice

$$I - i - i' = 0, \tag{1}$$

mientras que la regla de las mallas da lugar a las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} RI + r'i' &= \mathcal{E}' - V \quad (2) \\ RI + ri &= \mathcal{E} - V. \quad (3) \end{aligned}$$

Multiplicando (1) por r' y sumándole (2) obtenemos

$$(R + r')I - r'i = \mathcal{E}' - V. \tag{4}$$

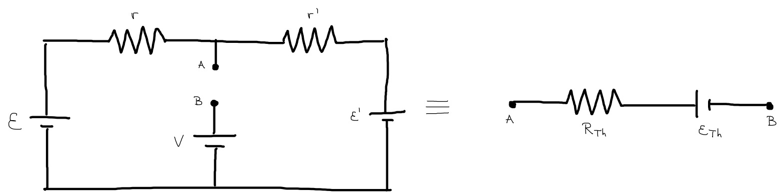
Multiplicando esta última ecuación por r y sumándole (3) multiplicada por r' obtenemos

$$[R(r + r') + rr']I = r(\mathcal{E}' - V) + r'(\mathcal{E} - V), \tag{5}$$

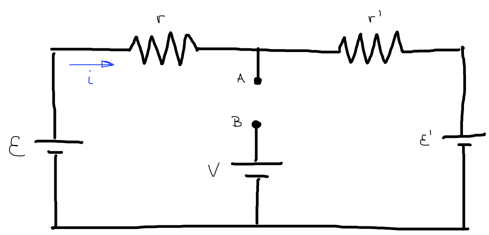
con lo cual la corriente que circula por la resistencia R es

$$\boxed{I = \frac{r(\mathcal{E}' - V) + r'(\mathcal{E} - V)}{R(r + r') + rr'}.} \tag{6}$$

- *Método b): teorema de Thévenin.* El teorema de Thévenin dice que podemos sustituir la parte del circuito que no incluye R por un dispositivo equivalente más sencillo:



La fem de Thévenin $\mathcal{E}_{\text{Th}}$ es la diferencia de potencial entre A y B sin conectar a nada. En este caso el circuito tiene una sola malla. Llamemos i a la corriente que circula por él en el sentido de las agujas del reloj:



Tomando el cero de potencial en el borne negativo de la fuente de fem $\mathcal{E}$ tenemos

$$V_A = \mathcal{E} - ri \qquad V_B = V. \tag{7}$$

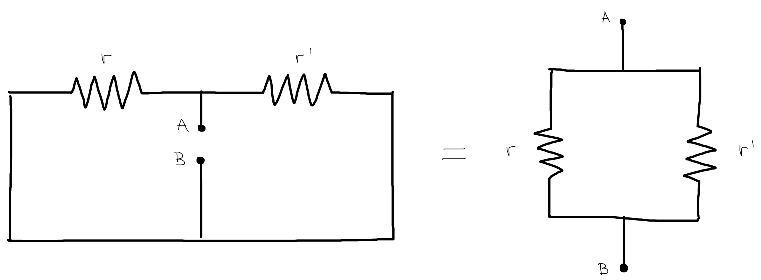
Por otra parte, la regla de las mallas de Kirchhoff nos permite expresar i en términos de los datos del problema:

$$(r + r')i + \mathcal{E}' - \mathcal{E} = 0 \;\Rightarrow\; i = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{r + r'}. \tag{8}$$

De las ecuaciones (7) y (8) se deduce que la fem de Thévenin es

$$\mathcal{E}_{\text{Th}} = V_A - V_B = \mathcal{E} - r\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{r + r'} - V = \frac{r'\mathcal{E} + r\mathcal{E}'}{r + r'} - V. \tag{9}$$

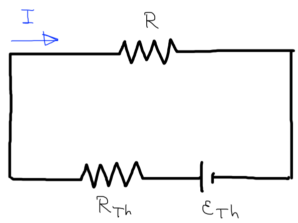
La resistencia de Thévenin R_{Th} es la resistencia equivalente sin fuentes. Si le quitamos las fuentes al circuito y lo deformamos un poquito obtenemos lo siguiente:



Es decir, sin fuentes el dispositivo consiste en dos resistencias conectadas en paralelo. Por lo tanto su resistencia equivalente es

$$R_{\text{Th}} = \frac{rr'}{r + r'}. \tag{10}$$

Por el teorema de Thévenin, la corriente I que circula por R (en el sentido especificado en la primera figura de este documento) se obtiene resolviendo el circuito



Es decir,

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{Th}}}{R + R_{\mathrm{Th}}} = \frac{\frac{r'\mathcal{E}+r\mathcal{E}'}{r+r'} - V}{R + \frac{rr'}{r+r'}}. \tag{11}$$

En la segunda igualdad hemos usado las ecuaciones (9) y (10). Multiplicando y dividiendo por $r + r'$ obtenemos

$$\boxed{I = \frac{r(\mathcal{E}' - V) + r'(\mathcal{E} - V)}{R(r + r') + rr'},} \tag{12}$$

que es lo mismo que habíamos obtenido anteriormente usando las reglas de Kirchhoff (ecuación (6)).

- *Si se sustituye r' por un condensador, ¿qué corriente circula por R una vez se ha alcanzado el estado estacionario?* En el estado estacionario no pasa corriente por el condensador (porque de lo contrario la carga del condensador cambiaría con el tiempo, con lo cual el estado no sería estacionario). Eso es lo mismo que sucede cuando se tiene una resistencia infinita. Así pues, sustituir r' por un condensador es equivalente a tomar el límite $r' \to \infty$. Tomando este límite en la ecuación (6) (o (12)) vemos que la corriente que circula por R en este caso es

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E} - V}{R + r}.} \tag{13}$$

- *Si se sustituye r' por un inductor, ¿qué corriente circula por R una vez se ha alcanzado el estado estacionario?* En el estado estacionario no hay caída de potencial a través del inductor (porque la corriente es constante en el tiempo). Eso es lo mismo que sucede cuando se tiene una resistencia nula. Así pues, reemplazar r' por un inductor es equivalente a tomar $r' = 0$. Haciendo esta sustitución en la ecuación (6) (o (12)) vemos que la corriente que circula por R en este caso es

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}' - V}{R}.} \tag{14}$$