Física 2 (Químicos) - Prof. Pablo Cobelli - 2016 verano

Guía 0: Repaso matemático - Desarrollo de Taylor de funciones arbitrarias en torno a un punto - Interpretación de operadores diferenciales - Teoremas integrales de Stokes y de Gauss - Análisis de variable compleja

Desarrollo de Taylor de funciones

1. Considere las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, siendo x una variable real. Demuestre que, para valores pequeños de x, $f(x)$ puede aproximarse por una recta de pendiente unidad y ordenada al origen nula. ¿Qué sucede, en ese mismo límite, con la función $g(x)$? Represente gráficamente los resultados obtenidos e intente determinar si sus conclusiones son coherentes con lo esperado.

2. En base a lo obtenido en el problema anterior, se observa que para ángulos pequeños resulta adecuado aproximar $\sin(x) \approx x$. Buscamos ahora precisar la noción *ángulos pequeños* de la frase precedente. Para ello, calcule el ángulo máximo θ_m para el cuál la aproximación difiere del valor exacto en un 10 %.

3. Suponga ahora que se desea disponer de un valor aproximado para $\sqrt{1{,}005}$, preciso a 5 cifras decimales, sin valerse de referencias externas ni calculadora. ¿Cómo lo calcularía?

4. Obtenga una función lineal que aproxime $f(x) = (1-x)^{-1}$ para valores pequeños de su argumento. ¿Es posible obtener una función que aproxime $f(x)$ en torno a $x = 1$?

Operadores diferenciales: interpretación y cálculo

5. El gradiente de una función escalar de N variables (con $N > 2$), es un vector o un escalar? ¿De cuántas variables depende?

6. Demuestre que, si $f(x,y)$ es una función escalar de dos variables escalares y reales x e y, entonces $\vec{g}(x,y) = -\vec{\nabla} f(x,y)$ es un campo vectorial que, en cada punto (x,y) apunta en la dirección de más rápido decrecimiento de $f(x,y)$.

7. Suponga que usted se encuentra sobre un terreno montañoso cuya elevación en función de las coordenadas (x,y) sobre el plano viene dada por: $h(x,y) = 10y \exp[-(x_p - x)y/L^2]$, siendo $x_p = 5$ y $L = 1$. Todas las variables, x, x_p, y, h y L son medidas en kilómetros. Suponga además que su GPS le indica que su ubicación actual es $(x_0, y_0) = (3{,}75; 1)$. Si se desata una tormenta y usted desea descender lo más rápidamente posible, ¿qué dirección debería tomar?

8. Considere el campo vectorial $\vec{V}(x,y,z)$ que, a cada punto (x,y,z) del espacio tridimensional le asigna un vector. Su divergencia, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$, es un vector o un escalar? ¿De cuántas variable depende, en general?

9. Sea $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{x} + xy\hat{y} + 1\hat{z}$. Calcule el rotor de $\vec{F}$ en todo el espacio. Dicho rotor, es un escalar o un vector?

10. Muestre que, para cualquier función $f(x,y,z)$ continua, derivable y con derivadas segundas continuas, resulta $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = \vec{0}$. Es decir, que para funciones *suficientemente bien comportadas*, el rotor de su gradiente es siempre nulo.

11. Mostrar que $\vec{V}(x,y,z) = y\hat{x} - x\hat{y}$ no es un campo gradiente.

12. Muestre que, para cualquier campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ suficientemente bien comportado (¿qué significa esto?), vale $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$; es decir, que la divergencia de un rotor es cero.

Teoremas integrales de Stokes y Gauss

13. Para las siguientes expresiones, diga simplemente si el resultado de su cálculo es un escalar, un vector, un campo vectorial o un campo escalar:

a) $\int_1^2 f(x)\, dx$,

b) $\int_1^2 \int_2^3 g(x, y)\, dx\, dy$,

c) $\int_1^2 \int_0^y g(x, y)\, dx\, dy$,

d) $\int_a^b \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l}$,

e) $\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S}$,

f) $\iint_S \vec{F}(x, y, z)\, dS$,

g) $\iint_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z)\right] \cdot d\vec{S}$,

h) $\iiint_V \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z)\right] dx\, dy\, dz$,

i) $\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, y

j) $\iiint_V \vec{F}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

14. Teorema de Gauss.
Muestre que, si $\vec{F}$ es un campo vectorial *suave* definido en un volumen V del espacio, entonces se cumple

$$\oint_V \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right] dV = \int_{S=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

donde el lado izquierdo representa una integral de volumen, y el lado derecho, una integral cerrada de superficie sobre la frontera del volumen V.

15. Considere $\vec{F} = 2x\hat{x} + y^2\hat{y} + z^2\hat{z}$. Sea S la esfera de radio unidad definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcule $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

16. Ley de Gauss.
Sea V una región del espacio tridimensional y S la superficie frontera que delimita V. Muestre que si el origen de coordenadas no se encuentra sobre la frontera de V, entonces vale

$$\oint_{S=\partial V} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi, & \text{si } (0,0,0) \text{ está en el interior de } V, \\ 0, & \text{si } (0,0,0) \text{ está fuera de } V, \end{cases}$$

siendo

$$\vec{r}(x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z},$$

y

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

17. Teorema de Stokes. Sea S una superficie orientada abierta (una que no separa el espacio en 2 regiones) en el espacio tridimensional. Sea $C = \partial S$ la frontera orientada de S, y considere un campo vectorial $\vec{F}$ continuo en S. Muestre entonces que vale:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) \cdot d\vec{S} = \int_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

18. Sea S la superficie del semicasquete esférico centrado en el origen y de radio 1, dado por la ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z \geq 0$. Asumiremos que su orientación es tal que la normal en $(0, 0, 1)$ apunta en $+\hat{z}$. Sea $\vec{F}(x, y, z) = y\hat{x} - x\hat{y} + xz\hat{z}$. Determine $\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{S}$.

19. En virtud de los teoremas de Stokes y de Gauss (demostrados en los problemas precedentes), ¿qué interpretación física puede hacer de la divergencia y del rotor de un campo vectorial genérico? ¿Qué tipo de información acerca de dicho campo ofrecen cada uno de estos operadores diferenciales?

Análisis de variable compleja

20. Sean z_1 y z_2 dos números complejos, tales que $z_1 = a + ib$, y $z_2 = c + id$, siendo a, b, c y d números reales no nulos. Calcule:

    a) $\Re\left[\frac{z_1}{z_2}\right]$, y

    b) $\Im\left[\frac{z_1}{z_2}\right]$,

    en términos de a, b, c y d.

21. Considere el número complejo $z = a + ib$, con a, b números reales. Represente dicho número como un punto en el plano complejo, y establezca la posibilidad de representarlo en forma alternativa como: $z = a + ib = r\exp(i\theta)$. Determine r y θ, ambos en función de a y b.

22. Muestre que cualquier número complejo $z = a + ib$ puede escribirse como $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$. Determine r y θ en términos de a y b.

23. Dado un número complejo $z = a + ib$, (siendo a, b reales) calcule z^2 y $|z|^2$. ¿Coinciden ambos valores? ¿Por qué?