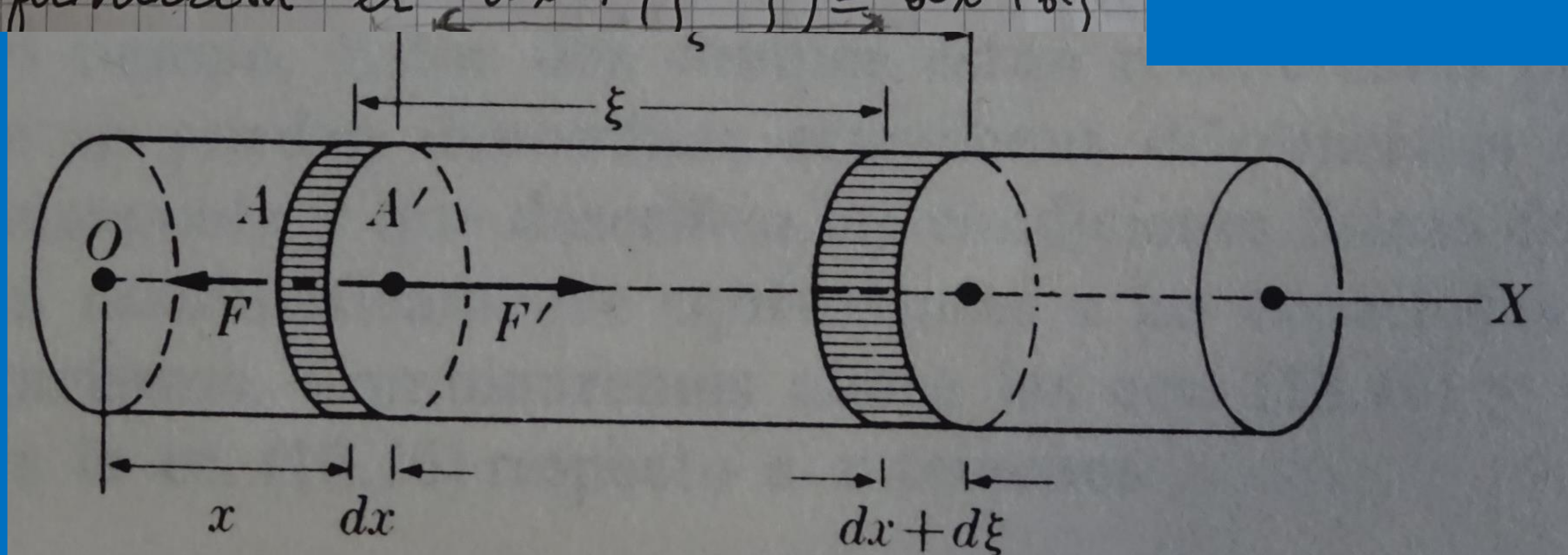
Ondas de presión en una columna de gas

Consideremos las ondas "elásticas" que se producen en un gas debido a las variaciones de presión. El sonido es el ej. más importante de este tipo de ondas. Para simplificar, consideremos que las ondas se propagan en un gas encerrado en un tubo cilíndrico. Como los gases son compresibles, cuando se establecen fluctuaciones de presión en un gas, la densidad del mismo experimenta las mismas fluctuaciones que la presión.

Sean p_0 y ρ_0 la presión y la densidad del gas en condiciones de equilibrio. En estas condiciones, p_0 y ρ_0 conservan el mismo valor en todo el volumen del gas, son independientes de x. Si la presión del gas se modifica, un volumen elemental como $A\,dx$ experimenta una fuerza neta no nula y se pone en movimiento. En consecuencia, la sección A se desplaza una distancia ξ y la sección A' una distancia ξ', de modo que el espesor del volumen elemental después de la deformación es $dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi$



Debido al cambio de volumen, la densidad cambia porque el gas es más compresible. La masa del volumen elemental en equilibrio es $\rho_0 A\,dx$ y la masa del volumen perturbado es $\rho A\,(dx + d\xi)$, donde ρ es la densidad del gas perturbado. Por conservación de la masa:

$$\rho A\,(dx + d\xi) = \rho_0 A\,dx \qquad \text{ó}$$

$$\rho\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \rho_0$$

y

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}}$$

Como $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ es pequeño $\left(1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-1} \simeq 1 - \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$,

luego :
$$\ell = \ell_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \quad \text{ó} \quad \ell - \ell_0 = -\ell_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \quad (1)$$

p está relacionado con ℓ por la ecuación de estado, que se puede escribir como $p = f(\ell)$. Si uno hace un desarrollo en serie de Taylor de esta función, se tiene:

$$p = p_0 + (\ell - \ell_0) \left.\frac{dp}{d\ell}\right)_0 + \frac{1}{2} (\ell - \ell_0)^2 \left.\frac{d^2 p}{d\ell^2}\right)_0 + \cdots$$

Si las variaciones son pequeñas, se pueden conservar sólo los dos primeros términos y escribir:

$$p = p_0 + (\ell - \ell_0) \left.\frac{dp}{d\ell}\right)_0$$

Se define la cantidad:

$$K = \ell_0 \left.\frac{dp}{d\ell}\right)_0$$

como el módulo de la elasticidad de volumen (se mide en $N\,m^{-2}$). Entonces:

$$p = p_0 + K\left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\right)$$

esta expresión corresponde a la ley de Hooke para los fluidos. La ley de Hooke, formulada originalmente para estiramientos longitudinales, establece que el alargamiento unitario ε de un material es directamente prop. a la fuerza aplicada F

Si de (1) reemplazamos:

$$p = p_0 - \kappa \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (2)$$

esto relaciona la presión en cualquier punto de la columna de gas con la deformación en el mismo punto.

Ahora necesitamos la ecuación de movimiento del volumen elemental, la masa del mismo es $\rho_0 A\, dx$ y su aceleración $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. El gas a la izquierda de nuestro elemento de volumen lo empuja hacia la derecha con una fuerza pA y el gas a la derecha lo empuja hacia la izquierda con una fuerza $p'A$. Luego; la fuerza resulttanto en x será:

$$(p - p')A = -A\,dp \quad \text{donde} \quad dp = (p' - p)$$

Luego:

$$-A\,dp = (\rho_0 A\,dx)\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{o}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3)$$

En este caso tenemos dos campos (o variables) la presión y el desplazamiento y las ecuaciones que los relacionan son (2) y (3). Combinemos las ecuaciones recordando que ρ_0 es cte. en todo el gas: (derivo (2) respecto de x y lo pongo en (3))

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -K\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{y en (3)}$$

$$+K\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = +\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}} \quad (4)$$

Una vez de vuelta tenemos una ecuación de ondas y concluimos que el desplazamiento producido por la perturbación de la presión del gas se propaga con la velocidad

$$\boxed{v = \sqrt{K/\rho_0}} \quad (5)$$

Si se combinan ahora la (2) y la (3) otra vez:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \Leftarrow$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad (3)\ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (2)\ \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -K\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Esta es la razón por la cual a las ondas elásticas en un gas se les llama ondas de presión. El sonido es una onda de presión en el aire. Una explosión o sea un aumento rápido de la presión local produce una fuerte onda de presión, pero en este caso las variaciones de densidad pueden ser tan grandes que no valen las aproximaciones hechas en nuestra teoría.

Análogamente si se combinan ① y ④, tenemos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

① $\rho - \rho_0 = -\rho_0 \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

④ $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dfrac{K}{\rho_0}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$

① $\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\dfrac{\rho_0^2}{K}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0^2}{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) = -\frac{\rho_0^2}{K}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\rho_0^2}{K}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right) = \frac{\rho_0^2}{K}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

Por consiguiente al referirnos a un gas podemos hablar de una onda de desplazamiento, una de presión y una de densidad.

El movimiento ondulatorio de los gases es un proceso adiabático, en el sentido de que no hay intercambio de energía calórica entre los elementos de volumen del gas. En condiciones adiabáticas:

$$p = \underset{\text{cte}}{C}\, \rho^{\gamma} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad \left(1{,}4 \text{ para gases diatómicos}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{d\rho} = \gamma C \rho^{\gamma - 1} \quad \text{y como} \quad K = \rho_0 \left.\frac{dp}{d\rho}\right)_0 = \gamma C \rho_0^{\gamma} = \gamma p_0$$

Luego si sacamos los 0 y sustituimos en la ec.

$$(5) \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}} \qquad v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

La onda asociada con el campo / es una onda longitudinal, ya que la perturbación es // a la dirección de propagación. La onda de presión y de densidad son ondas escalares.

¿Qué se propaga en un movimiento ondulatorio?

Es importante comprender claramente qué es lo que se propaga como onda en un movimiento ondulatorio. La respuesta es que: lo que se propaga es una condición física generada en algún lugar y que, como consecuencia de la naturaleza del fenómeno, puede ser transmitida a otras regiones.

Veamos las ondas que hemos descripto corresponden a ciertos tipos de movimiento de átomos o moléculas del medio a través del cual la onda se propaga, pero los átomos, en promedio, permanecen en sus posiciones de equilibrio. Entonces lo que se propaga, no es la materia sino su estado de movimiento. Es una condición dinámica que se transmite de una región a otra, como uno está acostumbrado a describir las condiciones dinámicas usando los concepto de momento y energía podemos decir que:

en un movimiento ondulatorio se transmite o propaga momento y energía.

Supongamos las ondas long. en una columna de gas. En una sección transversal que se desplaza con una velocidad $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, el lado derecho ejerce una fuerza F sobre el lado izquierdo y el lado izquierdo tira del derecho con una fuerza $\overset{(+F)}{-F}$. Por lo tanto, la potencia (o trabajo por u. de t.) que el lado izquierdo transmite al derecho de la sección es:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (-F)\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Por lo tanto, cuando la perturbación pasa de una sección transversal a otra, esta potencia se transmite. Si la onda se propaga de izquierda a derecha debe suministrarse energía al extremo izquierdo de la barra (si se suministra energía en un Δt corto, se produce una perturbación de extensión limitada) o pulso. Si queremos que se produzca un tren continuo de ondas tenemos que suministrar energía en forma continua.

Supongamos que tenemos una onda elástica sinusoidal:

$$\xi = \xi_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \quad \therefore$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t) \quad y$$

$$\longrightarrow -KA\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$F = -A\,d\rho = KA\frac{\partial \xi}{\partial x} = KA\,k\,\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Entonces, como $\omega = kv$ y $v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = KA\,k\,\xi_0 \cos(kx - \omega t)\,\omega\,\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$= KA\omega k\,\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) =$$

$$K A \omega k = A v^2 \rho_0 \frac{\omega^2}{v}$$

$$K \to v^2 \rho_0 \qquad \omega k \to \omega\frac{\omega}{v}$$

$$\Rightarrow vA\left[\rho_0 \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)\right] = \frac{\partial W}{\partial t}$$

de acá se ve que $\frac{\partial W}{\partial t} > 0$ siempre y $\frac{\partial W}{\partial t}$ también satisface la ec. de ondas y es una onda de energía.

La potencia media es:

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)} = v A \left[\rho \omega^2 \xi_0^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)} \right]$$

y $\overline{\cos^2(kx-\omega t)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)} = v A \left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \right)$$

Si llamamos $E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \rightarrow$ la energía por unidad de volumen o densidad de energía en el aire debida a las oscilaciones producidas por el mov. ondulatorio. Entonces:

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial t}} = v A \; E \qquad \frac{m}{s} \; \frac{J}{m^3}$$

como v es la velocidad de propagación $\Rightarrow v E$ es el flujo de energía por unidad de tiempo y de área es:

$$\underbrace{I = \frac{1}{A} \overline{\frac{\partial W}{\partial t}} = v E}$$ se le llama la

intensidad de la onda f

8

Ondas acústicas

Supongamos que queremos obtener la relación entre las amplitudes de las ondas de desplazamiento y las de presión en una columna de gas.

Si las ondas de desplazamiento son armónicas y:

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

como

$$\underbrace{p - p_0}_{} = -K \frac{\partial \xi}{\partial x} = -K \xi_0 k \cos(kx - \omega t)$$

es la variación respecto del equilibrio y la onda de presión tiene entonces una amplitud

$$P = K k \xi_0 \qquad \text{como} \qquad v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$$

$\Rightarrow \quad P = v^2 \rho_0 \cancel{k} \xi_0 \qquad$ como $k = \frac{w}{v}$

$\Rightarrow \quad P = v \rho_0 w \xi_0 = 2\pi \nu v \rho_0 \xi_0$

Por ejemplo ahora a $\nu = 400\, Hz$ el sonido más débil que se puede oír corresponde a una presión de $8 \times 10^{-5}\, Nm^{-2}$, tomando para el aire $\rho_0 = 1,29\, kg\, m^{-3}$ y $v = 345\, m s^{-1}$

$\Rightarrow \quad \xi_0 = \frac{P}{2\pi \nu v \rho_0} = 7,15 \times 10^{-11}\, m$

que chico!! Esta amplitud es del orden de las dimensiones moleculares.

Veamos ahora cual es la intensidad en función de la amplitud de la onda de presión:

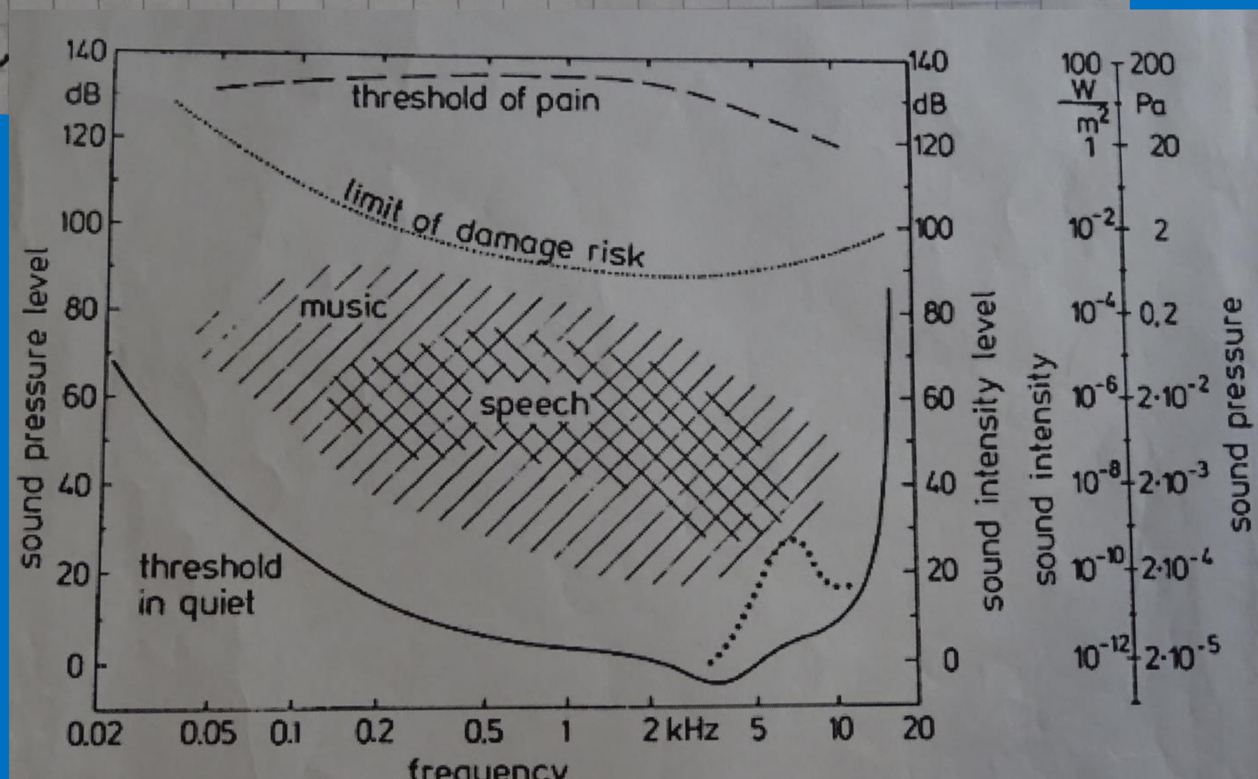
$$P = 2\pi v \rho_0 \nu \xi_0$$

y la densidad de energía es:

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 w^2 \xi_0^2 = 2\pi^2 \rho_0 \nu^2 \xi_0^2 = \frac{P^2}{2v^2 \rho_0}$$

$$I = \frac{P^2}{2v^2 \rho_0} v = \frac{P^2}{2 v \rho_0}$$

La sensibilidad del oído humano ~~es~~ tq' para cada frecuencia hay una intensidad mínima o umbral de audición, por debajo de la cual el sonido no es audible y una intensidad máxima o umbral de dolor, por encima del cual el sonido produce molestia o dolor.



La intensidad se expresa con otra unidad llamada "decibel". El nivel de intensidad de un sonido (o cualquier movimiento ondulatorio) se indica con B y se expresa en decibeles (db) según:

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

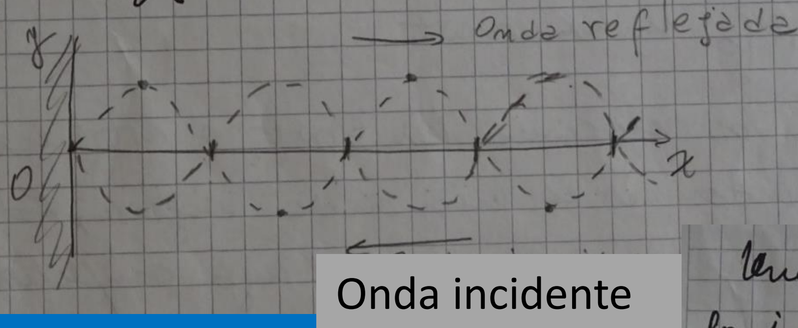
$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ para el caso del sonido en el aire.

Por ej. para $P = 8 \times 10^{-5} \frac{N}{m^2}$ presión correspondiente

al sonido más débil que puede oírse a 400 Hz, la intensidad es $7,2 \times 10^{-12} W m^{-2}$ y $I = 8,57$ db.

Ondas estacionarias en una dimensión

Supongamos tener una soga que tiene un extremo fijo como se indica en la figura, donde O es el punto fijo.



Una onda transversal incidente moviéndose hacia la izq. y de ecuación $\xi = \xi_0 \,\text{sen}(\omega t + kx)$ se refleja en O, originando una nueva onda que se propaga hacia la derecha con ecuación $\xi = \xi_0' \,\text{sen}(\omega t - kx)$.

$$\text{sen}(\omega t + kx) = \text{sen}(kx + \omega t)$$

$$\text{sen}(\omega t - kx) = -\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

El desplazamiento en cualquier punto de la cuerda es el resultado de la superposición de estas dos ondas:

$$\xi = \xi_0 \,\text{sen}(\omega t + kx) + \xi_0' \,\text{sen}(\omega t - kx)$$

Como en el punto O, tenemos $x = 0$, de modo que

$$\xi(x=0) = (\xi_0 + \xi_0')\,\text{sen}\,\omega t = 0 \quad \forall t \Rightarrow$$

$$\xi_0 = -\xi_0'$$

6 reo la onda reflejada sufre un cambio de fase de π:

$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$

$$\xi = \xi_0' \operatorname{sen}(\omega t - kx) = -\xi_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) =$$

componer con

$$= \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx - \pi) = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$\cos\pi - \underbrace{\cos(\omega t - kx) \operatorname{sen}\pi}_{0} = -\xi_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

Entonces:

$$\xi = \xi_0 [\operatorname{sen}(\omega t + kx) - \operatorname{sen}(\omega t - kx)]$$

y utilizando la relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\xi = 2\xi_0 \operatorname{sen} kx \cos \omega t$$

En esta ecuación los relaciones $kx \pm \omega t$ o $\omega t \pm kx$ no aparecen, la onda no es una onda viajera, Esta expresión representa un mov. armónico cuya amplitud varía pto. a pto:

$$A = 2\xi_0 \operatorname{sen} kx$$

La A se indica con líneas de trazos en la fig. La A es nula para $kx = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ ∴

$$x = \frac{1}{2} n \lambda$$

Estos ptos. se denominan nodos. Los nodos sucesivos están separados por $\frac{1}{2}\lambda$. Si $v = \sqrt{\frac{T}{m}}$, λ es:

$$\lambda = 2\pi \frac{v}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

Esta m es μ de ahora en más hasta el fin de esta clase.

y (dado T y m) λ es arbitraria en tanto ω lo sea:

Si el pto. $L = x$ también es fijo $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $x = L$ es un nodo y luego:

$$kL = n\pi$$

ó:

$$L = \frac{1}{2} n \lambda \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2L}{n} = 2L, \frac{2L}{2}, \frac{2}{3}L, \ldots$$

Esta segunda condición limita automáticamente las λ de las ondas que pueden propagarse en la cuerda y también las frecuencias

$$\nu_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}} = \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \ldots$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

a esta frecuencia se le llama fundamental y todos los modos o frecuencias posibles de oscilación (llamados armónicos) son múltiplos del fundamental (de la fundamental). Los ptos. donde la amplitud es máxima se llaman antinodos.

mental). Los ptos. donde la amplitud es máxima se llaman antinodos. En un nodo $\xi = 0$ y en un antinodo $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$

¿Cumplen estas ondas llamadas estacionarias la ecuación de ondas? Si la cumplen y cuál es la ecuación que satisface la amplitud que depende de x.

estacionarias ↓ ondas donde la dependencia con las coordenadas y el tiempo están separadas

Por ej. veremos:

$$\xi = \underbrace{f(x)}_{\text{amplitud que depende de } x} \operatorname{sen} \omega t$$

y metemos esto en la ec. de ondas: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d x^2} \operatorname{sen} \omega t \qquad y \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) \operatorname{sen} \omega t$$

Luego:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{w^2}{v^2} f$$

y como $k = \frac{w}{v}$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0$$

O sea la amplitud satisface esa ecuación diferencial.
La solución general de la ec. anterior es:

$$f(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$$

y

$$① \quad \xi = (A \operatorname{sen} kx + B \cos kx) \begin{matrix} \operatorname{sen} wt \\ \text{ó } \cos wt \end{matrix}$$

Las ctes. A y B se determinan de las condiciones de contorno.

1) Veamos 1º una cuerda con los dos extremos fijos.

$$\xi = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \ \text{y} \ x = L$$

$x = 0$ en ① $\Longrightarrow$

$$\xi(x=0) = B \operatorname{sen} \omega t = 0 \quad \forall t \Longrightarrow B = 0$$

y ① queda:

$$\xi = A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t$$

si $x = L$

$$\xi(x=L) = A \operatorname{sen} kL \operatorname{sen} \omega t = 0 \quad \forall t$$

$$\Longrightarrow kL = n\pi \quad \text{o} \quad \boxed{\lambda = \frac{2L}{n}}$$

2) Veamos ahora las condiciones de ondas estacionarias en tubos de órgano (tubo de aire). Si tenemos un tubo abierto en ambos lados $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \ \text{y} \ x = L$$

Luego:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = k\left(A \cos kx - B \operatorname{sen} kx\right) \operatorname{sen} \omega t$$

Haciendo $x = 0 \Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=0} = k A \operatorname{sen} \omega t = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow A = 0$$

y $$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -k B \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t \quad \text{si}$$

$x = L \Rightarrow \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=L} = 0 = -k B \operatorname{sen} kL \operatorname{sen} \omega t$ y

$$kL = n\pi \quad \text{ó} \quad \lambda = 2L/n$$

y las frecuencias de las ondas estacionarias son

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda} = n\left(\frac{v}{2L}\right) = \nu_1 ; 2\nu_1 , 3\nu_1$$

Entonces:

$$\xi = B \cos kx \operatorname{sen} \omega t .$$

Concluimos entonces que las oscilaciones de una columna de aire abierto en ambos extremos son equivalentes a las de una cuerda con ambos extremos fijos pero las posiciones de los nodos y antinodos están intercambiados.

3) Si ahora tenemos un tubo con el extremo de la boquilla abierto y el opuesto cerrado $\Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad y \quad \xi(x=L) = 0$$

con

$$\xi = (A \operatorname{sen} kx + B \cos kx) \operatorname{sen} \omega t$$

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

Luego:

$$\xi = B \cos kx \operatorname{sen} \omega t$$

si $\xi(x=L) = 0 = B \cos kL \operatorname{sen} \omega t = 0 \quad \forall t$

luego $\quad kL = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad$ ó $\quad \lambda = \frac{4L}{2n+1}$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = (2n+1)\frac{v}{4L} = \nu_1,\ 3\nu_1,\ 5\nu_1$$

O sea los modos de vibración son diferentes a los dados por las ecuaciones anteriores.