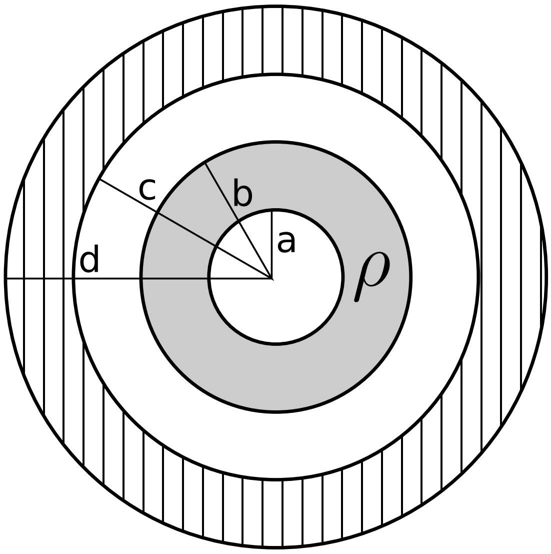
Problema 1

Un casquete esférico de radio menor a, radio mayor b y densidad volumétrica de carga ρ está rodeado concéntricamente por un casquete esférico conductor de radio menor c y radio mayor d.

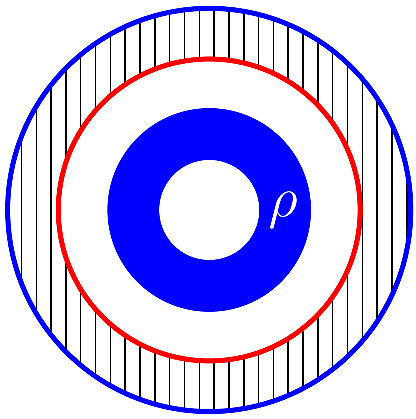


(a) ¿Se reordenan las cargas del conductor? Justifique. En caso de que sí, describa cómo se distribuyen.

Las cargas dentro de un conductor pueden moverse libremente y, en situación estática, se reacomodarán para satisfacer la condición de que el campo eléctrico en su interior sea nulo. Por lo tanto, en este caso la distribución de carga ρ generará un campo eléctrico que deberá ser compensado por el generado por la distribución de cargas del conductor.

En esa situación, como el campo es nulo, el flujo del mismo a través de cualquier superficie de Gauss también lo será; por lo tanto, sé que siempre estaré encerrando carga nula. Entonces no hay más alternativa que que en la superficie interna $r = c$ se depositen tantas cargas como las presentes en la distribución volumétrica $a < r < b$, pero con el signo contrario: si el casquete central tiene carga Q, en $r = c$ habrá $-Q$. De esta forma, cualquier superficie dentro del conductor encierra carga nula.

Además, como inicialmente la carga neta del conductor es cero y éste se encuentra aislado, éstas cargas deberán verse compensadas por otras $+Q$ que sólo podrán depositarse en la superficie externa $r = d$. De esta forma, cualquier superficie por fuera del conductor encierra carga Q.



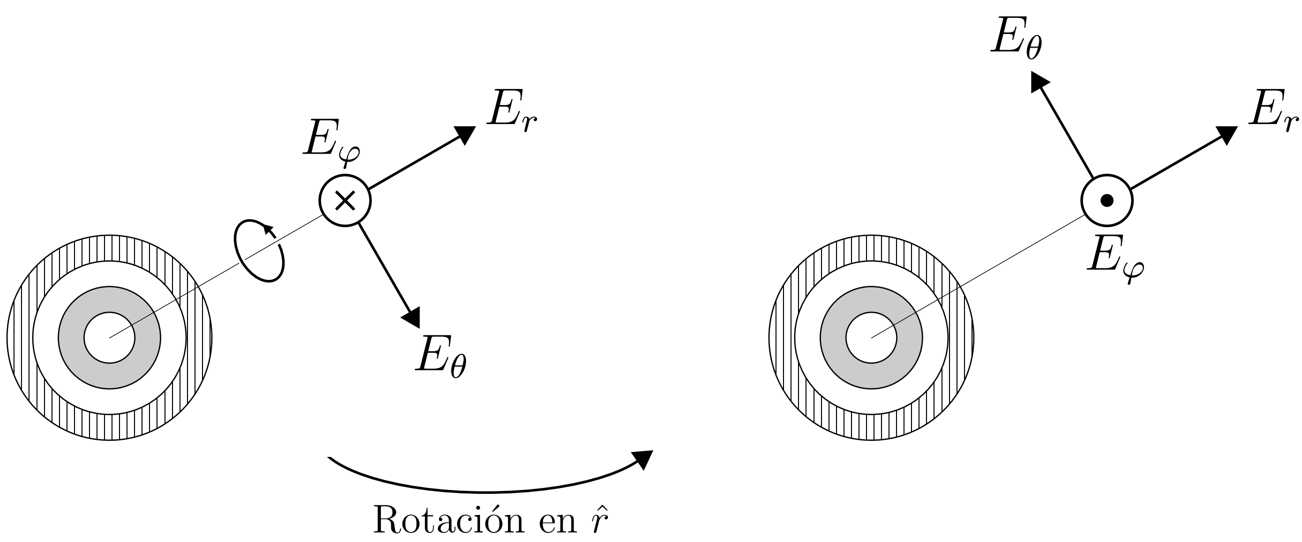
En la figura, azul y rojo representan signos distintos: si $\rho >0$, en $r = c$ habrá $\sigma_c <0$, y en $r = d$ habrá $\sigma_d >0$; si $\rho <0$, en $r = c$ habrá $\sigma_c >0$, y en $r = d$, habrá $\sigma_d <0$. Todos los demás puntos del espacio tienen carga nula.

(b) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio. Si utiliza argumentos de simetría, justifíquelos.

Para encontrar el campo eléctrico voy a utilizar el teorema de Gauss. Para poder usarlo de manera útil, necesito elegir una superficie que respete las simetrías del campo: para que el producto $\vec{E}\cdot\vec{dS}$ sea fácil, quiero que las líneas de campo sean tangenciales a la superficie, o que la atraviesen de manera perpendicular. Para ello, utilicemos argumentos de simetría y descartemos direcciones en las que el campo no puede apuntar. Por la simetría de la distribución, elijo trabajar en coordenadas esféricas, llamando r a la coordenada radial, θ al ángulo polar y φ al azimutal.

Primero, es directo ver que el campo va a depender exclusivamente de r: variar mis coordenadas θ y φ es equivalente a rotar mi esfera en cualquier dirección, manteniendo el punto campo a distancia fija del centro de la misma. Y como mi distribución de cargas es completamente simétrica ante rotaciones, el campo generado por ellas no se ve modificado por dicha rotación; por lo tanto, el campo no depende de las coordenadas θ y φ. Entonces puedo afirmar que $\vec{E}(r,\theta,\varphi)=\vec{E}(r)=E_r(r)\hat{r}+E_\theta(r)\hat{\theta}+E_\varphi(r)\hat{\varphi}$. Por ende, cualquier punto a distancia r del centro de mi configuración es equivalente a cualquier otro punto a la misma distancia.

Pero al efectuar una rotación de 180^o alrededor del eje $\hat{r}$, ahora $E_\theta(r)=-E_\theta(r)$ y $E_\varphi(r)=-E_\varphi(r)$. La única forma de lograr esto es si ambas componentes son nulas y, por lo tanto, $\vec{E}=E_r(r)\hat{r}$.



Ahora sí, podemos utilizar fácilmente el teorema de Gauss, utilizando una superficie esférica:

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o}=\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS}=\oiint E(r)\hat{r}\cdot r^2\sin\theta d\theta d\varphi\hat{r}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}E(r)r^2\sin\theta d\theta d\varphi=4\pi r^2E(r)$$

Y, por lo tanto,

$$E(r)=\frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Luego, notamos que para distintos valores de r encerramos distinta cantidad de carga:

- Para $0 < r < a$ no encerramos nada.

- Para $a < r < b$, encerramos una parte del casquete cargado: $\rho\frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)$.

- Para $b < r < c$, encerramos todo el casquete cargado: $\rho\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)$.

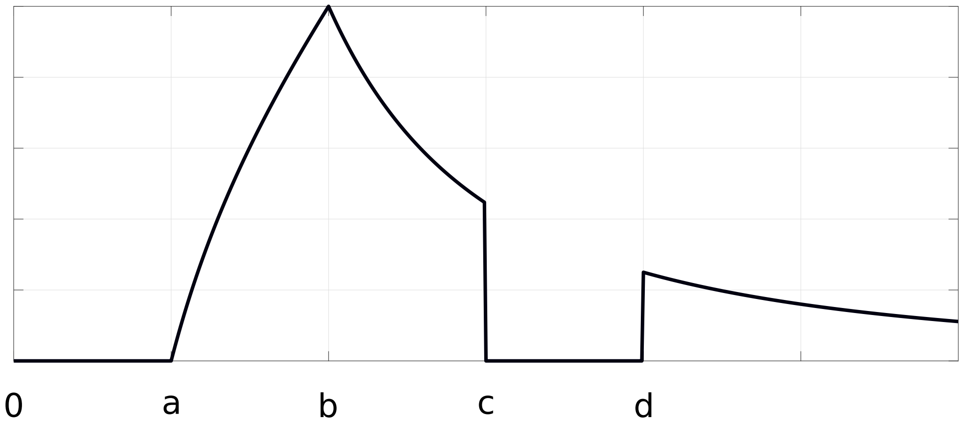
- Para $c < r < d$, encerramos el casquete cargado y la carga superficial depositada en $r = c$. Como la segunda compensa a la primera para anular el campo en el seno del conductor, sé que no encierro carga neta.

- Para $d < r < \infty$, encerramos el casquete cargado y las cargas superficiales depositadas en $r = c$ y $r = d$. Pero como la carga neta del conductor es nula, sé que la carga en $r = d$ compensa a la de $r = c$. Entonces, la carga encerrada neta es la del casquete cargado volumétricamente: $\rho\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)$.

Por lo tanto, el campo eléctrico para cada punto del espacio es:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } 0 < r < a \\ \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\varepsilon_o r^2}\hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o r^2}\hat{r} & \text{si } b < r < c \\ \vec{0} & \text{si } c < r < d \\ \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o r^2}\hat{r} & \text{si } d < r < \infty \end{cases}$$

En un gráfico simple, para a, b, c y d equidistantes, este campo en función de la coordenada r es aproximadamente



(c) Encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio.

Calculamos el potencial a partir de la definición de diferencia de potencial entre dos puntos $\vec{r}$ y $\vec{r_o}$ sobre una curva l:

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r_o}) = -\int_{\vec{r_o}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

En nuestro caso, la única variable relevante es r, por lo que integro sobre esa dirección y obtengo que

$$V(r) - V(r_o) = -\int_{r_o}^{r} E(r')\hat{r}dr'\hat{r} = -\int_{r_o}^{r} E(r')dr'$$

Como el campo es finito, necesito que el potencial sea continuo. Por lo tanto, es necesario ir concatenando las expresiones del potencial para cada zona. Colocaré los r_o en el extremo de mayor r de cada zona: la cuenta da lo mismo al elegir cualquier referencia, pero como pienso empezar por $r \to \infty$ e irme moviendo hacia menores valores de r, elegir estos r_o facilita el proceso.

- En $d < r < \infty$, obtenemos que

$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o r'^2} dr' = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o} \frac{1}{r'}\bigg|_{\infty}^{r} = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right)$$

Pero como definimos $V(\infty) = 0$, nos termina quedando que

$$V(d < r < \infty) = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o} \frac{1}{r}$$

- En $c < r \leq d$,

$$V(r) - V(d) = -\int_{d}^{r} 0dr' = C_1$$

Pero la única forma de que eso valga para todo $c < r < d$ es con $C_1 = 0$. Además, por continuidad del potencial sabemos que $V(d)$ será lo que vale el potencial según la expresión encontrada para $d < r < \infty$. Por lo tanto,

$$V(c < r \leq d) = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o} \frac{1}{d}$$

- En $b < r \leq c$,

$$V(r) - V(c) = -\int_{c}^{r} \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o r'^2} dr' = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o} \frac{1}{r'}\bigg|_{c}^{r} = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c}\right)$$

Imponiendo continuidad de la misma manera, $V(c) = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_o}\frac{1}{d}$ y, por lo tanto,

$$V(b < r \leq c) = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_o} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

- En $a < r \leq b$,

$$V(r) - V(b) = -\int_b^r \frac{\rho(r'^3 - a^3)}{3\varepsilon_o r'^2} dr' = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{r'^2}{2} + \frac{a^3}{r'}\right)\Bigg|_b^r = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{r} - \frac{a^3}{b}\right)$$

Imponiendo continuidad, $V(b) = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_o}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ y, por lo tanto,

$$V(a < r \leq b) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[-\frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r} + \frac{3b^2}{2} + (b^3 - a^3)\left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\right]$$

- En $0 \leq r \leq a$,

$$V(r) - V(a) = -\int_a^r 0 dr' = C_2$$

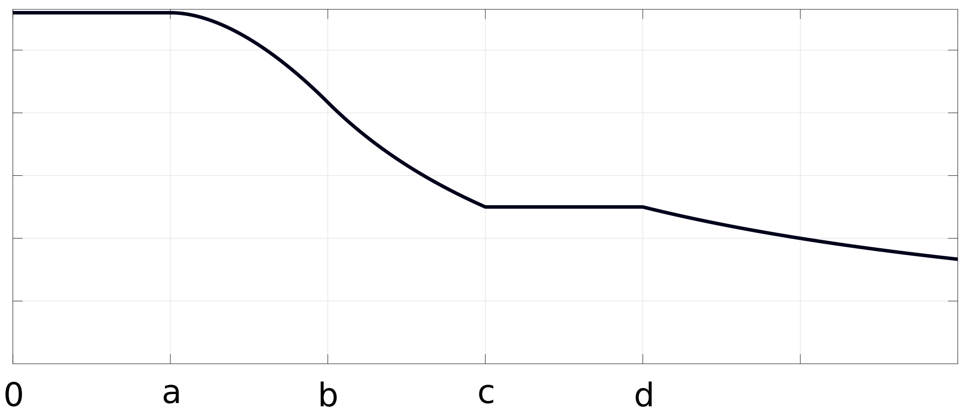
Nuevamente, la única forma de que eso valga para todo $a < r < b$ es con $C_2 = 0$. Y por continuidad $V(a)$ será evaluar $V(a < r \leq b)$. Por lo tanto,

$$V(0 \leq r \leq a) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[\frac{3}{2}(b^2 - a^2) + (b^3 - a^3)\left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\right]$$

Entonces, juntando todos estos resultados,

$$V = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[\frac{3}{2}(b^2 - a^2) + (b^3 - a^3)\left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\right] & \text{si } 0 < r < a \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[-\frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r} + \frac{3b^2}{2} + (b^3 - a^3)\left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\right] & \text{si } a < r < b \\ \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) & \text{si } b < r < c \\ \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_o}\frac{1}{d} & \text{si } c < r < d \\ \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_o}\frac{1}{r} & \text{si } d < r < \infty \end{cases}$$

En un gráfico simple, para a, b, c y d equidistantes, este potencial en función de la coordenada r es aproximadamente



Notar especialmente los quiebres en $r = c$ y $r = d$: una derivada de V discontinua implica un campo eléctrico discontinuo, denotando la presencia de las densidades superficiales de carga en las caras del conductor.

(d) Sin necesidad de rehacer todas las cuentas:

i. ¿Cómo cambia el inciso (a) si se llena el espacio vacío entre casquetes con un material dieléctrico de permitividad ε?

Para contemplar materiales con constante dieléctrica distinta a la del vacío, uno debe tener en cuenta que la reorientación de sus moléculas provoca un apantallamiento del campo eléctrico. Esto se materializa al cambiar la constante ε_o por la correspondiente ε en la zona afectada. Por lo tanto, ahora $\vec{E}(b < r < c) = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon^2}\hat{r}$.

Notar que el campo en $0 < r < b$ no cambia porque no cambia la configuración encerrada, y que en $c < r < \infty$ tampoco, porque la carga neta dieléctrico es nula.

ii. ¿Cómo cambia el inciso (b) si el conductor es conectado a tierra; es decir, si se le fija su potencial a cero?

Conectar el conductor a tierra es equivalente a conectarlo a un potencial muy lejos de la configuración de interés. Como definimos que el potencial en el infinito es cero, conectar el conductor a tierra será fijar V($c < r < d$)=0. Notar que esto no significa que estemos fijando $V(r = c)$ y $V(\infty)$, ambos como referencia. Lo que sucede es que "conectar a tierra" es "conectar al infinito". Y esto es independiente de qué referencia tomamos: el potencial no tiene por qué estar necesariamente referenciado a su valor en el infinito.

Esto trae dos consecuencias directas:

- Como V(∞) sigue siendo cero, ya no existe diferencia de potencial entre el infinito y $r = d$. Por lo tanto, V($c < r < \infty$)=0. Nótese que esto significa que $\vec{E}$=0 en $c < r < \infty$: esto es posible porque ahora el conductor no está aislado y adquirió una carga neta $-Q$ que apantalla la carga en $a < r < b$.
- Los potenciales en $0 < r < c$ se encontraban referenciados a V(c). Como éste ahora vale cero, por continuidad V($0 < r < c$) se verá disminuido en una cantidad igual a lo que valía el potencial en $r = c$ antes de conectar el conductor a tierra: a la expresión que encontramos hay que restarle $V(c) = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_o}\frac{1}{d}$.