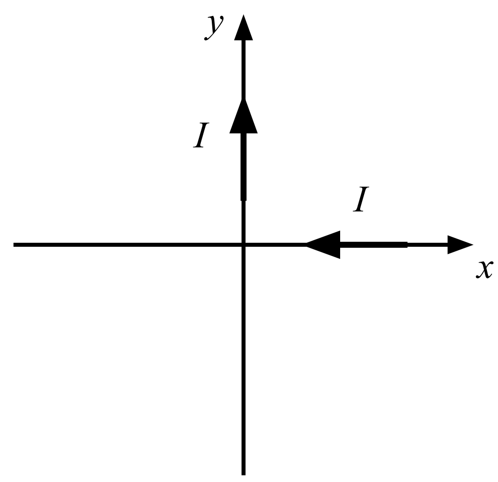
Ejercicio 2

Dos cables delgados, rectos e infinitos que transportan una corriente I se cruzan en forma perpendicular sobre un plano como muestra la figura. Los cables están aislados y no se tocan al cruzarse. Suponga que uno de los cables coincide con el eje X y el otro con el eje Y.



Idea general

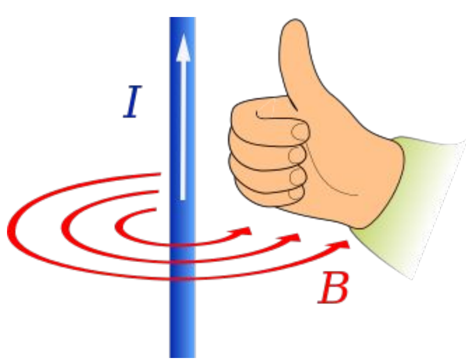
La forma más fácil de resolver los ítems a y b es hallar el campo magnético para un solo hilo, y luego superponer (es decir, <u>sumar</u>) ambas soluciones, teniendo en cuenta que ambos hilos son perpendiculares. Como cada hilo es infinito, se puede usar Ampère para hallar su campo (no hace falta hallar el de cada uno, basta con hallar uno solo y ver cómo cambia la solución al rotar el hilo 90º).

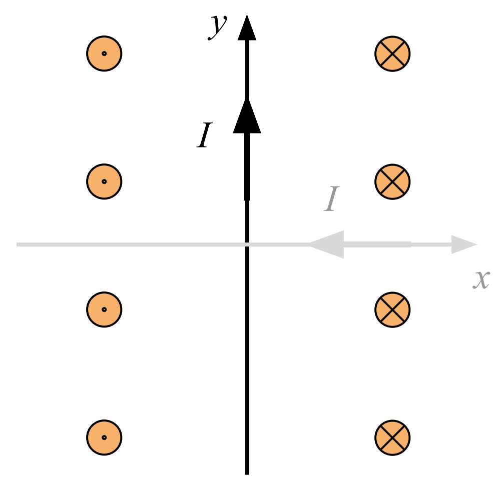
Para el ítem c hay que ver en qué puntos del espacio el campo magnético <u>neto</u> es nulo. En dichos puntos no habrá fuerza neta aplicada sobre la carga, por lo tanto no sufrirá ninguna aceleración, por lo tanto la partícula realizará un MRU (ver primera ley de Newton)

a) Empleando argumentos de simetría, determine la dirección del campo magnético en todos los puntos del plano XY.

Para comenzar, analizamos lo que ocurre para cada hilo por separado. Como solo nos piden la dirección, basta con usar la regla de la mano derecha. Además, solo nos interesa lo que ocurre en el plano XY.

Para el hilo vertical, la regla de la mano derecha nos da lo siguiente:

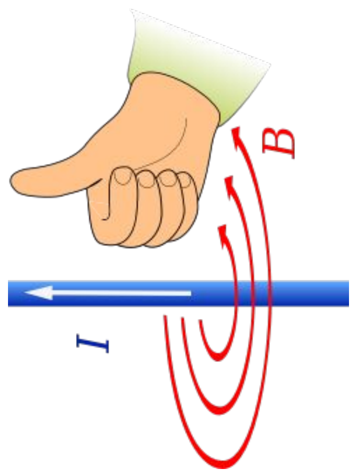


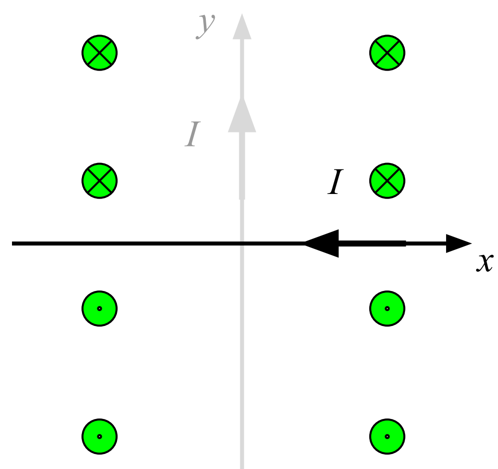


Es decir, el campo tiene dirección en z, y su sentido es negativo para $x > 0$ y positivo para $x < 0$ (recordar la diferencia entre dirección y sentido).

a) Empleando argumentos de simetría, determine la dirección del campo magnético en todos los puntos del plano XY.

Para el hilo horizontal tenemos algo muy similar, el campo tiene la misma dirección que antes, pero el sentido depende de la coordenada y:

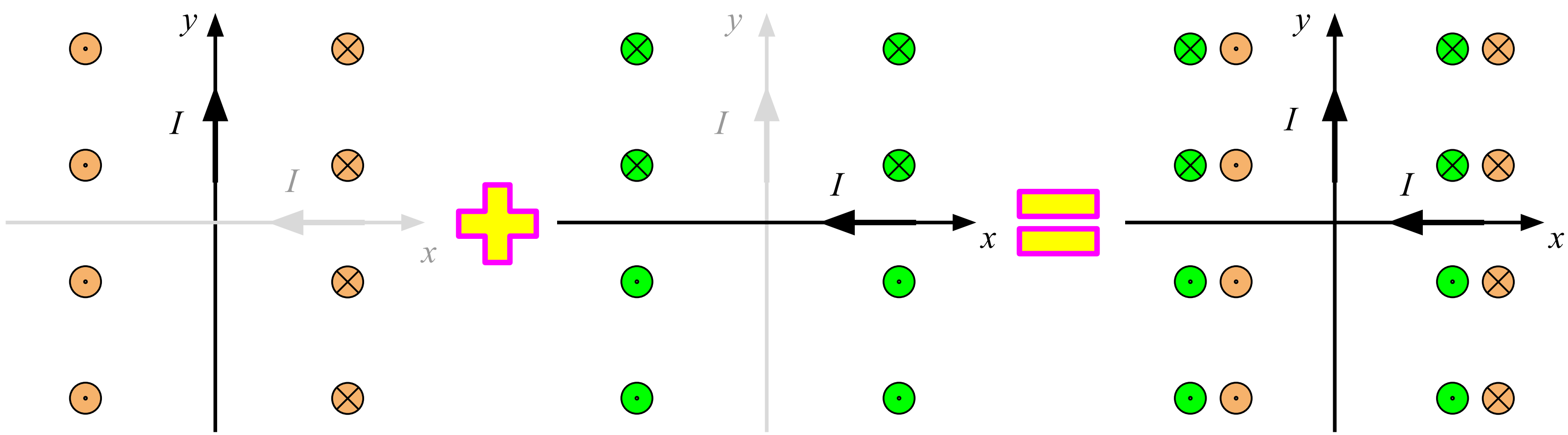




Es decir, el campo tiene dirección en z, y su sentido es negativo para y > 0 y positivo para y < 0.

a) Empleando argumentos de simetría, determine la dirección del campo magnético en todos los puntos del plano XY.

Como ambas contribuciones apuntan en z, la superposición (suma) de ambas también tendrá dirección z:



Con esto queda respondida la pregunta. Como bonus, podemos ver que en los cuadrantes 1 y 3 ambos hilos contribuyen con un campo en el mismo sentido, mientras que en los cuadrantes 2 y 4 los sentidos son opuestos. Podemos anticipar que en estos cuadrantes prevalecerá el sentido del campo del hilo que se encuentre más cerca, y que en puntos equidistantes a ambos hilos el campo será nulo (lo usaremos en el ítem c).

b) Calcule el campo magnético B(x, y) en todos los puntos del plano XY.

Ahora debemos hallar la expresión matemática para el campo total. Usaremos la solución conocida para el campo de un hilo expresada en coordenadas cilíndricas alrededor del hilo (es decir, tomando *z* de cilíndricas coincidente con el hilo):

$$B(r)=\boxed{\frac{\mu_0 i}{2\pi r}}\boxed{\hat{\theta}}$$

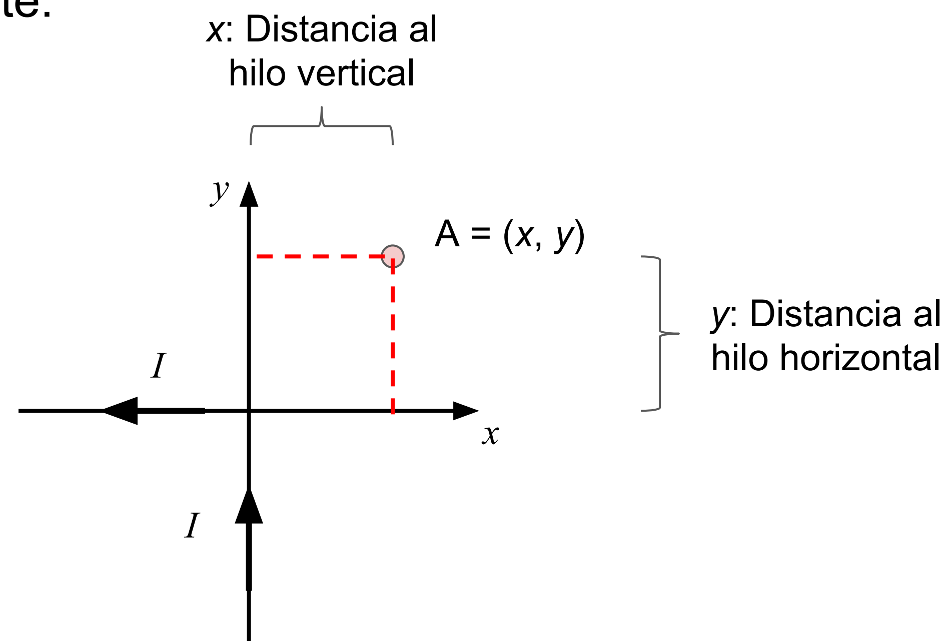
Ver al final la cuenta con Ampère

De esta solución solo nos vamos a quedar con la parte escalar, ya que la vectorial (dirección y sentido) la analizamos para responder el ítem a. Debemos identificar cómo se traduce "r", desde la solución de un hilo en todo el espacio, a nuestro problema que solo pide la solución en el plano XY. Es decir, debemos identificar las coordenadas de la solución general con las de nuestro problema restringido.

Si nos pidieran el campo en todo el espacio, otra sería la historia (para las coordenadas y también para la parte vectorial, por ej., deberíamos definir un tita para cada hilo - tedioso pero se puede escribir con paciencia).

b) Calcule el campo magnético B(x, y) en todos los puntos del plano XY.

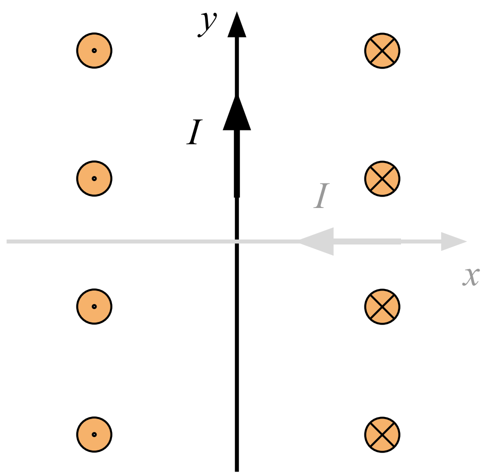
“r” es la distancia más corta desde el punto campo al hilo. En nuestro problema, la distancia desde un punto del espacio a cada hilo está dada por sus coordenadas *x* e *y*. Veámoslo gráficamente:



Por lo tanto, el campo del hilo vertical dependerá de la coordenada x, mientras que el campo del hilo horizontal dependerá de la coordenada y (ya que ambas corresponden al r de cilíndricas respecto a cada hilo).

b) Calcule el campo magnético B(x, y) en todos los puntos del plano XY.

Apliquemos esto a cada hilo por separado => Hilo vertical (B_V)

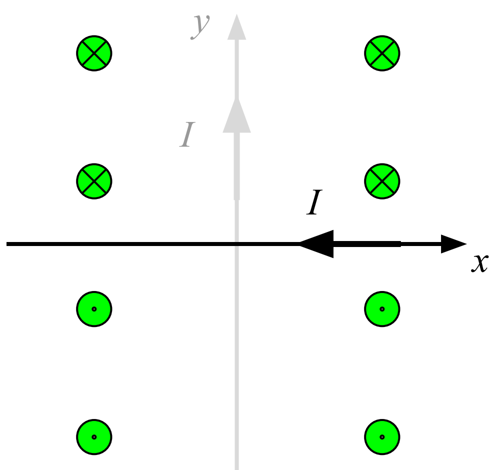


$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\theta} \Rightarrow B_V(x) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{z}$$

Este campo (B_V) apunta en **z**. Agregamos el signo menos para asegurar que el campo sea positivo para x < 0 y negativo para x > 0.

b) Calcule el campo magnético B(x, y) en todos los puntos del plano XY.

Apliquemos esto a cada hilo por separado => Hilo horizontal (B_H)



$$B(r)=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\theta} \Rightarrow B_H(y)=-\frac{\mu_0 i}{2\pi y}\hat{z}$$

Este campo (B_H) apunta en **z**. Igual que en el caso anterior, el signo menos asegura que la expresión coincida con la figura (negativo para y > 0 y positivo para y < 0).

b) Calcule el campo magnético B(x, y) en todos los puntos del plano XY.

El resultado final es la suma de ambas contribuciones:

$$B_{TOT}(x, y) = B_H(y) + B_V(x)$$

$$B_H(y) + B_V(x) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi y}\hat{z} - \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{z}$$

Con esto ya respondimos el ítem b.

La solución se puede escribir de forma más compacta:

$$B_{TOT}(x, y) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\hat{z}$$

c) Escriba la fuerza que siente una partícula cargada que se mueve en este campo si su vector velocidad se encuentra en el plano XY. ¿Existe una trayectoria en el plano XY en la que el movimiento sea un movimiento rectilíneo uniforme? Es decir, ¿una trayectoria en la que la partícula cargada se mueve en línea recta sin desviarse? Justifique su respuesta.

La fuerza de Lorentz se define como **F** = **v** × **B** (producto vectorial)

Si **v** = v_x **x** + v_y **y**, tenemos (teniendo en cuenta que la velocidad no es, en principio, necesariamente constante):

$$\mathbf{F} = (v_x(t)\,\mathbf{x} + v_y(t)\,\mathbf{y}) \times B(x, y)\,\mathbf{z} = B(x, y)\,(v_x(t)\,\mathbf{x} \times \mathbf{z} + v_y(t)\,\mathbf{y} \times \mathbf{z})$$

$$\mathbf{F} = B(x, y)\,(\,-\,v_x(t)\,\mathbf{y} + v_y(t)\,\mathbf{x})$$

De esta expresión podemos ver dos cosas de interés para la respuesta:

1. La fuerza es paralela al plano XY (como $v_z = 0$, permanecerá así para todo t)
2. La fuerza es proporcional a B(x, y). De modo que si, para alguna posición, B(x, y) = 0, la fuerza será nula.

Por lo tanto, para que tengamos un MRU podemos empezar por preguntarnos si el campo puede ser nulo en alguna parte del plano XY. (Recordar la condición necesaria para MRU…)

c) Escriba la fuerza que siente una partícula cargada que se mueve en este campo si su vector velocidad se encuentra en el plano XY. ¿Existe una trayectoria en el plano XY en la que el movimiento sea un movimiento rectilíneo uniforme? Es decir, ¿una trayectoria en la que la partícula cargada se mueve en línea recta sin desviarse? Justifique su respuesta.

Entonces planteemos que B_{TOT} sea cero:

$$B_{TOT}(x, y)=0=-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\hat{z}$$

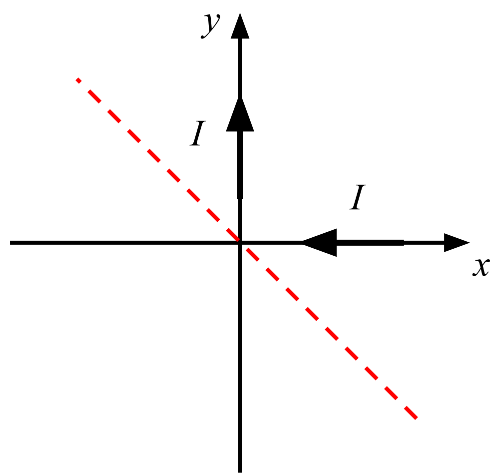
$$0=-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$$

De donde se puede ver fácilmente que la solución es $y = -x$.

Esta ecuación corresponde a todos los puntos a lo largo de una recta de pendiente -1 que pasa por el origen. Si nuestra partícula ingresa al campo moviéndose a lo largo de esa recta, no experimentará ninguna fuerza magnética, por lo tanto mantendrá su estado de movimiento.

c) Escriba la fuerza que siente una partícula cargada que se mueve en este campo si su vector velocidad se encuentra en el plano XY. ¿Existe una trayectoria en el plano XY en la que el movimiento sea un movimiento rectilíneo uniforme? Es decir, ¿una trayectoria en la que la partícula cargada se mueve en línea recta sin desviarse? Justifique su respuesta.

Veámoslo gráficamente:



Si la posición inicial de la partícula es $(x_0, -x_0)$ y su velocidad es paralela a esa recta (ej: $v_0\mathbf{x} - v_0\mathbf{y}$), la fuerza sobre la partícula será 0, y como la velocidad hace que la partícula se mueva "dentro de la recta" (y no hay fuerzas externas para cambiar eso), la misma nunca experimentará un campo magnético no nulo.

Notar que, si alguna condición difiere (ya sea para posición o velocidad), la partícula entrará a alguna región con campo B no nulo, y comenzará a moverse "enroscándose en el campo", pero como B no es uniforme, el movimiento no será necesariamente circular.

c) Escriba la fuerza que siente una partícula cargada que se mueve en este campo si su vector velocidad se encuentra en el plano XY. ¿Existe una trayectoria en el plano XY en la que el movimiento sea un movimiento rectilíneo uniforme? Es decir, ¿una trayectoria en la que la partícula cargada se mueve en línea recta sin desviarse? Justifique su respuesta.

Matemáticamente, hay que plantear un MRU con las condiciones dichas anteriormente:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\, t = (x_0\, \mathbf{x} - x_0\, \mathbf{y}) + (v_0\, \mathbf{x} - v_0\, \mathbf{y})\, t = (x_0 + v_0\, t)\, \mathbf{x} - (x_0 + v_0\, t)\, \mathbf{y} = x(t)\, \mathbf{x} + y(t)\, \mathbf{y}$$

Donde:

$$x(t) = x_0 + v_0\, t$$

$$y(t) = -(x_0 + v_0\, t) = -x(t)$$

Como $x(t) = -y(t)$, basta con reemplazar en la expresión del campo para ver que el mismo es nulo a lo largo de toda esta trayectoria. Por lo tanto la partícula permanecerá en dicha trayectoria indefinidamente.

Campo de un hilo obtenido mediante ley de Ampère

Solo las partes más importantes del razonamiento (para un hilo en **z** y usando cilíndricas):

- Dirección en tita versor por regla de mano derecha. (También se puede ver por Biot-Savart tomando corrientes infinitesimales).
- El campo no depende de z por simetría de traslación en z (hilo infinito)
- El campo no depende de tita por simetría de rotación alrededor de z.

Por lo tanto **B**(x, y, z) = B(r) **tita**

Luego cualquier trayectoria circular de radio r centrada en **z** nos permite calcular la circulación del campo fácilmente:

El campo es constante en la trayectoria por lo tanto sale de la integral (junto con la r del Jacobiano)

Perímetro de la trayectoria

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl}=\int_0^{2\pi} B(r)(\vec{\theta}\cdot\vec{\theta})r\,d\theta=\boxed{B(r)r}\boxed{\int_0^{2\pi} d\theta}=\boxed{2\pi r}B(r)$$

Y la corriente concatenada (o encerrada) por la trayectoria es sencillamente +i (ya que la trayectoria es antihoraria) (Para pensar, ¿qué ocurre si la tomamos antihoraria? Pista: el campo debe dar siempre igual).

Campo de un hilo obtenido mediante ley de Ampère

Por lo tanto: B(r) 2 pi r = mu_0 i => B(r) = mu_0 i / (2 pi r)

=> **B**(r) = mu_0 i / (2 pi r) **tita**

$$B(r)=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\theta}$$

Descartes a partir de aquí

b) Calcule el campo magnético B(x, y) en todos los puntos del plano XY.

Ahora debemos hallar la expresión matemática para el campo total. Usaremos la solución conocida para el campo de un hilo expresada en coordenadas cilíndricas alrededor del hilo (es decir, tomando *z* de cilíndricas coincidente con el hilo):

$$B(r)=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\theta}$$

Ver al final la cuenta con Ampère

Debemos adaptar esta solución a nuestro problema, empezando por no mezclar ejes y coordenadas (en nuestro problema, *z* no coincide con ningún hilo, ya que los hilos están en *x* e *y*). Para esto hay que identificar las coordenadas de la solución general con las de nuestro problema. Como el ejercicio nos pide el campo restringido al plano XY, tita (de cilíndricas) coincide con ± z (esto ya lo argumentamos en el ítem a), mientras que r (de cilíndricas) será la distancia a cada hilo.

Si nos pidieran el campo en todo el espacio, deberíamos definir un tita para cada hilo (tedioso pero se puede escribir).