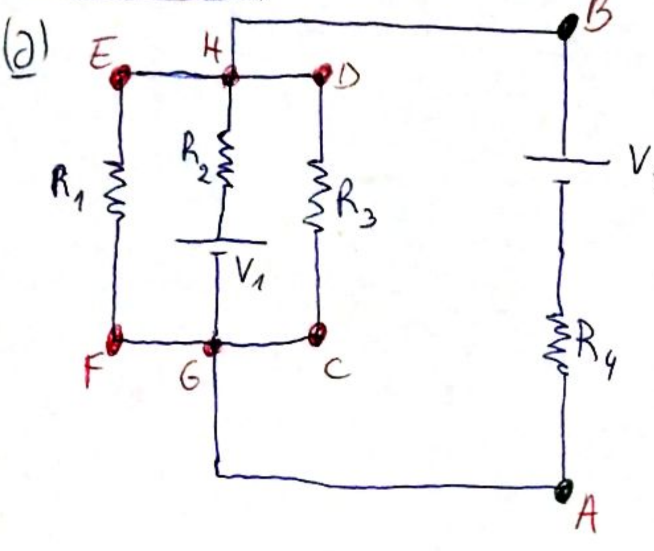
Problema 3

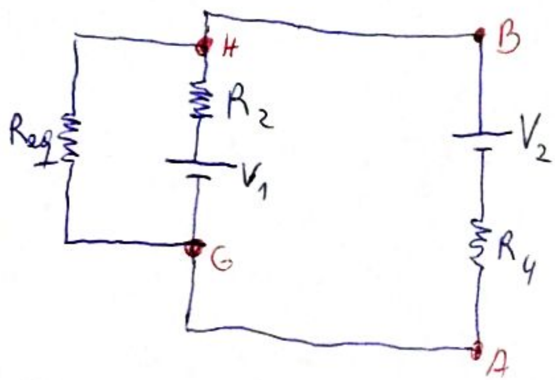
(a)



Notemos que R_1 y R_3 son dos resistencias que se encuentran en paralelo ($V_C = V_F$ y $V_D = V_E$). Entonces, puedo reemplazarlas por una única resistencia R_{eq}, con $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{2}{R}$

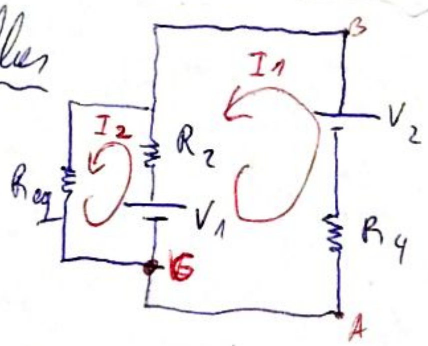
$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{2}$$

Luego, el circuito equivalente que me queda es el siguiente:



Esto puede resolverse por ramas o por mallas.

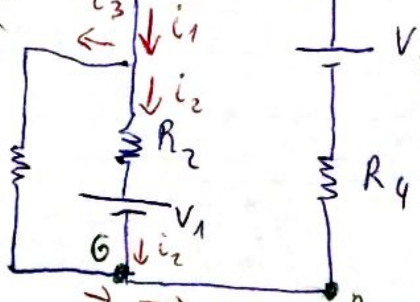
Mallas



- $V_A - I_1 R_4 + V_2 - R_2 I_1 + R_2 I_1 - V_1 = V_A$
- $V_G + V_1 - R_2 I_2 + R_2 I_1 - R_{eq} I_2 = V_G$

$\Rightarrow I_1 = \frac{V}{2R}$ y $I_2 = \frac{V}{R}$

Ramas



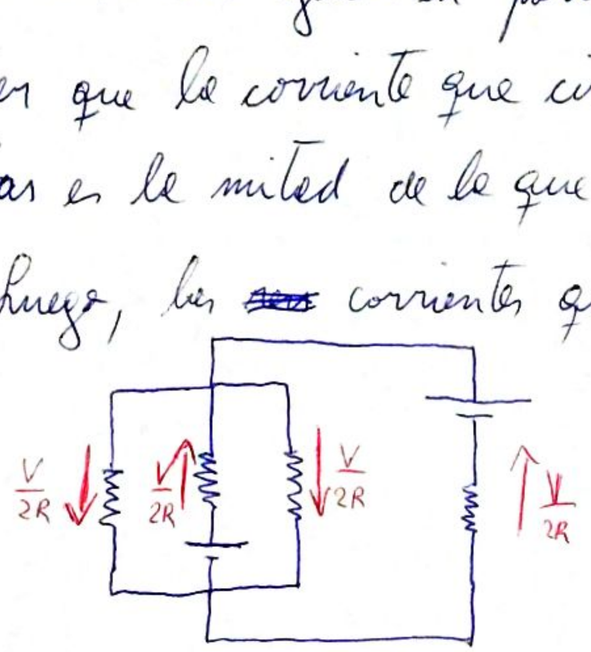
- $i_1 = i_2 + i_3$
- $V_A - R_4 i_1 + V_2 - R_2 i_2 - V_1 = V_A$
- $V_G + V_1 + R_2 i_2 - R_{eq} i_3 = V_G$

$\Rightarrow i_1 = \frac{V}{2R}$; $i_2 = -\frac{V}{2R}$; $i_3 = \frac{V}{R}$

Como i_2 es negativa, va para el lado opuesto al que propusimos.

Además, en ambos casos (mallas y ramas), R_{eq} viene a reemplazar dos resistencias iguales en paralelo, por lo que es razonable plantear que la corriente que circula en cada una de las resistencias es la mitad de la que circula por R_{eq}.

Luego, las ~~...~~ corrientes que circulan por las resistencias valen todas $\frac{V}{2R}$, y tienen las direcciones mostradas en la figura.

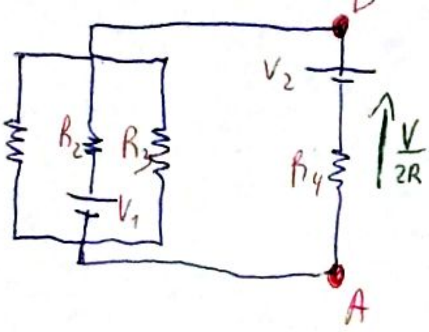


(b) La potencia que entregan las fuentes es $P_{\varepsilon_1} = P_{\varepsilon_2} = V \cdot I = \frac{V^2}{2R}$, donde V es la subida de potencial que da la fuente e I es la corriente que la atraviesa.

La potencia disipada por efecto Joule en las resistencias es
$P_{R_1} = P_{R_2} = P_{R_3} = P_{R_4} = V \cdot I = R I^2 = \frac{V^2}{4R}$.

Vemos además que $P_{entregada} - P_{disipada} = 2 \cdot \frac{V^2}{2R} - 4 \cdot \frac{V^2}{4R} = 0$, que indica que toda la energía entregada es disipada por las resistencias.

(c)



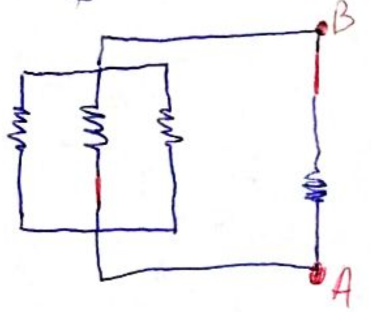
Sabemos que $V_{Th} = V_B - V_A = V_{AB}$

Entonces, $V_A - R_4 \cdot \frac{V}{2R} + V_2 = V_B$

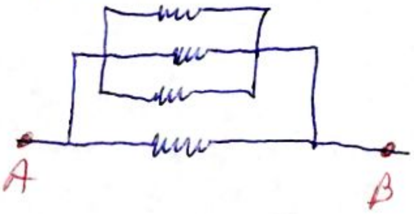
$$V_B - V_A = -R \cdot \frac{V}{2R} + V = \frac{V}{2}$$

Entonces, $\boxed{V_{Th} = \frac{V}{2}}$.

Para calcular R_{Th}, cortocircuitamos todas las fuentes. Termina quedando el siguiente circuito:



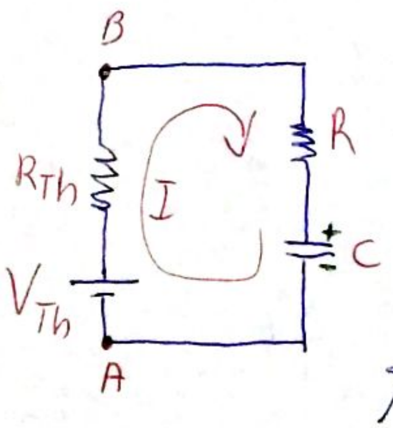
$\equiv$



Estas son cuatro resistencias en paralelo. Entonces,

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{4}{R} \Rightarrow \boxed{R_{Th} = \frac{R}{4}}$$

(d) Para este punto, utilizamos el circuito equivalente de Thevenin.



$$\cancel{V_A} + V_{Th} - R_{Th} \cdot I - RI - \frac{Q}{C} = \cancel{V_A}^{0}$$

$$V_{Th} = (R_{Th} + R)\, I + \frac{Q}{C}$$

Por la forma en que elegimos las placas del capacitor ("+" arriba y "-" abajo), vemos que cuando I es positiva, la placa "+" se carga, o sea, Q aumenta. Entonces, $\dot{Q} = I$. Luego,

$$V_{Th} = (R_{Th}+R)\,\dot{Q} + \frac{Q}{C}$$

Proponemos una solución del tipo $Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t)$, donde Q_h es la solución homogénea y Q_p una solución particular.

$\boxed{Q_p}$ Proponemos $Q_p = cte \Rightarrow V_{Th} = \cancel{(R_{Th}+R)\cdot \underbrace{\dot{Q}_p}_{=0}} + \frac{Q_p}{C}$

$$\Rightarrow Q_p = C\,V_{Th}$$

$\boxed{Q_h}$ Proponemos $Q_h = A e^{\lambda t} \Rightarrow 0 = (R_{Th}+R)\,\dot{Q}_h + \frac{Q_h}{C}$

$$\dot{Q}_h = -\frac{1}{(R_{Th}+R)\,C}\,Q_h$$

$$A\lambda \cancel{e^{\lambda t}} = -\frac{1}{(R_{Th}+R)\,C}\cdot \cancel{A e^{\lambda t}}$$

$$\lambda = -\frac{1}{(R_{Th}+R)\,C}$$

Entonces, $Q = A\, e^{-\frac{t}{(R_{Th}+R)C}} + C\cdot V_{Th}$. Falta determinar A. Ahora bien, si el capacitor empieza descargado, $Q(t=0)=0$. Entonces,

$$0 = A\cdot \underbrace{e^{-\frac{0}{(R_{Th}+R)C}}}_{=1} + C\,V_{Th} \Rightarrow A = -C\,V_{Th}$$

De esta forma, vemos que $\boxed{Q(t) = V_{Th}C\cdot\left[1 - e^{-\frac{t}{(R_{Th}+R)\,C}}\right]}$