Problema 2

La intensidad para un conjunto de rendijas uniformemente iluminadas viene dada por

$$I(\theta) = I_0 \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta}\right)^2}_{\text{difracción}} \underbrace{\left[\frac{\operatorname{sen}\left(N\frac{\delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right]^2}_{\text{interferencia}}, \quad \text{donde } \beta = \frac{KD\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$\text{y} \quad \frac{\delta}{2} = \frac{Kd\operatorname{sen}\theta}{2}$$

De esta forma, los máximos de interferencia ~~se~~ se encuentran en $\frac{\delta}{2} = m_I\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, mientras que los mínimos de difracción, en $\beta = m_D\pi$, $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

(a) $\frac{\delta}{2} = m_I\pi = 10\pi$

$$\frac{K_a d}{2}\operatorname{sen}\theta = 10\pi \implies \boxed{d = \frac{10\cancel{\pi}}{\frac{\cancel{2}\cancel{\pi}}{\lambda_a}\cdot\frac{\operatorname{sen}(13^\circ)}{\cancel{2}}} = \frac{10\lambda_a}{\operatorname{sen}(13^\circ)} = 20\,\mu m}$$

$K_a = \frac{2\pi}{\lambda_a}$

Ahora bien, ¿hasta qué orden de interferencia es posible observar? Hay tres razones por las cuales podría no verse un ~~orden de inter~~ máximo de interferencia:

- Está apantallado por un mínimo de difracción. Como todavía no sabemos nada de D, esto todavía no nos importa.
- La intensidad es muy baja. Pero si I_0 es muy alto y/o la ventana de difracción es grande, esto no debería

efectamos.

– El orden del máximo está fuera de rango (es decir, se encuentra en un Θ que ~~cumple~~ requiere $\operatorname{sen}\Theta > 1$). Este es el caso que nos interesa.

Entonces, el máximo orden visible será

$$\frac{Kd}{2}\cdot(-1) \leq \underbrace{\frac{Kd}{2}\operatorname{sen}\Theta}_{} \leq \frac{Kd}{2}\cdot(+1)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{d}{\pi}\cdot(-1) \leq \quad m_I\cdot\pi \quad \leq \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{d}{\pi}\cdot(+1)$$

$$\boxed{\frac{-d}{\lambda} \leq m_I \leq \frac{+d}{\lambda}}$$

Entonces, para el azul $\rightsquigarrow$ $-44{,}4 \leq m_{I;a} \leq 44{,}4 \Rightarrow \boxed{-44 \leq m_{I;a} \leq 44}$

para el verde $\rightsquigarrow$ $-37{,}04 \leq m_{I;v} \leq 37{,}04 \Rightarrow \boxed{-37 \leq m_{I;v} \leq 37}$

para el rojo $\rightsquigarrow$ $-32{,}8 \leq m_{I;r} \leq 32{,}8 \Rightarrow \boxed{-32 \leq m_{I;r} \leq 32}$

(b) Un máximo de interferencia está apantallado si cae en el mismo lugar (o sea, tiene el mismo Θ) que un mínimo de difracción, ~~Es decir~~ para la misma longitud de onda. Es decir

$$\left.\begin{aligned} m_I\pi = \frac{Kd}{2}\operatorname{sen}\Theta &\Rightarrow \operatorname{sen}\Theta = \frac{m_I\lambda}{d} \\ m_D\pi = \frac{KD}{2}\operatorname{sen}\Theta &\Rightarrow \operatorname{sen}\Theta = \frac{m_D\lambda}{D} \end{aligned}\right\}$$

$$\operatorname{sen}\Theta = \operatorname{sen}\Theta$$

$$\frac{m_I\lambda}{d} = \frac{m_D\lambda}{D}$$

$$\boxed{\frac{m_I}{m_D} = \frac{d}{D} = \boxed{20}}$$

Entonces, cuando $m_D = \pm 1$, $m_I = \pm 20$ para todos los colores.

Y cuando $m_D = \pm 2$, $m_I = \pm 40$ para el azul (pues no se ve el orden ± 40 de los otros colores).

Luego, los órdenes apantallados son el $+20$ y el -20 para todos los colores, y $+40$ y -40 para el azul.

Los órdenes ± 20 quedan apantallados para los tres colores porque la relación $\frac{m_I}{m_D}$ no depende de λ. Es decir, la cantidad de máximos en la campana de difracción sólo depende de d y de D.

(c) El ancho de la campana viene dado por la distancia angular entre entre los mínimos -1 y $+1$ de difracción.

O sea,

$$\pm 1 \cdot \pi = \frac{K D}{2} \operatorname{sen}(\Theta_{m_D = \pm 1}) \Rightarrow \pm \frac{\lambda}{D} = \operatorname{sen}(\Theta_{m_D = \pm 1})$$

$$\hookrightarrow \text{ancho de la campana} = \Theta_{m_D=+1} - \Theta_{m_D=-1} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{D}\right) - \arcsin\left(-\frac{\lambda}{D}\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\lambda}{D}\right)$$

Entonces,

$$\boxed{\begin{aligned} \text{ancho azul} &= 0{,}93 \text{ rad} = 53{,}5^\circ \\ \text{ancho verde} &= 1{,}14 \text{ rad} = 65{,}4^\circ \\ \text{ancho rojo} &= 1{,}31 \text{ rad} = 75{,}2^\circ \end{aligned}}$$

(d) El orden 25 de interferencia de λ_0 coincide (o sea, mism

θ) con el ~~primer~~ mínimo de difracción de λ_{verde}.

Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} 25 \cdot \pi = \frac{K_0 d}{2} \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{25\lambda_0}{d} \\ 1\ \pi = \frac{K_v D}{2} \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1\lambda_v}{D} \end{array}\right\}$$

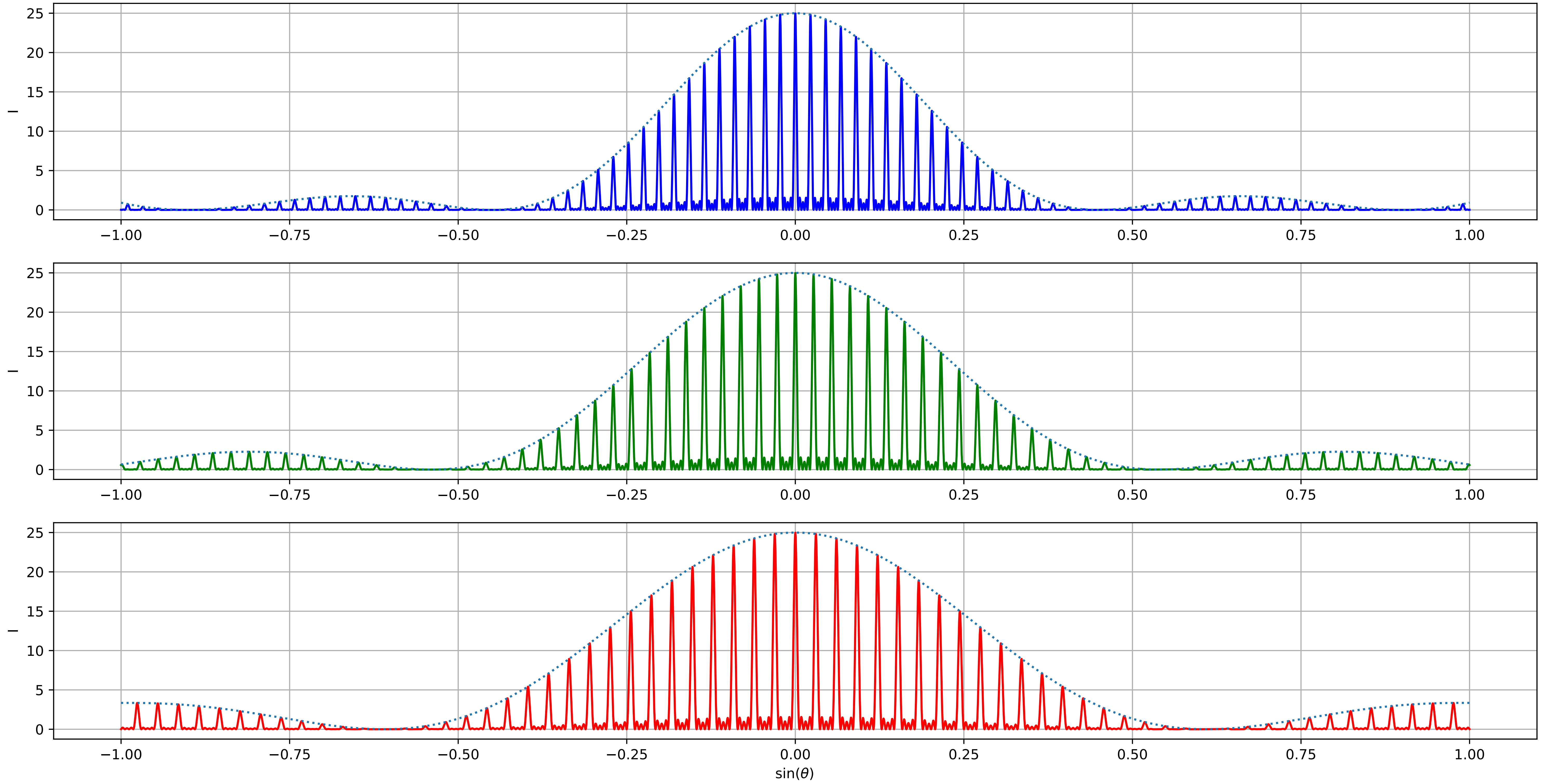
$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$$

$$25\frac{\lambda_0}{d} = \frac{1\lambda_v}{D}$$

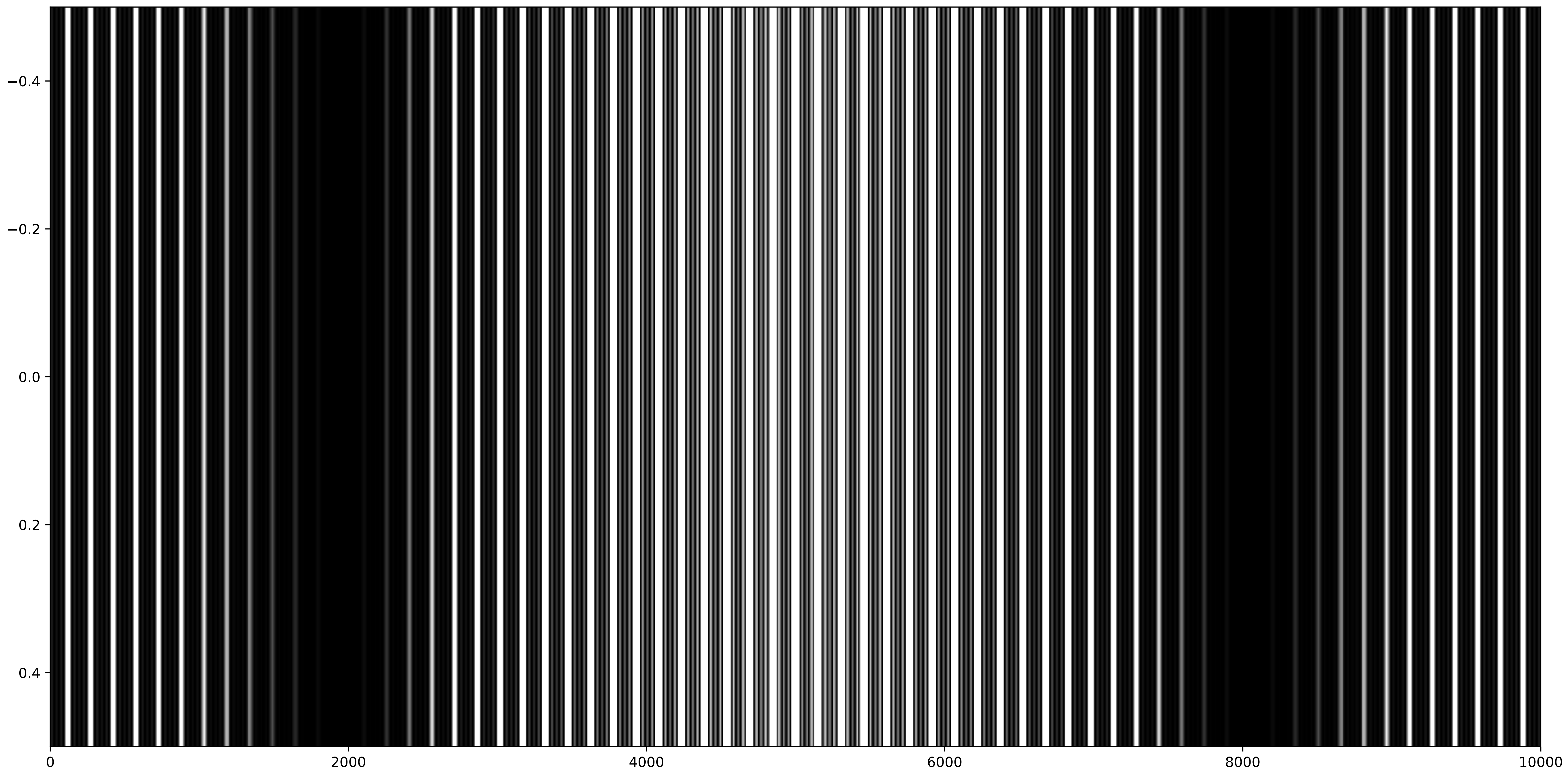
$$\lambda_0 = \underbrace{\frac{d}{D}}^{=20} \cdot \frac{\lambda_v}{25}$$

$$\lambda_0 = \frac{4}{5}\lambda_v$$

$$\boxed{\lambda_0 = 432\,nm}$$



25
20
15
10
5
0
I
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
sin(θ)


−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0
2000
4000
6000
8000
10000