Ejercicios de circuitos (CC)

Pujol, Alejandro*

Ejercicio 1

Resolveremos el ejercicio 6 de la guía 3 (EJG3). Este circuito es popularmente conocido como 'puente de Wheatstone', y uno de sus posibles uso es medir resistores, de un modo que ya discutiremos. La Figura 1 muestra el esquema del circuito. La fuente ε es de corriente continua (como una pila), y está conectada a cuatro resistores R_1, R_2, R_3 y R_4. En un experimento hipotético, se medirá la diferencia de potencia entre los puntos A y B.

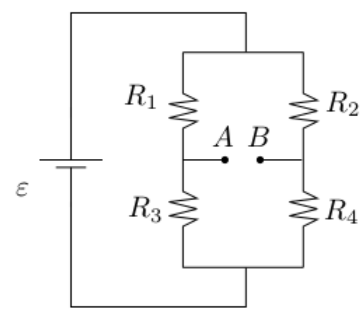


Figura 1. Esquema del circuito del EJ6G3

Lo primero que debemos hacer es etiquetar las «corrientes físicas» $i_j$en el circuito[1]. Usaremos la convención de letras i minúscula para corrientes físicas e I mayúscula para corrientes de mallas[2]. Las corrientes i_j se eligen con un sentido arbitrario, siendo el cálculo el que determinará si el sentido es correcto o no: si una corriente i resulta positiva, entonces el sentido es el que elegimos; en caso contrario, si i es negativa, el sentido correcto es inverso.

El circuito puede resolverse de varias formas. Una de ellas es encontrar el equivalente de Thevenin entre los puntos A y B. Recordemos que brevemente el enunciado del teorema de Thevenin:

- Un circuito (que cumpla ciertas caracteristicas) visto desde dos puntos A y B puede reemplazarse por otro circuito equivalente, con solo una fuente (ε_{th}) y un resistor ($\mathcal{R}_{th}$) equivalentes.

La fuente equivalente ε_{th} se calcula como la diferencia de potencial entre los puntos A y B con el circuito está abierto. Es decir, $\varepsilon_{th} = V_{AB}|_{c.a}$[3]. El resistor equivalente, $\mathcal{R}_{th}$ se calcula como

$$\mathcal{R}_{th} = \frac{\varepsilon_{th}}{I_{c.c}} \tag{1}$$

donde $I_{c.c}$ representa la corriente la corriente que circula en la rama $A - B$ cuando se cortocircuitan dichos nodos.

Una observación importante respecto al Teorema de Thevenin, es que tanto la fuente equivalente ε_{th} como la corriente de cortocircuito $I_{c.c}$ son medibles en un laboratorio. Es decir, dada un circuito, puede pensarse como una caja negra con la que solo podemos interactura a través de los nodos A y B. Entonces, con un voltímetro podemos medir la diferencia de potencial entre ambos puntos, y con un amperímetro la corriente.

A continuación, calcularemos tantos la fuente de Thevenin ε_{th} como la resistencia de Thevenin $\mathcal{R}_{th}$.

*Contacto: apujol@df.uba.ar o lu_pujol2@hotmail.com

[1]Llamamos corrientes físicas a las corrientes que se pueden medir en un experimento, que son las que circulan por cada rama.

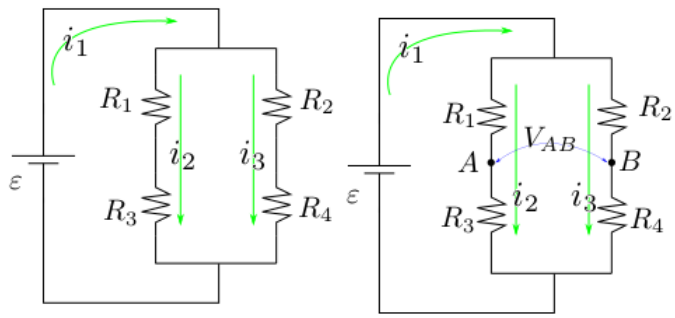
[2]Atención: en circuitos de corriente alterna suele usarse i minúscula para corrientes que dependen del tiempo, es decir $i = i(t)$. Se debe ser prolijo y no confundirse.

[3]En general, las notaciones son diversas, y suele notarse la fuente de Thevenin de varias formas: $\varepsilon_{th} \equiv V_{AB}|_{c.a} \equiv V_{th} \equiv \varepsilon_{eq}$ y otras

Cálculo de ε_{th}

Dado que lo que tenemos que calcular es la diferencia de potencial entre los puntos A y B la rama está abierta, el circuito resultante tiene solo tres corrientes i_1, i_2 e i_3. No resulta muy útil usar el método de mallas porque no son tantas variables las que tenemos.

La Figura 2a) muestra el circuito resultante de abrir la rama A-B y etiquetar las corrientes.



a) b)

Figura 2. a) Circuito equivalente para calcular ε_{th} con la elección de las corrientes i. b) Se agrega la caida de tensión AB, queriendo hacer notar que se puede formar una malla adicional para calcular dicha diferencia de potencial.

A continuación debemos escribir las ecuaciones de nodos y las de las caidas de potencial[4]. Como tenemos dos nodos, tendremos una solo ecuación de nodos.

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{2}$$

Debemos escribir también las ecuaciones de las mallas. Hay dos mallas que podemos, por ejemplo, recorrer en sentido horario[5]Resultan así la ecuación (3) para la malla izquierda, y (4) para la malla derecha[6]

$$\varepsilon - i_2R_1 - i_2R_3 = 0 \tag{3}$$

$$i_2R_1 + i_2R_3 - i_3R_2 - i_3R_4 = 0 \tag{4}$$

La corriente i_2 puede despejarse de la ecuación (3), resultando

$$i_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} \tag{5}$$

Reemplezando esto es la ecuación (4), puede obtenerse i_3

$$i_3 = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4} \tag{6}$$

Es decir, este circuito es un divisor de corriente típico, donde la corriente se reparte sobre cada par de resistores R_1, R_3 y R_2, R_4 según los valores de estas. Lo que hay que calcular ahora es la diferencia de potencial entre los puntos A y B. Para ello, según observamos en la Figura 2b), la forma más sencilla es pensar que se forma una malla entre R_1, R_2 y A-B (o, analogamente para R_3, R_4). La ecuación de esta malla (recorriendo de A hacia B, sentido horario) es[7]

$$V_{AB} + i_2R_1 - i_3R_2 = 0$$

[4]A esto último debería llamarle 'ecuaciones de mallas', y lo evito para no confundir: hay dos mallas en el circuito, y las ecuaciones de mallas serán, entonces dos. Pero esto no tiene nada que ver con el 'método de mallas', porque no lo estamos utilizando.

[5]Usaremos la convención de signos: las fuentes con signo positivo si las recorremos de - a +; los resistores con signo postivo si la corriente i va en contra de nuestro sentido de recorrido. En los casos contrarios se usan signos negativos.

[6]Notar que si bien la corriente i_1 no aparece en estas ecuaciones, sí tiene importancia física porque es la corriente entregada por la fuente, que se calcula a partir de la ecuación de nodos (2)

[7]La convención que funciona resulta bastante clara: si se quiere calcular $V_{AB} = V_A - V_B$, el signo que le corresponde es positivo si se cierra la malla dando el 'saltito' desde B hacía A, y negativo en caso contrario.

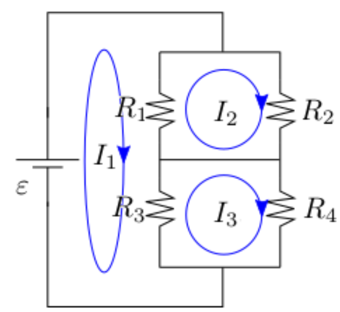


Figura 4. Circuito equivalente para calcular $I_{c.c}$ con las corrientes de mallas.

Y, usando las ecuaciones (5) y (6), resulta

$$V_{AB} \equiv V_{AB}|_{c.a} \equiv \varepsilon_{th} = \varepsilon \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \tag{7}$$

Una forma útil de verificar que los cálculos son correctos es llegar al mismo resultado recorriendo otra/s malla/s. En este caso, por ejemplo, podemos recorrer la malla que se forma entre R_3, R_4 y A-B. La ecuación en este caso será $-V_{AB} - i_3 R_4 + i_2 R_3 = 0$ que, usando las ecuaciones (5) y (6), se obtiene el mismo resultado que en la ecuación 7.

Cálculo de $I_{c.c}$

En este caso, lo hay que hacer es cortocircuitar (o unir) los terminales A y B, y calcular la corriente que circula entre ellos. Este circuito, que se muestra en la Figura 3a), es diferente al original, y también al que se utilizó en la sección anterior. Por lo tanto, los nombres de las corrientes son nuevos y no guardan relación con los anteriores. En la Figura 3b) se muestra el circuito que tenemos que resolver, con las corrientes i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 e i_6, donde hemos omitido la nomenclatura de la fuentes y los resistores para mayor claridad. Notar que la corriente que buscamos es $i_4 \equiv I_{c.c}$.

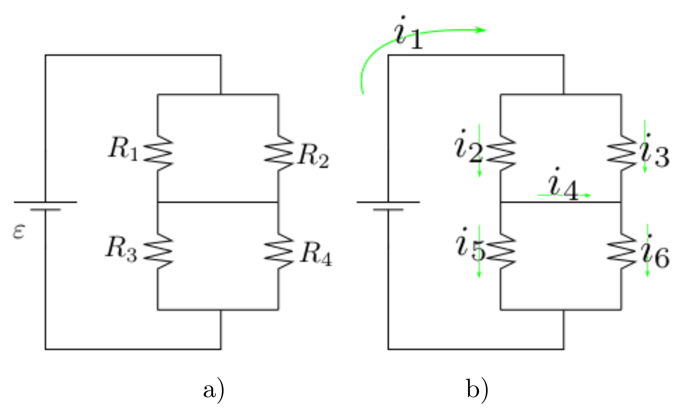


Figura 3. a) Circuito equivalente para calcular $I_{c.c}$. b) idem, con la elección de las corrientes i, y omitiendo la nomenclatura de la fuente y los resistores para mayor claridad.

Para este circuito, tenenmos que escribir tres ecuaciones de nodos

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ i_2 &= i_4 + i_5 \\ i_6 &= i_3 + i_4 \end{aligned} \tag{8}$$

y deberíamos escribir tres ecuaciones de mallas. Sin embargo, vemos que en este caso sí será útil el 'método de mallas', para evitar un sistema de 6x6. Este método equivale simplemente a un cambio de variable sobre las corrientes $i_1, ..., i_6$. Elijamos las mallas que se muestran en la Figura 4, con las corrientes I_1, I_2 e I_3.

La relación entre las corrientes físicas i_j y las de mallas I_k surge facilmente observando las Figuras 3b) y 4

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 \\ i_2 &= I_1 - I_2 \\ i_3 &= I_2 \\ i_4 &= I_3 - I_2 \\ i_5 &= I_1 - I_3 \\ i_6 &= I_3 \end{aligned}$$

que trivialmente deben cumplir las ecuaciones de nodos (8). Las ecuaciones de mallas serán, entonces

$$\varepsilon - \overbrace{(I_1 - I_2)}^{i_2} R_1 - \overbrace{(I_1 - I_3)}^{i_5} R_3 = 0$$

$$\overbrace{(I_1 - I_2)}^{i_2} R_1 - \overbrace{I_2}^{i_3} R_2 = 0$$

$$\overbrace{(I_1 - I_3)}^{i_5} R_3 - \overbrace{I_3}^{i_6} R_4 = 0$$

que matricialmente puede despejarse como

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_1 & -R_3 \\ R_1 & -R_1 - R_2 & 0 \\ R_3 & 0 & -R_3 - R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que buscamos es $i_4 = I_3 - I_2$, por lo tanto de este sistema debemos encontrar I_2 e I_3 (¡no hace falta calcular I_1!). Por lo regla de Cramer, podemos calcular estas corrientes del siguiente modo

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

donde

$$\Delta_2 = det \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & \varepsilon & -R_3 \\ R_1 & 0 & 0 \\ R_3 & 0 & -R_3 - R_4 \end{pmatrix} = \varepsilon\, R_1\, (R_3 + R_4)$$

$$\Delta_3 = det \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_1 & \varepsilon \\ R_1 & -R_1 - R_2 & 0 \\ R_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon\, R_3\, (R_1 + R_2)$$

$$\Delta = det \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_1 & -R_3 \\ R_1 & -R_1 - R_2 & 0 \\ R_3 & 0 & -R_3 - R_4 \end{pmatrix} = R_3 R_4\, (R_1 + R_2) + R_1 R_2\, (R_3 + R_4)$$

Así, la corriente $i_4 \equiv I_{c.c}$ es

$$i_4 \equiv I_{c.c} = \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{\Delta} = \varepsilon \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4)}{R_3 R_4\, (R_1 + R_2) + R_1 R_2\, (R_3 + R_4)} \tag{9}$$

Cálculo de $\mathcal{R}_{th}$

De la ecuación (1), usando las (7) y (9) puede obtenerse

$$\mathcal{R}_{th} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \tag{10}$$

que claramente es el resultado de resolver $R_1 || R_3$, $R_2 || R_4$ y sumarlas en serie. Muchas veces para calcular $\mathcal{R}_{th}$ en la práctica se toma el circuito original, se cortocircuitan las fuentes de tensión, y se encuentra la resistencia equivalente vista desde A y B. Es decir, se resuelve el circuito de la Figura 5.

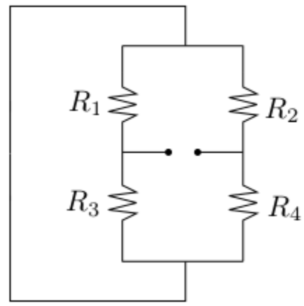


Figura 5. Circuito equivalente para calcular $\mathcal{R}_{th}$

Pero no siempre resultan claras las conexiones resultantes. Por eso en general es recomendable hacer el cálculo anterior, porque de ese modo se evitan confusiones.

Equivalente de Thevenin final

La Figura 6 muestra el circuito equivalente de Thevenin del original (Figura 1) desde los puntos A y B. Una observación importante es que a partir de este circuito, no se puede calcular la potencia entregada por la fuente original, ε. Sí se puede calcular la potencia entregada a un resistor de carga R_c[8]o conectado en A y B.

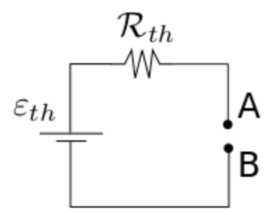


Figura 6. Circuito equivalente de Thevenin final

Utilidad práctica

En la bibliografía verán que este circuito se suele resolver directamente, sin usar el teorema de Thevenin. Esto es porque, en general, se construye desde cero en los laboratorios, sin necesidad de apelar a que alguna parte del mismo es una 'caja negra' (que es la idea central de Thevenin). En la guía se propone resolverlo por Thevenin como ejercicio. No obstante, se puede recuperar el resultado que verán los libros.

La idea es la siguiente: se dice que el puente de Wheatstone está equilibrado cuando la diferencia de potencial entre los puntos es nula (o equivalentemente, cuando la corriente es nula). De la ecuación (7), podemos ver que esta condición se cumple si

$$R_2R_3 - R_1R_4 = 0 \tag{11}$$

Supongamos que R_4 es desconocida, y llamemoslé r. Despejando resulta

$$r = \frac{R_2R_3}{R_1} \tag{12}$$

Típicamente, uno o algunos de los resistores R_1, R_2 y R_3 se eligen como resistores variables (son cajitas que tienen una perilla). Así es que, variando estos resistores, se puede medir la diferencia de potencial entre A-B, V_{AB} y, cuando se logre encontrar la condición $V_{AB} = 0$, se usa la ecuación (12) para encontrar el valor de r.

[8]A veces notada como R_L, por sus siglas en inglés (load).