Una solución al problema 5 - Guía 2

pablo.gta@gmail.com

Octubre 2018

1 Enunciado

Una esfera conductora de radio a está rodeada por un casquete esférico, también conductor, de radio interior b y radio exterior c. Ambos conductores se encuentran unidos por un cable y su carga total es Q. En el espacio entre ambos se encuentra una superficie esférica de radio d ($a < d < b$) cargada con una densidad superficial de carga σ. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio (considere que el cable no rompe la simetría esférica del problema).

2 Campo eléctrico de una distribución de carga superficial esférica

Antes de empezar a ver el problema, supongan que tenemos una distribución de carga esférica uniforme, como la que vemos en la figura siguiente:

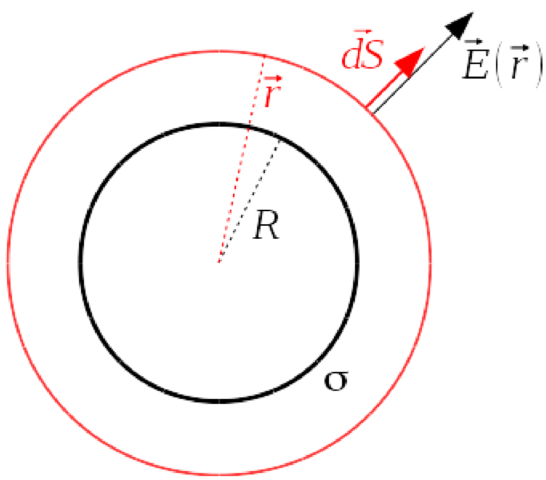

Figura 1: En negro la distribución de carga σ. En rojo la superficie de Gauss que elegimos para hacer la integral.

Ya que estamos, recordemos lo que nos enseñó (Juan Carlos) Gauss sobre las cargas y las superficies:

$$\int \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

Para calcular el campo eléctrico que genera la distribución, lo más sencillo es usar esta tremenda moraleja (1), porque la simetría del problema nos deja adivinar que $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$.

Entonces, tomando una superficie de integración concéntrica con la distribución (la superficie roja en el dibujo) nos queda que:

$$\int \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int (E(r)\hat{r}) \cdot (dS\hat{r}) = \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta E(r) r^2 sen(\phi) = 4\pi r^2 E(r) \tag{2}$$

y usando que $q_{enc} = 0$ cuando $r < R$ y $q_{enc} = 4\pi R^2\sigma$ cuando $r > R$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R, \text{(atroden)} \\ \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}\hat{r} & R < r, \text{(arafue)} \end{cases} \tag{3}$$

3 Ahora si, la solución al enunciado

Recordemos que lo que nos piden es encontrar $\vec{E}$ en todo el espacio. Para este tipo de problemas donde existe una simetría evidente y además sabemos dónde se distribuirá la carga (ya que o bien nos la dan como dato, o bien se trata de conductores) algo que nos conviene hacer es dejar como incógnitas estas distribuciones y hacer el cálculo como si fueran dato. La ventaja de hacer esto es que suponiendo conocida la distribución, podemos usar la ley de Gauss (1). Luego podremos fijar los valores correctos usando las condiciones impuestas por el problema.

Como tratamos con conductores esféricos y concéntricos, la simetría nos obliga a suponer que la carga se distribuirá uniformemente en las superficies de los conductores, como se ve a continuación:

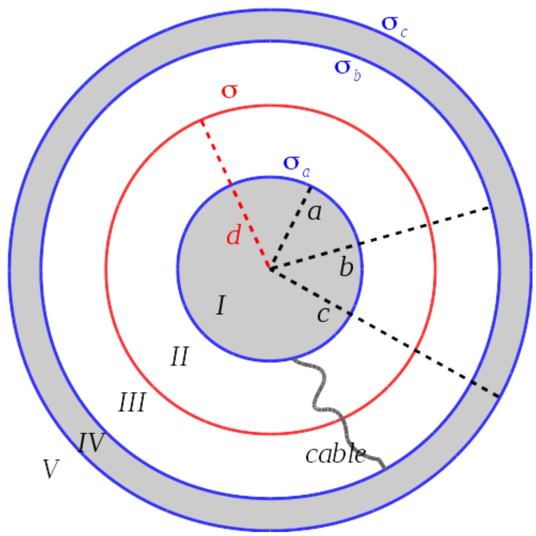

Figura 2: Pintados de gris los conductores. Las superficies donde se distribuye la carga Q del conductor están pintadas de azul. En rojo la superficie de carga σ. Las tres incógnitas son σ_a, σ_b y σ_c.

Lo que vamos a usar es la propiedad de superposición de los campos electrostáticos. Como sabemos que el campo que genera una distribución arbitraria de carga es la suma del campo que genera cada una de sus partes, podemos usar el resultado (3) para cada superficie esférica por separado, y sumarlos para obtener el campo final en cada región. Pensado de esta manera es fácil ver que el campo eléctrico total es (omito la dirección $\hat{r}$ de $\vec{E}$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a, \text{reg. I} \\ \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0 r^2} & a < r < d, \text{reg. II} \\ \frac{\sigma_a a^2 + \sigma d^2}{\varepsilon_0 r^2} & d < r < b, \text{reg. III} \\ \frac{\sigma_a a^2 + \sigma d^2 + \sigma_b b^2}{\varepsilon_0 r^2} & b < r < c, \text{reg. VI} \\ \frac{\sigma_a a^2 + \sigma d^2 + \sigma_b b^2 + \sigma_c c^2}{\varepsilon_0 r^2} & c < r, \text{reg. V} \end{cases} \tag{4}$$

donde todavía nos queda despejar las incógnitas σ_a, σ_b y σ_c que usamos para hacer el cálculo. Para esta tarea vamos a necesitar tres ecuaciones, que tendrán que salir de las condiciones que nos impone el problema y que todavía no usamos.

El enunciado dice que:
1] La esfera interior es conductora.
2] El casquete exterior es conductor.
3] Ambos están conectados por un cable (es decir, son el mismo conductor)
4] El conductor está cargado con carga total Q.

La condición [2] la podemos interpretar a partir del resultado (4) para $b < r < c$. Como el casquete es conductor, $E = 0$ en el interior (región IV) y por lo tanto

$$\vec{E}(\vec{r})_{IV} = \frac{\sigma_a a^2 + \sigma d^2 + \sigma_b b^2}{\varepsilon_0 r^2} = 0 \tag{5}$$

Las condiciones [1] y [3] por otro lado nos permiten decir que

$$\Delta V_{ab} = 0 \tag{6}$$

Y por último [4] nos dice

$$4\pi(\sigma_a a^2 + \sigma_b b^2 + \sigma_c c^2) = Q \tag{7}$$

De estas tres últimas ecuaciones hay dos que ya están escritas con la aparición explícita de los σ's. La ecuación (6) hay que trabajarla un poco más...

$$\Delta V_{ab} = -\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\left[\int_a^d \vec{E}\cdot\vec{dl} + \int_d^b \vec{E}\cdot\vec{dl}\right] = -\left[\frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0}\int_a^d \frac{1}{r^2}dr + \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0}\int_d^b \frac{1}{r^2}dr + \frac{\sigma d^2}{\varepsilon_0}\int_d^b \frac{1}{r^2}dr\right] \tag{8}$$

Lo que nos termina dando:

$$\Delta V_{ab} = 0 = \frac{\sigma_a a^2}{\varepsilon_0}(1/b - 1/a) + \frac{\sigma d^2}{\varepsilon_0}(1/b - 1/d) \tag{9}$$

Entonces las ecuaciones (5), (7) y (9) son las que nos van a permitir calcular nuestras incógnitas. Como esto es solamente un ejercicio de despeje algebráico, les pongo el resultado al que yo llegué (podría estar mal, quien guste de hacerlo y comparar ¡bienvenid@!):

$$\sigma_a = -\sigma\frac{d^2}{a^2}\frac{(1/d - 1/b)}{(1/a - 1/b)},\ (< 0) \tag{10}$$

$$\sigma_b = -\sigma \frac{d^2}{b^2} \frac{(1/a - 1/d)}{(1/a - 1/b)}, \ (< 0) \tag{11}$$

$$\sigma_c = \frac{Q}{4\pi c^2} + \sigma \frac{d^2}{c^2}, \ (> 0) \tag{12}$$