Problema 1

a) Ambos conductores poseen simetría esférica por lo tanto sus superficies (equipotenciales) serán también de simetría esférica. Proponemos una solución para $\vec{E}$ con esa propiedad

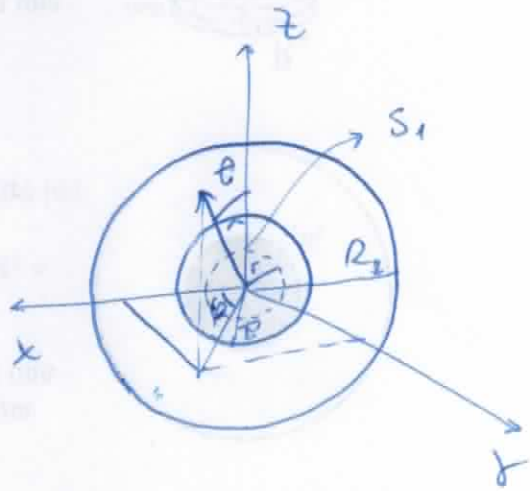
$$\vec{E} = \vec{E}(r) = E(r)\,\hat{r}$$ con $\hat{r}$ versor en coordenadas esféricas

Planteo la ley de Gauss sobre una superficie esférica de radio r para distintos valores de "r"

$\underline{r < R_1}$ $\quad$ $\underline{R_1 < r < R_2}$ $\quad$ $\underline{r > R_2}$

$r < R_1$

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\text{Carga encerrada}}{\epsilon_0}$$

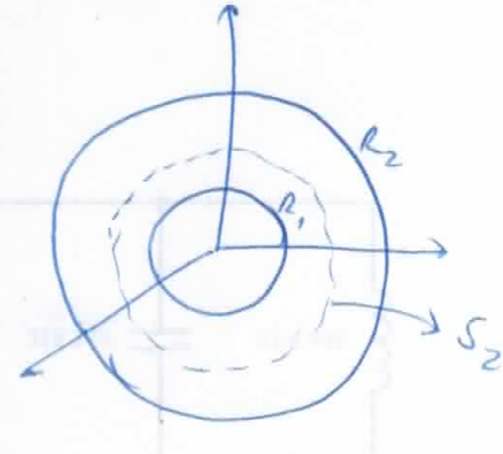


$d\vec{a} = r^2\, d\varphi\, d\theta \sin\theta$

$\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = 0$ pues la carga del conductor interno se ubica en su superficie

$\Rightarrow \vec{E}(r) = 0$ para $r < R_1$

$R_1 < r < R_2$

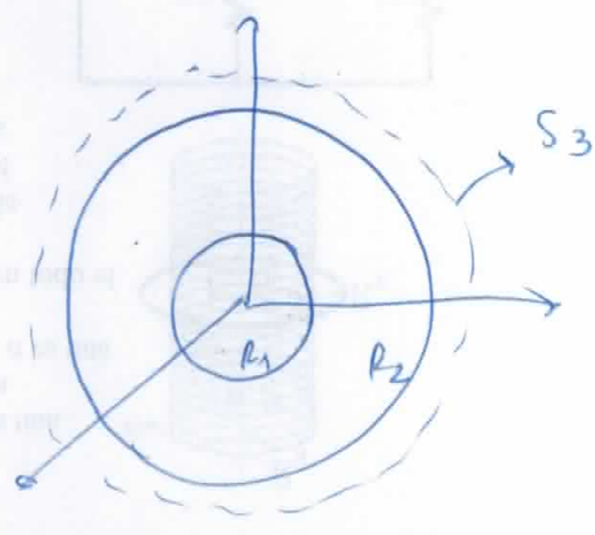


$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$$

$$E(r)\, r^2 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$ → carga sobre la superficie del conductor interno

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

$r > R_2$



$$\oint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{Q - Q}{\epsilon_0} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = 0}$$

b) La capacitancia se define como

$$C = \frac{Q}{V}$$

donde

$$V = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q\,\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cdot dr\,\hat{r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\Big|_{R_2}^{R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

$$\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} = \frac{4\pi\epsilon_0}{C} = \frac{1}{9\,10^9\,\frac{m}{F}}\,\frac{1}{5\,10^{-12}\,F} = \frac{1}{45\,10^{-3}\,m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{45\,10^{-3}\,m} + \frac{1}{10^{-1}\,m} = 32.2\,\frac{1}{m} \Rightarrow R_1 = 3{,}1\ cm$$

c) $$V = \frac{5\,10^{-15}\,C}{5\,10^{-12}\,F} = 10^{-3}\ V = 1\ mV$$

P2

a) Eje $\hat{z}$ de simetría

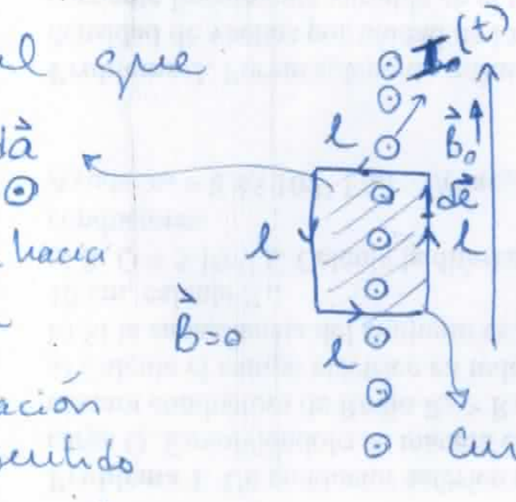
En un corte que pasa x él veo dos distribuciones de corriente planas opuestas

Estas generan entre ellas un campo uniforme a lo largo de $\hat{z}$ y nulo por fuera

Entonces planteo en cilíndricas (eje simetría $\hat{z}$)

$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \hat{z} & r < R_S \\ 0 & r > R_S \end{cases}$$

Para calcular B_0 aplico Ampère a un lazo rectangular cuadrado con lados paralelos a $\hat{z}$ y perpendiculares tal que



$d\vec{a}$ apunta hacia afuera pues la circulación es en sentido antihorario

$$\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N I(t)\, l$$

En los tramos de C perpendicular a $\hat{z}$ $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ es cero porque para $r < R_s$ $\vec{B}_0 \perp d\vec{l}$ y para $r > R_s$ pues $\vec{B} = 0$

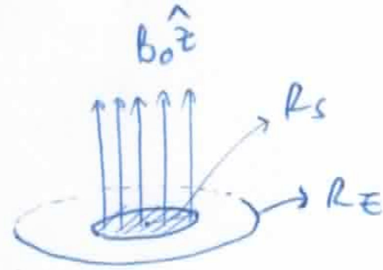
En el tramo paralelo a $\hat{z}$ externo a R_S también es cero por lo que sólo queda el tramo de C entre la corriente y el eje $\hat{z}$. Como $\vec{B}$ y $\hat{z}$ son paralelos

$$\int_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_0^{l} B_0\,\hat{z}\cdot\overbrace{\widetilde{dl}}^{dz}\,\hat{z} = \int_0^{l} B_0\,dz = B_0\,l$$

y $\quad B_0 \cancel{l} = \mu_0 n \cancel{l}\, I(t)$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = \mu_0 n\, I(t)\hat{z} = \mu_0 n a t\,\hat{z} \quad \text{para } r<R_S$$

b) El flujo magnético a través de la espira es sólo lo que pasa por la sección del solenoide ya que sólo ahí $\vec{B}$ no es cero

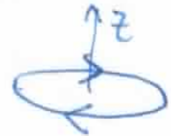


$$\Phi_M = B_0\,\pi R_S^2 = \mu_0 n a t\,\pi R_S^2$$

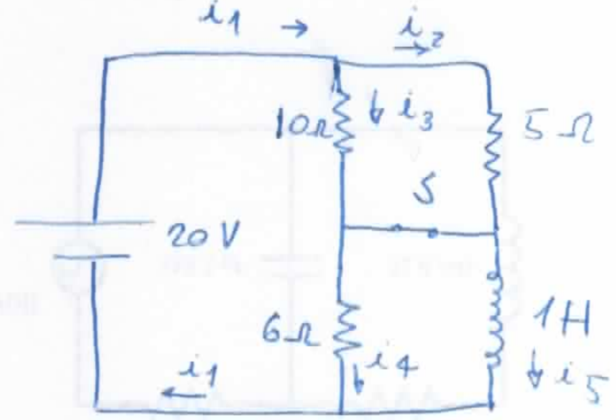
La F.E.M. inducida será $= -\dfrac{d\Phi_M}{dt} = -\mu_0 n a \pi R_S^2 \overbrace{\dfrac{dt}{dt}}^{1}$

$$\boxed{\text{F.E.M.} = -\mu_0 n a \pi R_S^2}$$

La corriente inducida circulará en dirección opuesta a la variación del flujo. Como $a>0$ Φ_M crece en el tiempo a lo largo de $\hat{z}$ entonces la corriente debe ~~[illegible]~~ fluir en la dirección $-\hat{\theta}$



Problema 3



a) En estado estacionario no hay FEM inducida

$\Rightarrow$ L se comporta como un cable conductor

Entonces la corriente que debe pasar por 6Ω es cero

$$i_4 = 0 \Rightarrow i_5 = i_1 = i_2 + i_3$$

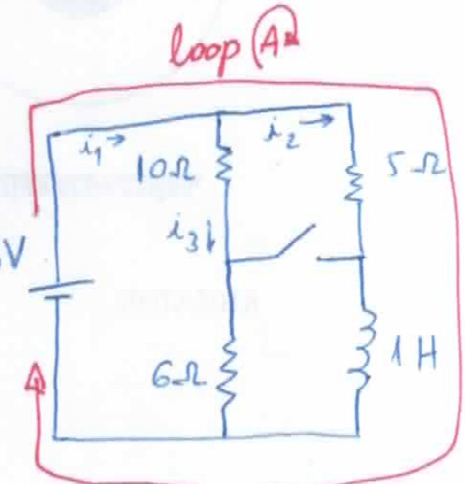
La resistencia equivalente de 10Ω y 5Ω en paralelo es

$$R_{eq} = \frac{10 \cdot 5}{10+5} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}\ \Omega$$

$$20\,V = i_1 R_{eq} \Rightarrow i_1 = \frac{20}{\frac{10}{3}} = \underline{\underline{6\,A}}$$

luego $i_2 = \frac{20}{5} = \underline{\underline{4\,A}}$ y $i_3 = i_1 - i_2 = \underline{\underline{2\,A}}$

b) Inicialmente, por L circula una corriente de 6 A. Aplico Kirchhoff al loop (A)



$$-20 + i_2 5 = -\overset{1H}{L}\frac{di_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{di_2}{dt} + 5 i_2 = 20$$

$$i_2 = \underbrace{i_{2i}}_{\substack{\text{solucion} \\ \text{part.} \\ \text{inhomogénea}}} + \underbrace{i_{2h}}_{\substack{\text{solución gral} \\ \text{homogénea}}}$$

$$i_{2i} \, 5 = 20 \Rightarrow \boxed{i_{2i} = 4A}$$

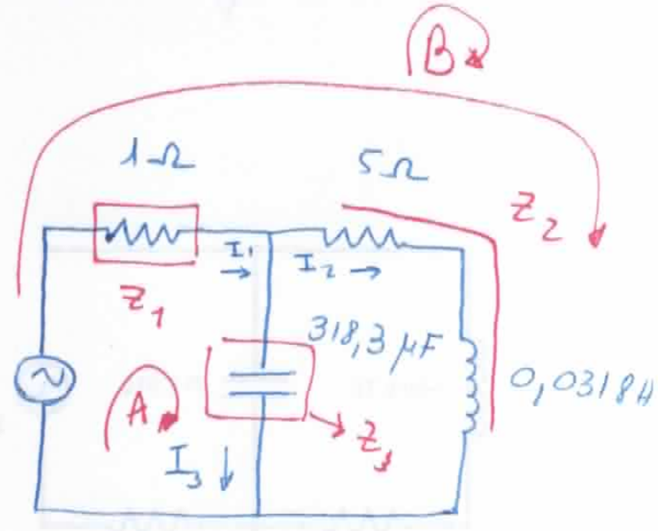
$$i_h = i_{2h0} \, e^{-5t}$$

$$\Rightarrow i_2 = 4A + i_{2h0} \, e^{-5t}$$ como $i_2(t=0) = 6A$

$$\Rightarrow i_{2h0} = 2A$$

$$\Rightarrow \boxed{i_2 = 4A + 2A \, e^{-5t}}$$

Problema 4



Impedancias

$Z_1 = 1\Omega$ ⟶ en serie

$Z_2 = 5 + i10$

$Z_3 = -10i$ } en paralelo

$$Z_{eq} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = 1 + \frac{(5+10i)(-10i)}{5+10i-10i}$$

$$= 1 + 20 - 10i = 21 - 10i$$

$$= \sqrt{21^2+10^2}\, e^{i(\operatorname{atan}(-\frac{10}{21}))} = 23,26\,\Omega\, e^{-i0,44}$$

El voltage en complejos

$$V = Re(\tilde{V} e^{i\omega t}) \quad \text{donde } \tilde{V} = 120\,V$$

Ley de ohm

$$\tilde{V} = \tilde{I}_1 Z_{eq} \quad \text{donde } I_1 = Re[\tilde{I}_1 e^{i\omega t}]$$

$$\tilde{I}_1 = \frac{120}{23,26} e^{i0,44\,rad} = 5,16\,A\, e^{i0,44\,rad} = 5,16\,A\, e^{i25,5^\circ}$$

Usando kirchhoff en el loop (A) para amplitudes complejas

$$\tilde{V} - \tilde{I}_1 R - \tilde{I}_3 Z_3 = 0 \Rightarrow \tilde{I}_3 = \frac{\tilde{V} - \tilde{I}_1 R}{Z_3}$$

$$\tilde{I}_3 = \frac{120 - 5{,}16\, e^{i25{,}5^\circ}}{-10i} = 12i + \frac{5{,}16\, e^{i25{,}5^\circ}}{10\, e^{i90}}$$

$$= 12i + 0{,}516\, e^{i(25{,}5^\circ - 90^\circ)}$$

$$= 12i + 0{,}516\, e^{-i64{,}5^\circ} = 0{,}22 + 12i - 0{,}46i$$

$$= (0{,}22 + 11{,}54i)\,A = \underline{\underline{11{,}54\, e^{i88{,}9^\circ}}}$$

adelantado al voltaje.

Loop (B)

$$\therefore\ \tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V} - \tilde{I}_1\, 1\Omega}{Z_2} = \frac{120 - 5{,}16\, e^{i25{,}5^\circ}}{5+10i} =$$

$$= \frac{115{,}34 - 2{,}22i}{5+10i} = \frac{115{,}36\, e^{-i(1{,}1^\circ)}}{11{,}18\, e^{i63{,}4^\circ}}$$

$$\tilde{I}_2 = \underline{\underline{10{,}32\,A\, e^{-i64{,}5^\circ}}}$$ atrasado al voltaje

$$I_1 = 5{,}16\,A \cos(\omega t + 25{,}5^\circ)$$

$$I_2 = 10{,}32\,A \cos(\omega t - 64{,}5^\circ)$$

$$I_3 = 11{,}54\,A \cos(\omega t + 88{,}9^\circ)$$