Ejercicio 3.

Se superponen dos ondas longitudinales armónicas de la misma frecuencia, igual dirección de propagación y ambas de amplitud A. Si la amplitud de la onda resultante es A, ¿cuál es la diferencia de fase entre ambas ondas?

Resolución.

Comenzamos entonces por considerar dos ondas unidimensionales, $\psi_1(x,t)$ y $\psi_2(x,t)$, armónicas y de la misma frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$, con dirección de propagación en el sentido $+\hat{x}$ y ambas de amplitud A, según indica el enunciado. Dado que el enunciado nos propone encontrar la diferencia de fase entre ambas ondas, vamos a asociar fases iniciales ϕ_1 y ϕ_2 (a priori desconocidas) a cada una de estas ondas.

En estas condiciones, tenemos:

$$\psi_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi_1), \tag{7.3.1}$$

$$\psi_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi_2). \tag{7.3.2}$$

La superposición de ambas ondas la representamos por medio de $\psi(x,t)$, dada por:

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = \\ &= A\sin(kx - \omega t + \phi_1) + A\sin(kx - \omega t + \phi_2). \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

De acuerdo a lo estipulado en el enunciado, la amplitud de la onda resultante es A. Vamos a modificar ligeramente esta condición (para considerar así un problema más general que el propuesto por la práctica) y suponer que la amplitud de la onda resultante es, en lugar de A, igual a αA, con α un número real. Si lo deseamos, siempre podemos recuperar el caso particular considerado en el enunciado haciendo simplemente $\alpha = 1$ en cada una de las ecuaciones siguientes.

En el caso general, la condición que debe satisfacer $\phi(x,t)$ es:

$$\psi(x,t) = \alpha A\sin(kx - wt + \chi), \tag{7.3.4}$$

siendo χ la fase inicial (a priori desconocida) de $\psi(x,t)$. Igualando ahora las ecuaciones (7.3.3) y (7.3.4), obtenemos:

$$A\sin(kx - \omega t + \phi_1) + A\sin(kx - \omega t + \phi_2) = \alpha A\sin(kx - wt + \chi).$$

La amplitud A figura en cada uno de los términos, con lo cual es posible cancelarla de la última expresión, llegando a

$$\sin(kx - \omega t + \phi_1) + \sin(kx - \omega t + \phi_2) = \alpha\sin(kx - wt + \chi). \tag{7.3.5}$$

La única dificultad aquí es llevar la suma de dos términos sinusoidales de diferente argumento (tal y como tenemos a la izquierda de la última igualdad) a una única función tipo seno (como ocurre del lado derecho), para así poder imponer la condición sobre la amplitud. Esto puede hacerse recurriendo a la propiedad

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right). \tag{7.3.6}$$

De acuerdo a esta identidad aplicada al lado izquierdo de la ecuación (7.3.5), obtenemos

$$\sin(kx - \omega t + \phi_1) + \sin(kx - \omega t + \phi_2) = 2\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right), \tag{7.3.7}$$

por lo que

$$2\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) = \alpha\sin(kx - wt + \chi). \tag{7.3.8}$$

Comparando los términos a la derecha e izquierda de esta última expresión es fácil reconocer que la fase inicial de la onda resultante, $\psi(x, t)$, resulta igual al promedio de las fases iniciales de las dos ondas originales:

$$\chi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \tag{7.3.9}$$

mientras que la condición sobre α resulta

$$\alpha = 2\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right). \tag{7.3.10}$$

Recordemos que, en el caso particular planteado en el enunciado, vale $\alpha = 1$. Observemos que el argumento del coseno no es otra cosa que la mitad de la diferencia de fase que buscábamos calcular. Llamando a dicha diferencia de fase $\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$, tenemos

$$\Delta\phi = 2\,\text{acos}\,(\alpha/2)\,. \tag{7.3.11}$$

Para el caso particular considerado en el ejercicio, siendo $\alpha = 1$, la diferencia de fase entre las ondas originales debe valer

$$\Delta\phi = 2\,\text{acos}\,(1/2) = 2\,\frac{\pi}{3}, \tag{7.3.12}$$

para que su superposición tenga la misma amplitud que cada una de las dos ondas constituyentes.

De la ecuación (7.3.11) podemos ver que el máximo valor absoluto que podría alcanzar α es 2, ya que el coseno sólo puede adquirir valores entre -1 y 1. Esto significa que las dos ondas originales de amplitud A a lo sumo pueden dar una onda de amplitud $2A$, lo que sucede para un desfasaje relativo entre ellas de 0 ó π, si consideramos exclusivamente el intervalo $[0, 2\pi)$. Por otro lado, es fácil ver que si el desfasaje $\Delta\phi$ resulta igual a $\pm\pi$, entonces la onda resultante tiene amplitud nula, lo que resulta razonable.

Por último, conviene realizar en este punto un comentario que puede resultar importante para intuir este resultado que obtuvimos mediante la matemática. En este caso, vamos a hacer uso de la representación de ondas en términos de *fasores*. El ejercicio nos pide superponer dos ondas que se propagan en la misma dirección y que tienen, cada una de ellas, una amplitud dada (A) y una diferencia de fase $\Delta\phi$ arbitraria. Se nos pide que calculemos qué valor de dicho desfasaje hace que la amplitud de la onda resultante sea también A. En el lenguaje de fasores, esto se traduce de la siguiente manera. Queremos sumar dos vectores (cuyos largos representan las amplitudes de cada onda) con el desfasaje necesario para que el largo del vector resultante sea el mismo que largo de los otros dos vectores. Dibujamos entonces un primer fasor con un largo dado y lo disponemos en una dirección arbitraria, digamos, la horizontal. Luego el problema se reduce a dibujar un segundo vector de igual largo que el primero, con el origen coincidente con éste y a un ángulo $\Delta\phi$ respecto de él de forma tal que la resultante de la suma tenga el mismo módulo que el de cada sumando. Es fácil verificar que esto sólo puede lograrse empleando un ángulo de 120°, lo que corresponde efectivamente a $\frac{2\pi}{3}$.