

Problema 1.

(a) Campo \underline{E} generado por 2 esferas (por separado) en todo el espacio.

Usando la ley de Coulomb, el campo \underline{E} de cada esfera por separado es

$$\underline{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 \quad ; \quad \underline{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2$$

siendo r_1 y r_2 las distancias a los centros de cada esfera, y \hat{r}_1 y \hat{r}_2 los vectores radiales que apuntan desde los centros correspondientes. En interior de esferas el \underline{E} es nulo \times conductores.

(b) Potencial de 2 esferas por separado.

Los potenciales son los correspondientes a cuerpos puntuales ubicados en los centros de 2 esferas, luego

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \quad \text{fuera de las esferas.}$$

(c) Demostrar que $\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}$.

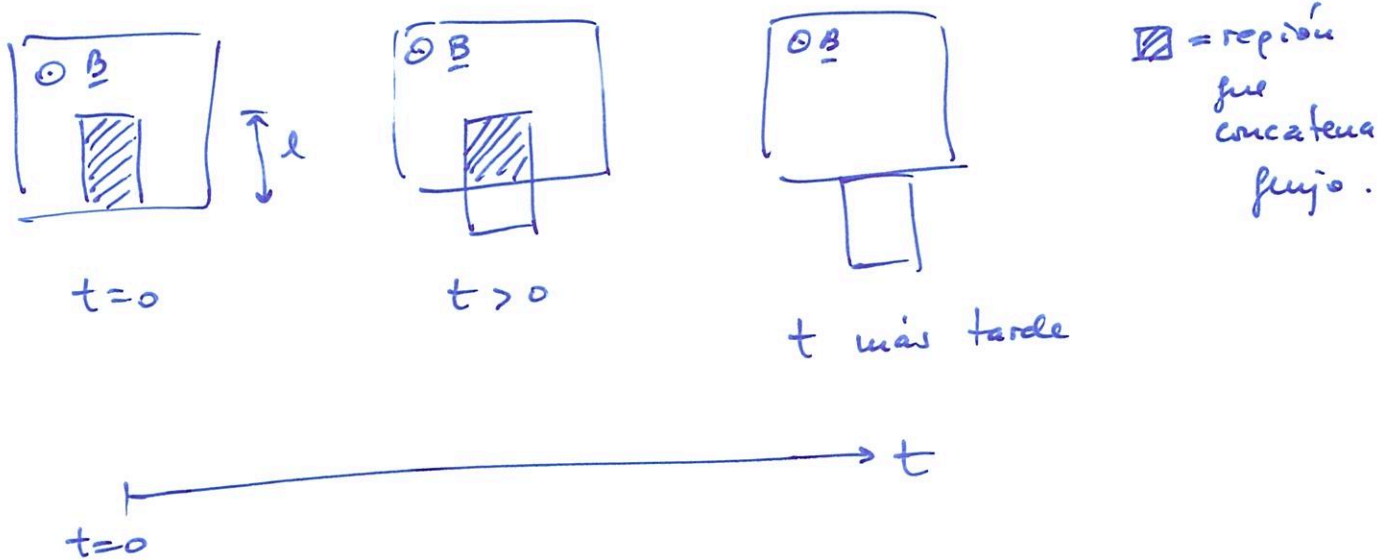
Como las esferas estan conectadas \times un conductor, estan al mismo potencial. Luego

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}$$

Problema 2.

(a) Calculemos el flujo en la espira.

La espira cae bajo acción de la gravedad. El flujo concatenado es w vez menor, por lo que esperamos que -por la ley de Lenz- la fem inducida genere una corriente que tienda a 'evitar' esa disminución, es decir, que tienda a generar campo magnético en igual sentido que el del fondo. Esquemáticamente, es



Si tomamos a $z(t)$ como la posición del borde superior de la espira, entonces el flujo magnético ϕ concatenado es

$$\phi = \iint \underline{B} \cdot d\underline{\Sigma} = \int_0^{z(t)} \int_0^w (\underline{B} \cdot \hat{x}) \cdot (\hat{x} \, dy \, dz)$$

notar que hemos elegido la normal en \hat{x}

y $z(t)$ es una caída libre desde l , luego

$$z(t) = l - \frac{1}{2} g t^2.$$

La integral da

$$\phi(t) = Bw \left(l - \frac{1}{2} g t^2 \right) .$$

Esto vale hasta cuando la espira sale completamente de la región de B no nulo, es decir cuando el borde superior llegó a $z=0$:

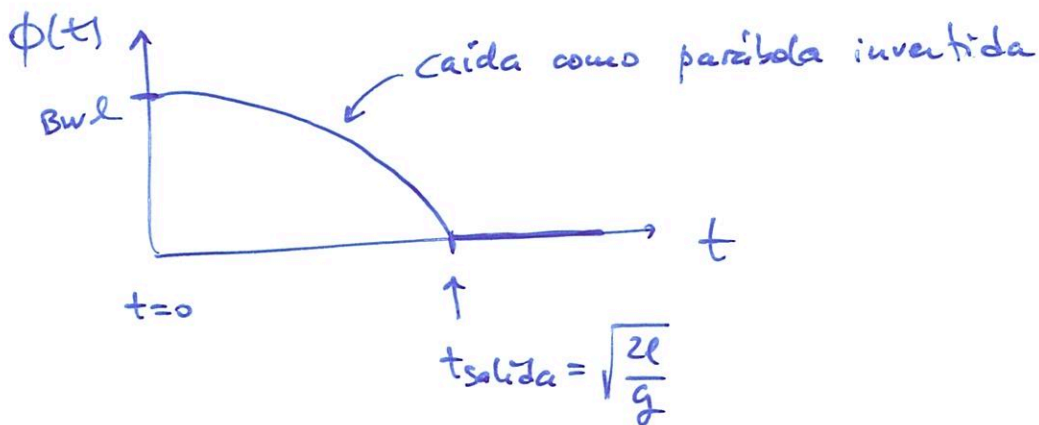
$$0 = l - \frac{1}{2} g t_{\text{salida}}^2 \Rightarrow t_{\text{salida}} = + \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

Siendo t_{salida} el tiempo a partir del cual toda la espira está fuera y ya no se concentra flujo magnético.

Entonces

$$\boxed{\phi(t) = Bw \left(l - \frac{1}{2} g t^2 \right)} \quad \text{vale } \forall \quad 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2l}{g}} .$$

Si lo graficásemos de forma "cualitativamente correcta", tendríamos



(b) Sentido e intensidad de la corriente inducida .

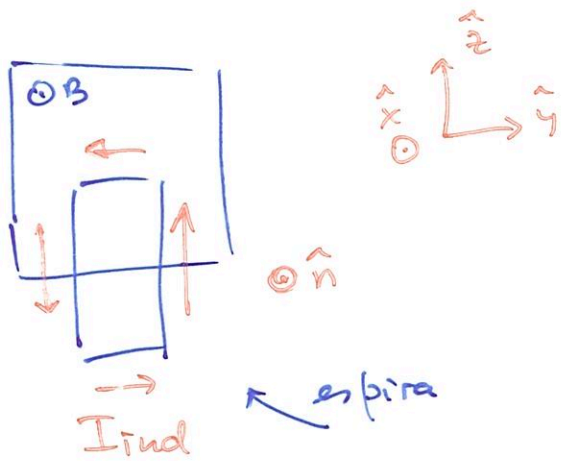
Per faradzy vale

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \left[Bw \left(l - \frac{1}{2} g t^2 \right) \right] = + Bw g t$$

Luego la corriente inducida vale

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} = \frac{Bw g t}{R}}$$

Dado que habíamos elegido la normal a la superficie en \hat{x} , la interpretación es simple ahora. Por la regla de la mano derecha, una $I > 0$ (como tenemos) implica que

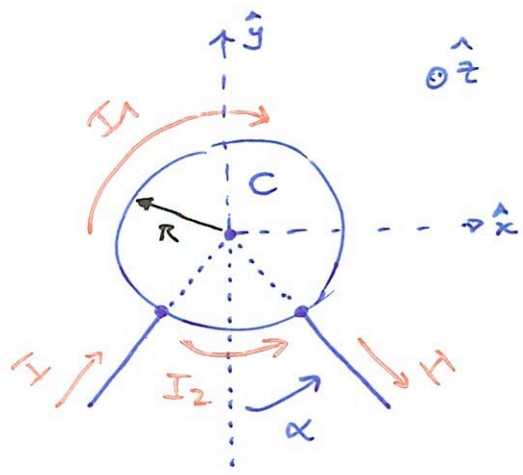


Esta I_{ind} inducida genera un campo \underline{B} en \hat{x} que refuerza el flujo concatenado a medida que la espira se mueve, de acuerdo a la Ley de Lenz.

Problema 3

(a) Campo \underline{B} en C .

El esquema es como el de un circuito con 2 nodos, por lo que la corriente se divide en 2: 'por arriba' y 'por abajo' de C .



Entonces: $I = I_1 + I_2$.

El campo \underline{B} será superposición de los campos generados por cada porción de cable individual. Hay 4: segmento recto de entrada, arco superior, arco inferior y segmento recto de salida.

Como la ley de Biot-Savart es tipo

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\underline{r}' \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}, \quad \text{es fácil ver que los segmentos}$$

rectos infinitos (de entrada y salida) tienen una contribución nula al campo \underline{B} en C . Cada uno de ellos aporta un campo nulo en C porque

vale $d\underline{r}' \times (\underline{r} - \underline{r}') = \underline{0}$; la distribución de corriente y

la distancia de C a C/punto de dicha distribución son colineales.

Luego el campo \underline{B} en C es sólo debido a la contribución

del arco superior que lleva I_1 y del arco inferior que lleva

I_2 . Usando lo que sabemos acerca del campo magnético que

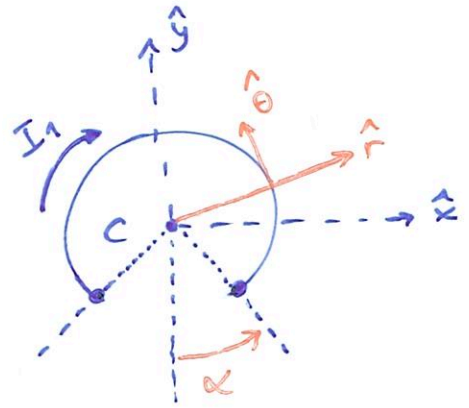
genera una corriente filamentaria (un cable) vemos que la corriente

que circula x arco superior genera campo en $(-\hat{z})$ y que

la que circula x arco inferior genera campo en $(+\hat{z})$.

Calculamos cada contribución. Como queremos campo en C ponemos ahí el origen de coordenadas. Luego:

$$\underline{B}_{\text{TOT}}(C) = \underline{B}_{\text{Arco Superior}}(C) + \underline{B}_{\text{Arco Inferior}}(C).$$



Arrangamos por el arco superior. Allí vale

$$\underline{r} = \underline{0} \quad (\text{el punto C})$$

$$\underline{r}' = R \hat{r} \quad (\text{las corrientes})$$

$$d\underline{r}' = R d\theta (-\hat{\theta}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{el menos proviene de cómo circula la} \\ \text{corriente en este tramo, en } (-\hat{\theta}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (\underline{r} - \underline{r}') = -R \hat{r} \quad \text{y} \quad |\underline{r} - \underline{r}'|^3 = R^3. \quad \text{Entonces}$$

$$\underline{B}_{\text{Arco Superior}}(\underline{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{I_1 R d\theta (-\hat{\theta}) \times R (-\hat{r})}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{R} \int_{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} d\theta (-\hat{z}) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{R} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] (-\hat{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{R} (2\pi - 2\alpha) (-\hat{z})$$

El inferior es similar, solo que ahí $d\underline{r}' = R d\theta (+\hat{\theta})$ porque corriente I_2 y versar $\hat{\theta}$ tienen igual sentido. Luego:

$$\underline{B}_{\text{Arco inferior}}(\underline{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{I_2 R d\theta (\hat{\theta}) \times R (-\hat{r})}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} d\theta (\hat{z}) =$$

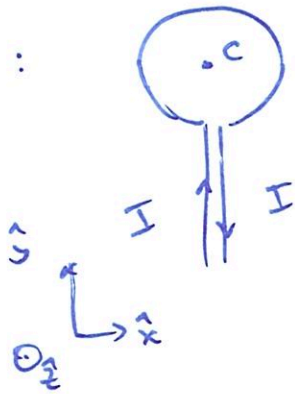
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2}{R} \left[-\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} + \alpha \right] (\hat{z}) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R} (2\alpha) (\hat{z})$$

Sumando todo en C tenemos:

$$\underline{B}_{TOT}(C) = \underline{B}_{TOT}(O) = \frac{\mu_0}{2\pi R} \left[-I_1 (\pi - \alpha) + I_2 \alpha \right] \hat{z}$$

(b) Casos límites:

$\alpha \rightarrow 0$:

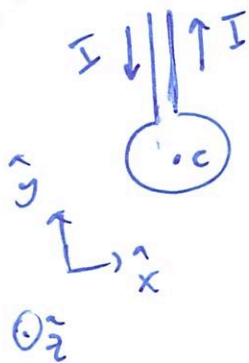


en este caso $\begin{cases} I_1 \rightarrow I \\ I_2 \rightarrow 0 \end{cases}$ con $\alpha \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \underline{B}_{TOT}(C) = \frac{\mu_0 I}{2R} (-\hat{z})$$

que coincide el campo \underline{B} esperado para espira y corriente 'horaria'.

$\alpha \rightarrow \pi$:



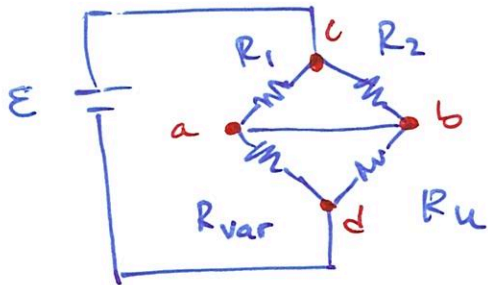
en este caso: $\begin{cases} I_1 \rightarrow 0 \\ I_2 \rightarrow I \end{cases}$ con $\alpha \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \underline{B}_{TOT}(C) = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{z}$$

coincidente y campo \underline{B} para espira y corriente 'anti-horaria'.

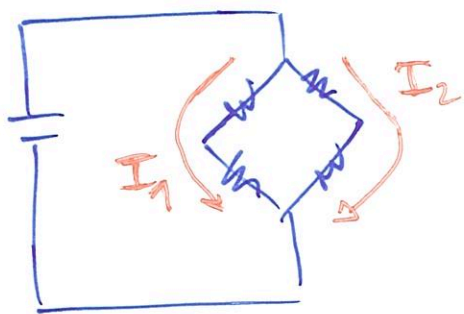
Problema 4.

(a) El puente/circuito está 'equilibrado', es decir que de (a) a (b) no circula corriente. Y tenemos el circuito dado por



Si entre (a) y (b) no circula corriente esto quiere decir que entre (a) y (b) la diferencia de potencial/tensión es nula. Por otro lado sabemos también que la diferencia de tensión entre (c) y (d) es la misma, y es la dada por la fuente; \mathcal{E} .

llamemos I_1 e I_2 a las corrientes en cada rama del circuito:



y sabemos que

$$I = I_1 + I_2;$$

aunque $I_1 \neq I_2$
en general.

Entonces la diferencia de tensión entre (a) y (c) debe ser la misma que entre (b) y (c), luego...

$$\begin{cases} \Delta V_{a-c} = I_1 R_1 \\ \Delta V_{b-c} = I_2 R_2 \end{cases}$$

Pero esas corrientes las tenemos, ya que cada rama está a una diferencia de tensión dada x la fuente, luego

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_{var}} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_u}$$

Luego tenemos

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + R_{var}} = \frac{\varepsilon R_2}{R_2 + R_u}$$

$$\Rightarrow (R_2 + R_u) R_1 = R_2 (R_1 + R_{var}) \Rightarrow$$

$$R_u = \frac{R_2 (R_1 + R_{var}) - R_2 R_1}{R_1} \Rightarrow R_u = \frac{R_2 R_{var}}{R_1}$$

Usando los valores del problema, tenemos

$$R_u = \frac{15 \, \Omega \cdot 12 \, \Omega}{160 \, \Omega} = 1.125 \, \Omega$$

(b) El circuito es puramente resistivo, con lo cual su comportamiento en alterna (y en estacionario, como se afirma en el enunciado) no cambia. El valor de R_u seguirá siendo el mismo que el obtenido en (a).