CLASIFICACIÓN DE MEDICIONES - LEY DE PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRES

Medición Directa

Se denomina "**medición directa**" a la operación de aplicar directamente el instrumento de medición a la magnitud que se quiere medir. Por ejemplo, cuando medimos la longitud de una mesa por medio de una cinta métrica, o el diámetro de un cilindro por medio de un tornillo micrométrico, o un intervalo de tiempo con un cronómetro, etc. El resultado de la medición se expresa como:

$$\mathrm{X} = (x_0 \pm \Delta x) \text{ unidades} \tag{1}$$

donde X, es el mensurando representado por la magnitud física, x_0 es el valor más probable o representativo, y Δx es la incertidumbre absoluta de medición. Se recomienda utilizar unidades del Sistema Internacional de unidades SI [1,2].

En el caso de mediciones directas, la incertidumbre se determina teniendo en cuenta las diferentes contribuciones asociadas al instrumento y proceso de medición:

Caso 1: Se mide en forma directa <u>una sola vez</u>

En este caso el valor de x_0 en la ecuación (1) corresponderá al valor medido, es decir al valor de la lectura que muestra el instrumento. La incertidumbre absoluta se determina:

$$\Delta x = \sigma_{nom} = \sqrt{\sigma_{inst}^2 + \sigma_{sist}^2 + \sigma_{def+\cdots}^2} \tag{2}$$

donde σ_{nom} tiene en cuenta fundamentalmente la apreciación del instrumento. También pueden considerarse efectos de tipo sistemático como por ejemplo los debidos a la calibración del instrumento. Otros efectos pueden surgir por a una falta de definición en el mensurando, en cuyo caso se debe estimar la contribución correspondiente. La cantidad de términos a considerar en la ecuación (2) debe determinarla el operador. Para los casos que vamos a tratar en la materia solo se considerará la contribución debida a la apreciación del instrumento, despreciando el resto de los términos de la ecuación (2), con lo cual $\sigma_{nom} \cong \sigma_{inst}$.

Observación: El procedimiento de sumar los cuadrados de los errores es un resultado de la estadística, y proviene de suponer que todas las distintas fuentes de error son independientes una de otras, [3].

Caso 2: Se mide en forma directa <u>N veces un mismo mensurando y bajo las mismas condiciones</u>

En este caso el valor de x_0 de la ecuación (1) suele estar determinado por el promedio de las N mediciones directas, $\overline{x_0}$. La incertidumbre absoluta se estima como:

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_{nom}^2 + \sigma_{est}^2} \tag{3}$$

donde

$$\sigma_{est} = \frac{S}{\sqrt{N}} \tag{4}$$

es la incertidumbre estándar del promedio, que se estima a partir del desvío estándar de las N mediciones directas, S.

En muchos casos prácticos estamos interesados en el estudio estadístico de la variación de las mediciones y realizamos N mediciones de la magnitud de interés. Por ejemplo podemos estar interesados en analizar la repetibilidad de un procedimiento, o en ver el efecto que tienen las fluctuaciones de un instrumento sobre las mediciones. De la ecuación (4) puede observarse cómo la realización de varias mediciones del mesurando minimiza la incidencia de los errores estadísticos, es decir a medida que N aumenta, σ_{est} disminuye. Dado el carácter aleatorio de estos tipos de incertidumbres es claro que, al promediar los resultados, el promedio estará menos afectado por las desviaciones estadísticas que lo que están los valores individuales. **El procedimiento de repetición de mediciones no es aplicable para reducir los errores de carácter sistemático y mucho menos los espurios**.

Observación: Una de las dudas muy usuales que surgen a la hora de medir es ¿cuántas veces "tengo" medir? Esta respuesta dependerá entre otras cosas de cómo voy a usar dicho resultado o qué nivel de precisión necesito asegurar, etc. En primera aproximación uno puede esperar que σ_{est} sea a lo sumo del mismo orden de magnitud que σ_{nom}, en cuyo caso reemplazando en (4) es posible determinar el número óptimo de mediciones:

$$N_{op} \cong \left(\frac{s}{\sigma_{nom}}\right)^2 \tag{5}$$

Para la mayoría de los casos que vamos a ver en la materia no vamos a considerar las contribuciones estadísticas de las mediciones.

Medición Indirecta

En la mayor parte de los casos, el mensurando x no se mide en forma directa, sino que se determina a partir de otras magnitudes, que sí se miden en forma directa, mediante una relación funcional. Esto sucede cuando no es posible o no resulta conveniente aplicar directamente un instrumento de medición. En este caso se realiza una "**medición indirecta**". Supongamos que queremos determinar el área de un cuadrilátero. Procederemos a medir cada uno de sus lados con su correspondiente incertidumbre de medición. Surge entonces la pregunta ¿cómo procedo para obtener el resultado del medición correspondiente al área del cuadrilátero? ¿Cómo afectan las incertidumbres de medición de cada uno de los lados al resultado final?

Supongamos que el mensurando X es una función de las variables de entrada Y_1 e Y_2.

$$\mathrm{X} = f(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2) \tag{6}$$

donde asumiremos que Y_1 e Y_2 han sido medidos en forma directa, y cuyos resultados de medición son:

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_1 &= (y_1 \pm \Delta y_1)\ \text{unidades} \\ \mathrm{Y}_2 &= (y_2 \pm \Delta y_2)\ \text{unidades} \end{aligned} \tag{7}$$

La función f representa al mensurando y se conoce como modelo matemático del proceso de medición; por lo general sigue una ley física, y por lo tanto debe tener en cuenta todas las magnitudes que contribuyen al resultado final, [4]. Por un lado para obtener el valor más probable o representativo de X, se deben reemplazar en la función f los valores probables o representativos de las variables de entrada:

Asumiendo que las variables de entrada son independientes entre sí, es decir que no están correlacionadas, y teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Taylor de primer orden en torno al valor esperado, gracias a las propiedades de la varianza podemos obtener la **ley de propagación de incertidumbres**, [4]:

$$\Delta x = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^2 \ (\Delta y_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^2 \ (\Delta y_2)^2} \right] \text{unidades} \tag{8}$$

donde $\left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)$ es la derivada parcial de f respecto de la variable Y_1, y $\left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)$ es la derivada parcial de f respecto de la variable Y_2. Observar que cada término en la ecuación (8) tiene unidades de tal manera que el resultado de la cuenta entre corchetes tendrá las unidades correspondientes al mensurando X.

La forma general para funciones con más de n variables de entrada, la ecuación (8) queda:

$$\Delta x = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^2 \ (\Delta y_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^2 \ (\Delta y_2)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_3}\right)^2 \ (\Delta y_3)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_n}\right)^2 \ (\Delta y_n)^2} \right] \text{unidades}$$

$$\Delta x = \left[\sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial Y_i}\right)^2 \ (\Delta y_i)^2} \right] \text{unidades} \tag{9}$$

Esta expresión permite además de determinar la incertidumbre absoluta del resultado final, analizar las contribuciones de cada variable de entrada. Esto resulta importante a la hora de evaluar cómo mejorar la medición del mensurando X o en la planificación de dicha medición.

Ejemplo 1:

Para medir el volumen de un cuerpo prismático se miden sus tres dimensiones, las cuales dan como resultado *A*=(5,1 ± 0,1) cm, B=(3,25 ± 0,05) cm y *C*=(10,7 ± 0,2) cm. Expresar el resultado de la medición del volumen.

A) Identificamos el mensurando: V = el volumen del prisma
B) Escribimos el modelo matemático que representa a dicho mensurando. Aquí asumimos que el cuerpo es prisma perfecto, con lo cual:

$$V = A.B.C \tag{10}$$

C) Determinamos el valor más probable o representativo de V, reemplazando los valores más probables *a, b* y *c* en el modelo matemático:

$$V = A.B.C$$
$$v = a.b.c \tag{11}$$
$$v = (5{,}1 \text{ cm}).(3{,}25 \text{ cm}).(10{,}7 \text{ cm})$$
$$v = 177{,}3525 \text{ cm}^3 \tag{12}$$

Dado que aún no conocemos la incertidumbre de Δv, no podemos acotar el valor obtenido en (12).

D) Aplicamos la ley de propagación de incertidumbre al modelo matemático dado por (10).

$$\Delta v = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)^2 \ (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)^2 \ (\Delta b)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial C}\right)^2 \ (\Delta c)^2} \right] \tag{13}$$

Para ello determinamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = b.c \qquad \frac{\partial V}{\partial B} = a.c \qquad \frac{\partial V}{\partial C} = a.b$$

Reemplazando nos queda:

$$\Delta v = \left[\sqrt{(b.c)^2\ (\Delta a)^2 +\ (a.c)^2\ (\Delta b)^2 + (a.b)^2\ (\Delta c)^2}\right] \quad (14)$$

$$\Delta v = \left[\sqrt{(3{,}25\ \mathrm{cm}.10{,}7\ \mathrm{cm})^2\ (0{,}1\ \mathrm{cm})^2 +\ (5{,}1\ \mathrm{cm}.10{,}7\ \mathrm{cm})^2\ (0{,}05\ \mathrm{cm})^2 + (5{,}1\ \mathrm{cm}.3{,}25\ \mathrm{cm})^2\ (0{,}2\ \mathrm{cm})^2}\right]$$

$$\Delta v = \left[\sqrt{12{,}09300625\ \mathrm{cm}^6 + 7{,}44471225\ \mathrm{cm}^6\ + 10{,}989225\ \mathrm{cm}^6}\right] \quad (15)$$

$$\Delta v = 5{,}52511932\ \mathrm{cm}^3$$

Por tratarse de una incertidumbre expresamos este valor con hasta dos cifras significativas con lo cual la incertidumbre en el volumen medido es:

$$\Delta v = 5{,}5\ \mathrm{cm}^3$$

E) Ahora sí podemos acotar el valor más probable de V, dado por (12):

$$v = 177{,}4\ \mathrm{cm}^3$$

F) Expresamos el resultado final, de la medición indirecta de V:

$$\boxed{V = (177{,}4\ \pm 5{,}5)\ \mathrm{cm}^3}$$

Ejemplo 2:

Se quiere hallar el área de un círculo (con su respectiva incertidumbre absoluta y relativa) cuyo radio es R=(7,5 ± 0,1) cm.

A) Identificamos el mensurando: A = área de un círculo

B) Escribimos el modelo matemático que representa a dicho mensurando. Aquí asumimos que se trata de un círculo perfecto, con lo cual:

$$A = \pi.R^2 \quad (16)$$

C) Determinamos el valor más probable o representativo de A, reemplazando el valor más probables de R, es decir *r=7,5* cm, en el modelo matemático:

$$A = \pi.R^2$$
$$a = \pi.r^2 \quad (17)$$
$$a = \pi.(7{,}5\ \mathrm{cm})^2$$
$$a = 176{,}7145868\ \mathrm{cm}^2 \quad (18)$$

Dado que aún no conocemos la incertidumbre de Δa, no podemos acotar el valor obtenido en (17).

D) ¿qué pasa con el valor de π? ¿tiene incertidumbre? ¿cuánto vale? Para ver esto apliquemos la ley de propagación de incertidumbre al modelo matemático dado por (15), asumiendo a la constante π como una variable de entrada:

$$\Delta a = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial R}\right)^2\ (\Delta r)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \pi}\right)^2\ (\Delta \pi)^2}\right] \quad (19)$$

Para ello determinamos las derivadas parciales:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial R}\right) = 2.\pi.r \qquad \left(\frac{\partial A}{\partial \pi}\right) = r^2$$

Reemplazando nos queda:

$$\Delta a = \left[\sqrt{(2.\pi.r)^2\ (\Delta r)^2 +\ (r^2)^2\ (\Delta \pi)^2}\right] \quad (20)$$

Muchas de las constantes físicas son determinadas en forma experimental, y por tanto tienen asociada una incertidumbre, pese a ser “constantes”. En este caso, el valor de $\Delta\pi$ dependerá del número de cifras significativas con las que se exprese dicha constante. Por ejemplo si se toma $\pi = 3{,}14$, la incertidumbre correspondiente será $\Delta\pi = 0{,}01$. Ahora bien si tomamos π con todas las cifras significativas de nuestra calculadora (como se hizo para obtener (17)), podemos asumir que $\Delta\pi$ será del orden de 10^{-8} o incluso menor, con lo cual el segundo término de la ecuación (19) resultará despreciable, quedando:

$$\Delta a = \left[\sqrt{(2.\pi.r)^2\ (\Delta r)^2}\right]$$

Reemplazando:

$$\Delta a = \left[\sqrt{(2.\pi.7{,}5\ \mathrm{cm})^2\ (0{,}1\ \mathrm{cm})^2}\right]$$

$$\Delta a = \left[\sqrt{22{,}2066099\ \mathrm{cm}^4}\right]$$

$$\Delta a = 4{,}71238898\ \mathrm{cm}^2$$

Por tratarse de una incertidumbre expresamos este valor con hasta dos cifras significativas con lo cual la incertidumbre en el volumen medido es:

$$\Delta a = 4{,}7\ \mathrm{cm}^2$$

E) Ahora sí podemos acotar el valor más probable de A, dado por (17):

$$a = 176{,}7\ \mathrm{cm}^2$$

F) Expresamos el resultado final, de la medición indirecta de A:

$$\boxed{A = (176{,}7\ \pm 4{,}7)\ \mathrm{cm}^2}$$

Ejemplo 3:

Supongamos que medimos un cierto ángulo $\varphi_0 = 32°$, con un transportador de apreciación 1°. Si tomamos la apreciación como la incertidumbre en la medición del ángulo podemos analizar cómo se propaga dicha incertidumbre al $\sin\varphi$.

A) Identificamos el mensurando: $Z = \sin\varphi$

B) En este caso ya tenemos el modelo matemático que representa a dicho mensurando

$$Z = \sin\varphi \tag{20}$$

C) Apliquemos la ley de propagación de incertidumbre para este caso:

$$\Delta z = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2\ (\Delta\varphi)^2}\right] \tag{22}$$

Para ello determinamos la derivada:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right) = \cos\varphi_0$$

Con lo cual:

$$\Delta z = \left[\sqrt{(\cos\varphi_0)^2\ (\Delta\varphi)^2}\right]$$

$$\Delta z = \cos\varphi_0 . \Delta\varphi \tag{23}$$

Como puede verse de analizar (23), para poder resolver esta clase de situaciones debemos evaluar correctamente la incertidumbre en el ángulo, es decir tanto la incertidumbre en el ángulo como el ángulo deben ser trabajos en radianes, para tener coherencia en las unidades utilizadas al determinar el error en la función trigonométrica dependiente del ángulo en cuestión. De lo contrario nos quedaría ΔZ expresado en unidades de °, lo cual no tendría sentido.

D) Teniendo esto presente, entonces expresaremos $\Delta\varphi_0$ y φ_0 en radianes:

$$\Delta\varphi_0 = 1° = \frac{1°.\pi}{180°} \cong 0{,}017 \text{ rad}$$

$$\varphi_0 = 32° = \frac{32°.\pi}{180°} = 0{,}55850536 \text{ rad} \cong 0{,}559 \text{ rad}$$

Reemplazando en (20):

$$Z = \sin\varphi$$
$$z = \sin\varphi_0 \tag{24}$$
$$z = \sin(0{,}559 \text{ rad}) = 0{,}530338677$$

Y en (22):

$$\Delta z = \cos\varphi_0 . \Delta\varphi$$

$$\Delta z = \cos(0{,}559 \text{ rad}).(0{,}017 \text{ rad})$$

$$\Delta z = 0{,}014$$

E) Expresamos el resultado final, de la medición indirecta de A:

$$\boxed{Z = (0{,}530 \ \pm 0{,}014)}$$

Observación: El radián es una unidad adimensional, que se define como el cociente entre la longitud de un arco de circunferencia y el radio de la misma. Por lo tanto:

$$1 \text{ rad} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1$$

Ejercicios propuestos

1) Se pide calcular la potencia disipada por una resistencia eléctrica cuando se le aplica una diferencia de potencial V = (8,25 ± 0,01) V, pasando por ella una corriente I = (0,20 ± 0,005) A. Sabiendo que la potencia se calcula mediante la ecuación P = VI, calculá su valor más probable, incluyendo su incertidumbre y expresá el resultado de esta medición.
2) Si se conoce la aceleración de la gravedad (g±Δg) y se mide la masa de un bloque (m±Δm), escribí la ecuación necesaria para determinar el peso del bloque.
3) Se pide calcular la energía potencial gravitatoria, E_P, de un cuerpo con masa M = (32,0 ± 0,1) g, situado a una altura H = (0,5 ± 0,05) m. Sabiendo que la aceleración de la gravedad es g = (9,78 ± 0,01) m/s². Calculá E_P, su incertidumbre y expresá el resultado de dicha medición.
4) La diferencia de potencial entre dos placas paralelas es de V = (9,52 ± 0,02) V y su separación es de d = (12,0 ± 0,1)cm. Suponiendo que la longitud de las placas es mucho mayor que la separación de las mismas, ¿Cuál es el resultado de la medición del campo eléctrico medio entre ellas? (Recordar que el campo eléctrico E entre dos placas infinitas paralelas separadas por una distancia d con una diferencia de potencial V es: E=V/d)
5) Si se mide un ángulo de φ=67,0° con una apreciación 0,5°, si se toma como incertidumbre en el ángulo la apreciación del instrumento. ¿Cuál sería el incertidumbre en z si definimos: Z= cos φ?

BONUS

6) En un experimento es necesario calcular el momento de inercia de una esfera. Para ello se mide su diámetro con un calibre. Se obtiene como resultado (4,55 ± 0,01) cm. La masa M resulta igual a (63,5 ± 0,5) g. Si el momento de inercia de una esfera es $I = 2MR^2/5$, donde R es el radio ¿cuál es el valor de I, incluyendo su incertidumbre? Escriba también la ecuación con la cual se calcula dicha incertidumbre. ¿Cuánto vale su incertidumbre relativa?

Referencias

[1] https://www.inti.gob.ar/areas/metrologia-y-calidad/si

[2] https://www.inti.gob.ar/areas/metrologia-y-calidad/patrones-nacionales

[3] S. Gil y E. Rodrigues, "Física re-Creativa", Prentice Hall, Argentina (2001)

[4] Mar Pérez Hernández, "Estimación de incertidumbres. Guía GUM". e-medida, Revista española de Metrología, pp 114-130, diciembre de 2012.