Ondas:

I. Ondas estacionarias en una cuerda

1. Objetivo

Esta práctica tiene el propósito de estudiar **ondas estacionarias en cuerdas con sus dos extremos fijos**. Se propone medir los modos normales de vibración, determinando experimentalmente sus frecuencias características. En función de estos resultados, se busca determinar la velocidad de las ondas en términos de la tensión y la densidad de masa de la cuerda.

2. Introducción

Una onda mecánica es una perturbación que viaja por un material o una sustancia (esto es el medio de la onda) que produce que las partículas del medio sufran desplazamientos. Cuando estos desplazamientos son perpendiculares o transversales a la dirección de propagación de la onda, decimos que se trata de una onda transversal. En cambio, si los movimientos de las partículas del medio son hacia adelante y hacia atrás en la misma línea en que viaja la onda, decimos que se trata de una onda longitudinal. Para más información ver el video demostrativo: https://www.youtube.com/watch?v=-_PMqqEnr7E

Consideremos una cuerda de longitud L sujeta rígidamente en ambos extremos. Cuando se la perturba, en ella se produce una onda que se refleja una y otra vez en los extremos de la cuerda formando una onda estacionaria. La onda estacionaria y(x, t) es el resultado de la superposición de dos movimientos ondulatorios armónicos de igual amplitud y frecuencia que se propagan en sentidos opuestos a través de un medio

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t) \tag{1}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, λ es la longitud de onda y $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular (siendo T es período de la onda). El primer término de la ec. 1 ($2A \sin(kx)$) corresponde a la amplitud (que depende de la posición x) y el término $\sin(\omega t)$ representa la dependencia temporal.

Para este caso, la onda estacionaria que resulta debe tener un nodo en ambos extremos de la cuerda. Entonces, para cualquier instante de tiempo se debe cumplir $2A \sin(0) = 0$ y $2A \sin(kL) = 0$

$$2A \sin(0) = 0 \text{ y } 2A \sin(kL) = 0 \tag{2}$$

De esta condición se deduce que ($kL = n\pi$):

$$L = n\, \lambda/2 \text{ con } n = 1, 2, 3, ... \tag{3}$$

Dos nodos adyacentes están separados media longitud de onda ($\lambda/2$), así que la longitud de la cuerda debe ser un número entero de medias longitudes de onda. De la ec. 3 se tienen los posibles valores de λ:

$$\lambda_n = 2L/\,n \quad \text{con } n = 1, 2, 3, ... \qquad (4)$$

<u>Observación</u>: pueden existir ondas en la cuerda si la longitud de onda no cumple la ec. 4; sin embargo, no puede haber un patrón de onda estable con nodos y la onda resultante no puede ser estacionaria.

Para cada longitud de onda estacionaria λ_n se tiene una frecuencia de onda estacionaria f_n (sabiendo que $v = \lambda f$ donde v es la velocidad de propagación de la onda en el medio)

$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, ... \qquad (5)$$

Estas frecuencias se llaman armónicos, y el primer armónico f_1 (con n = 1) es la *frecuencia fundamental* que corresponde a la longitud de onda más grande λ_1 = 2L (ver figura 1).

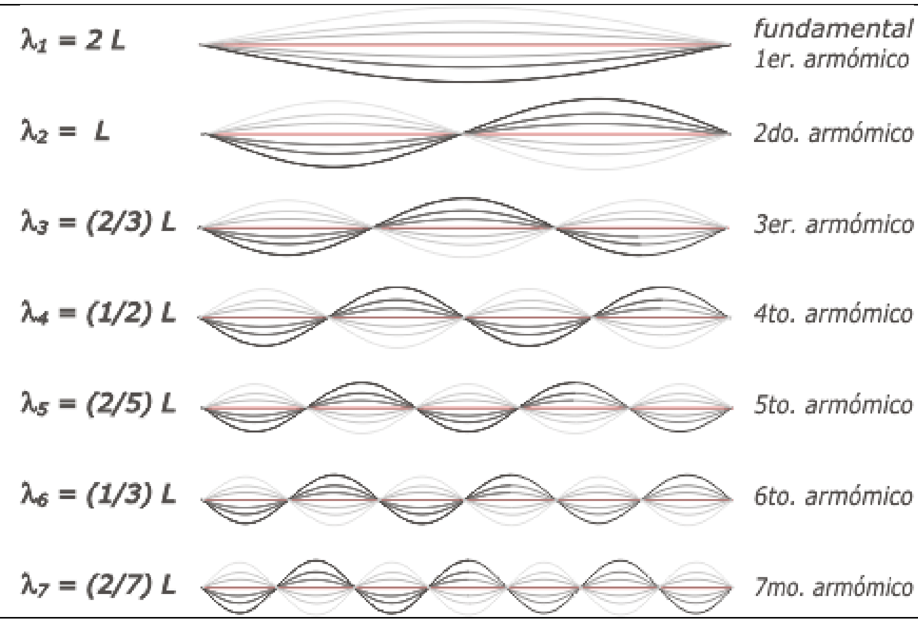

Figura 1. Representación gráfica de los modos de vibración de una cuerda con ambos extremos fijos. Se detallan hasta el 7mo armónico (https://ricuti.com.ar/no_me_salen/ondas/Ap_ond_11.html).

En una cuerda de densidad lineal μ sometida a la tensión T, la velocidad de propagación v de una onda viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (6)$$

Donde $\mu = m_c/L$, densidad de masa de la cuerda. Reemplazando la ec. 6 en la ec. 5 se tiene que las frecuencias para las que se observarán ondas estacionarias en una cuerda están dadas por:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (7)$$

3. Actividades – Dispositivo y mediciones

La figura 2 muestra un esquema del dispositivo experimental utilizado en esta parte de la práctica. Una cuerda se encuentra sujeta en ambos extremos, separados una distancia L. La tensión *T* de la cuerda está determinada por el peso colgado en uno de sus extremos. Un dispositivo mecánico imprime a la cuerda un movimiento oscilatorio armónico a una frecuencia y amplitud controladas.

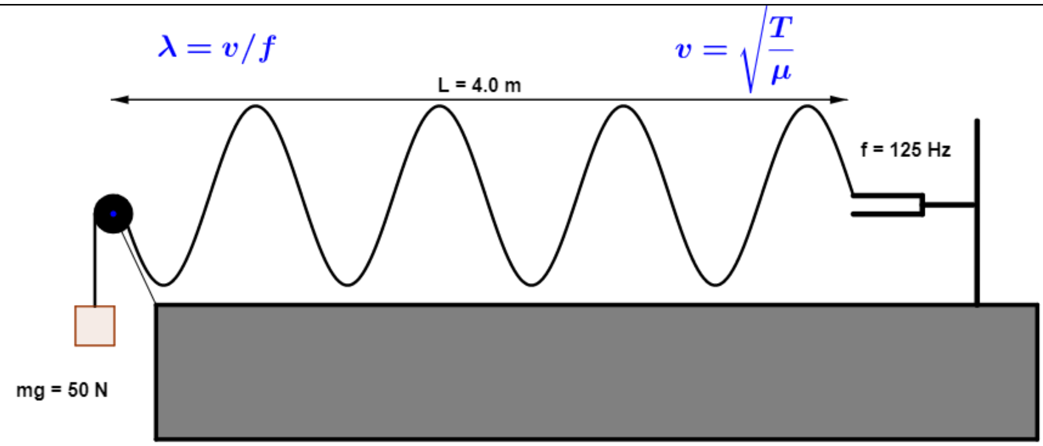

Figura 2. Esquema del dispositivo experimental utilizado para estudiar ondas estacionarias en una cuerda (https://ophysics.com/w8.html).

Para realizar la práctica se utilizará un simulador de ondas estacionarias en una cuerda de la página de oPhysics (https://ophysics.com/w8.html). El mismo permite variar la tensión de la cuerda (variando el peso de la masa colgada), la densidad lineal de la cuerda μ y por último la frecuencia de oscilación de la excitación mecánica.

Parte I

Para un valor de *T* y μ fijos, determine las frecuencias *f* que correspondan a los **modos normales** de excitación de la cuerda. ¿Cuántos modos normales se pueden ver? Para cada modo normal determine la longitud de onda λ. Graficar la **frecuencia en función de la inversa de la longitud de onda**. ¿Qué se obtiene de la pendiente del ajuste de la curva? ¿Qué concluye a partir de sus resultados experimentales? ¿Qué tipo de onda es?

Observación: la amplitud de la cuerda tiene que ser máxima para poder determinar de forma correcta los modos normales.

Parte II: Variación de masas

Para una cuerda dada de largo L, elegir al menos **8 pares de valores de tensión y densidad lineal μ**. En cada caso, para un armónico, calcular la velocidad de la onda usando $v = \lambda . f$. Grafique *v* en función de $\sqrt{T/\mu}$. ¿Qué conclusión puede obtener en este caso?

II. Ondas estacionarias de sonido

1. Objetivo

Estudiar la **frecuencia fundamental (de resonancia)** en una botella para distintas alturas de columna de agua o de volumen de líquido y encontrar un **modelo** adecuado.

2. Introducción

En la vida cotidiana encontramos fenómenos sonoros en los cuales la frecuencia depende de las dimensiones del objeto vibrante. Es muy probable que, por lo menos alguna vez, todos hayamos soplado por el pico de una botella y escuchado el sonido que se produce. Este es un caso en el que el tono generado depende del volumen: una botella de un litro suena más grave que una botella de medio litro.

Si tuviéramos botellas de distintos tamaños podríamos comprobar que, en efecto, cuanto más chico es el volumen de la cavidad resonante, mayor es la frecuencia. Pero ¿cómo es esta relación? Motivados por el estudio de un Tubo de Kundt, podríamos aventurar que la relación es de proporcionalidad inversa. Si así fuera, la frecuencia del primer armónico estaría dada por $f = c/4L$, donde c es la velocidad del sonido y L la longitud del tubo/botella. De esta manera, esperaríamos ver las dependencias que se muestran en la Figura 4.

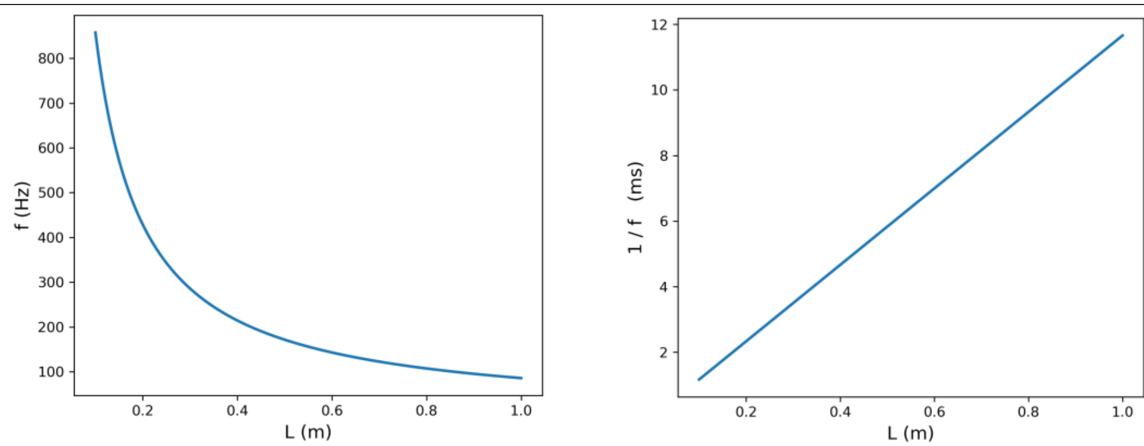

Figura 4. Dependencias esperadas según el modelo "Tubo de Kundt semiabierto". La frecuencia disminuye a medida que aumenta el largo de la columna de aire.

El inconveniente de hacer el experimento usando distintas botellas es que la frecuencia fundamental podría depender de otras variables además del volumen ¿La forma? ¿Las dimensiones del pico? Por eso, apuntamos a medir las dos variables, el volumen y la frecuencia, de manera controlada en una misma botella. Una solución consiste variar el volumen de aire en la botella controladamente, llenándola con agua. A medida que la columna de agua tiene mayor altura, el volumen del aire es menor, y por lo tanto esperaríamos frecuencias sonoras más altas.

3. Actividades – Dispositivo y mediciones

Actividad 1. Estimación de errores

Descargar la aplicación Spectroid para Android, o el programa Friture [1] para Windows, Linux, o Mac. La aplicación (y el programa) nos muestra el espectro de la señal de audio que recibe el micrófono. El espectro es un gráfico que nos dice la intensidad correspondiente a cada frecuencia recibida (Figura 5).

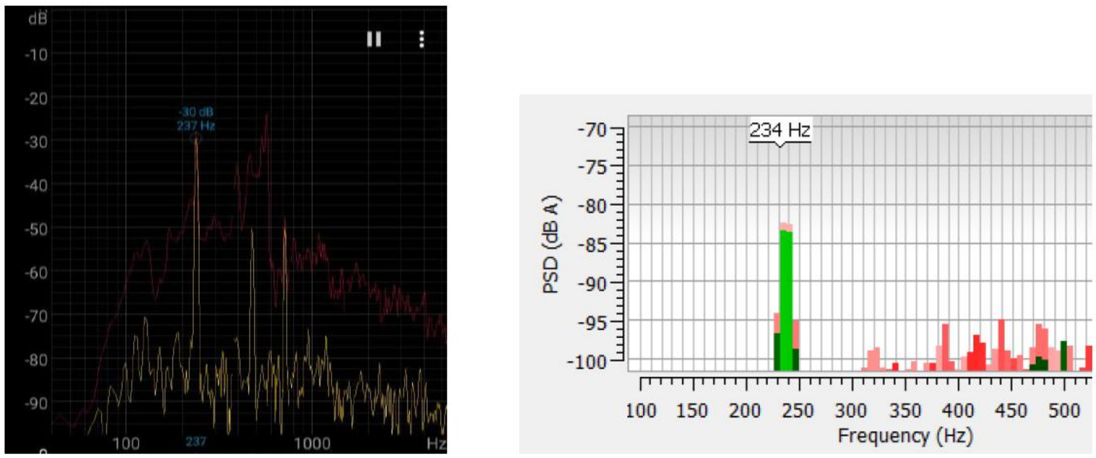

Figura 5. Pantalla del Spectroid (izq.) y Friture (der.)

En nuestro caso, el único elemento importante en el gráfico va a ser la ubicación **del máximo de intensidad**: ahí va a estar la frecuencia fundamental que buscamos en el experimento.

Antes de empezar a medir, hay que poner a prueba el programa y la **calibración** de nuestro sensor. Para ello, vamos a reproducir un sonido de frecuencia conocida, usando un generador de tonos como el que se encuentra en [2]. Seleccionando distintas frecuencias en un intervalo que consideren razonable, hagan mediciones y obtengan una **estimación del error**.

Actividad 2.Medición de la frecuencia de resonancia

Buscar una botella, preferentemente de vidrio y de pico angosto (ej: vino, cerveza o gaseosa). Llenando la botella con distintas cantidades de agua, hacerla sonar y registrar la frecuencia fundamental con Spectroid o Friture en cada caso. Según los instrumentos que disponga, mida, en cada instancia, la altura de la columna de agua (x), o bien el volumen del líquido, V_L. Cualquiera de las dos variables va a ser una medida indirecta del volumen de aire en la cavidad, V ¿Qué relación explícita o aproximada siguen la variable elegida y V?

Graficar **la frecuencia de resonancia (la fundamental) en función de x o V_L.** ¿La dependencia cualitativa es la esperada? Hacer un gráfico **de $1/f$ en función de x o de V_L** (modelo de Tubo de Kundt semiabierto).

Se propone un modelo alternativo, el del **Resonador Helmholtz** (ver Figura 6).

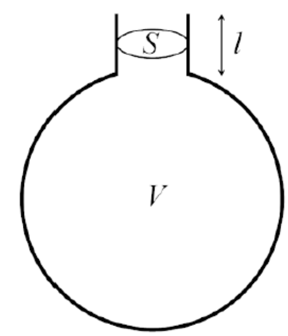

Figura 6. Un resonador de Helmholtz es una cavidad con un pico.

Según este modelo, la frecuencia fundamental de una cavidad en la que el aire ocupa un volumen *V,* que tiene un pico cilíndrico de área transversal *S* y longitud *l* viene dado por [3]:

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lV}} \tag{9}$$

Hay dos opciones para analizar el volumen libre de aire: medir el volumen del agua V_L o suponer una cavidad cilíndrica y medir la altura de la columna de agua *x*.

a. Volumen V_L:

Si llamamos V_0 al volumen de aire dentro de la botella vacía, al introducir agua el nuevo volumen vacío es $\boldsymbol{V = V_0 - V_L}$. De esta manera se obtiene a partir de la ec. 9

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{l(V_0 - V_L)}} \rightarrow \frac{1}{f^2} = -\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \frac{l}{S} V_L + \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \frac{l}{S} V_0 \tag{10}$$

Realizar un gráfico de $\boldsymbol{1/f^2}$ **en función de V_L**. ¿Considera que la botella se puede modelar como un resonador de Helmholtz?

b. Columna de agua de altura *x*:

En el caso de la botella, la cavidad se puede considerar cilíndrica, y se tiene que $\boldsymbol{V = LA}$, donde *L* es el largo y *A* es el área de la base. El largo es variable porque depende de la altura de la columna de agua, *x*. Si llamamos L_0 al largo inicial de la cavidad, al introducir la columna de agua, la longitud de la **cavidad resonante** es $L(x) = L_0 - x$. De esta manera, la ec. 9 se puede reescribir como

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{l(L_0 - x)A}} \rightarrow \frac{1}{f^2} = -\left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \frac{lA}{S} x + \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \frac{lA}{S} L_0 \tag{11}$$

Realizar un gráfico de $\boldsymbol{1/f^2}$ **en función de *x***. ¿Considera que la botella se puede modelar como un resonador de Helmholtz?

Referencias

[1] Analizador de espectro para PC: http://friture.org/download.html
[2] Generador de tonos: https://www.szynalski.com/tone-generator/
[3] Resonador Helmholtz: https://newt.phys.unsw.edu.au/jw/Helmholtz.html