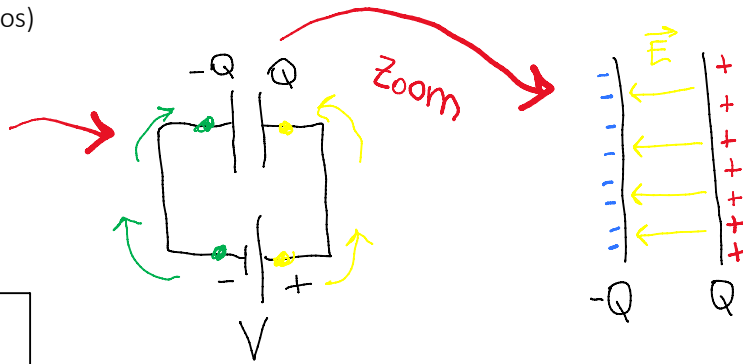


Guía 2 (capacitores y dieléctricos)

Capacidad eléctrica: $C = \frac{Q}{V}$

Capacidad de almacenar carga

Para calcular C voy a necesitar Q en función de V o viceversa.

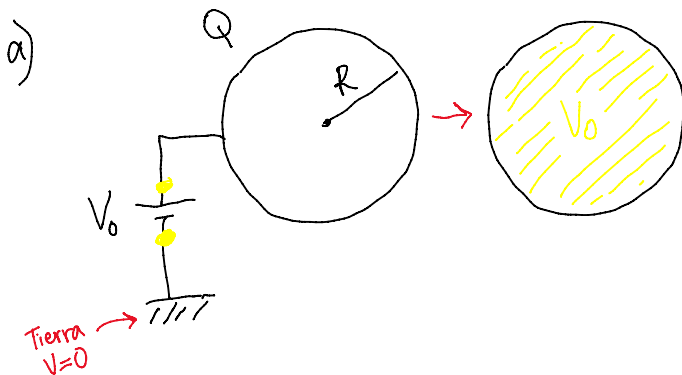


Ejercicio 4

Calcular la capacidad de las siguientes configuraciones de conductores:

- una esfera de radio R en el vacío; determinar el valor de R que haga $C = 1 \text{ pF}$.
- un condensador esférico de radio interior a y exterior b . Comparar con el resultado anterior para b muy grande.
- por unidad de longitud, para un condensador cilíndrico infinito de radios R_1 y R_2 .
- por unidad de área, para un condensador plano infinito; si la separación entre placas es de 1 mm , dar el valor del área para que $C = 1 \text{ F}$.

- una esfera de radio R en el vacío; determinar el valor de R que haga $C = 1 \text{ pF}$.



Recordar!

- El potencial dentro de conductores en equilibrio es constante.
- La superficie de los conductores es una superficie equipotencial.

$$\begin{cases} r > R \rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ r < R \rightarrow V(r) = \text{cte.} \Rightarrow V(r) = V_0 \end{cases} \rightarrow \text{Mismo potencial que una carga puntual de carga } Q \text{ (gracias a la simetría esférica!)}$$

$$\Rightarrow V(R) = V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow \text{Encontré el potencial en función de la carga} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 R = C$$

$$\rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 R = C$$

$$C = 1\text{pF} \Rightarrow R = \frac{1\text{pF}}{4\pi\epsilon_0}$$

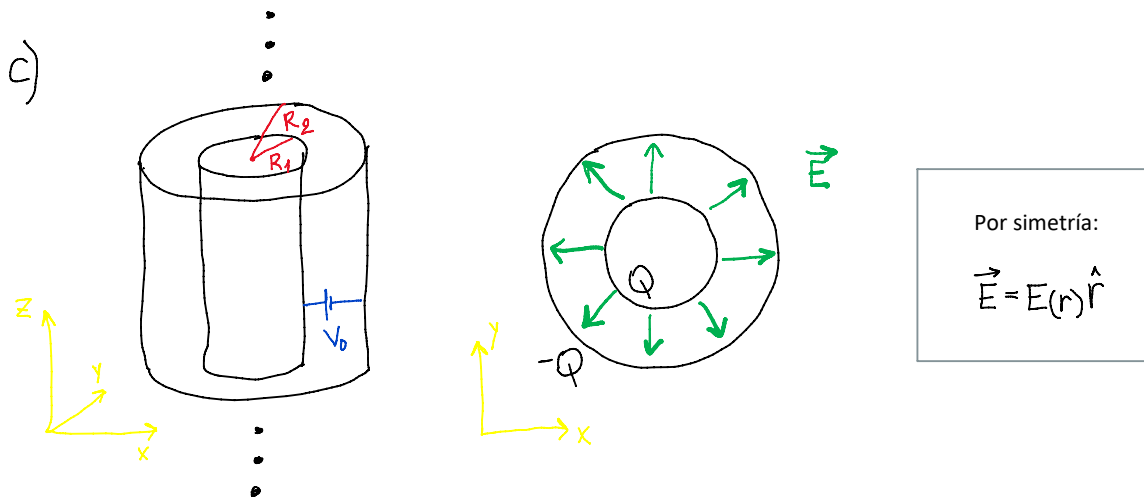
$$R = \frac{10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}}} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85} \text{m} = R$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

$$F = \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}}$$

$$\text{pF} = 10^{-12} \text{F}$$

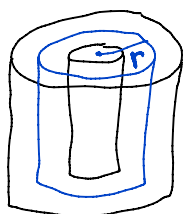
(c) por unidad de longitud, para un condensador cilíndrico infinito de radios R_1 y R_2 .



Necesitamos la diferencia de potencial entre los dos cilindros. $\rightarrow V_0$

$$V_0 = V(R_1) - V(R_2) = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{Cuidado con los signos!}$$

Necesito calcular el campo E:



Superficie de Gauss

$R_1 \leq r \leq R_2$ $\rightarrow$ El campo producido por el cilindro de afuera es NULO.
El campo está producido solo por el cilindro de adentro.

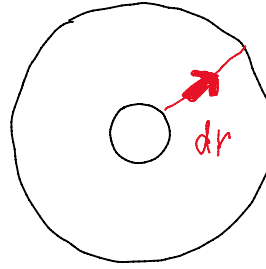
$$\rightarrow \vec{E}(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \hat{r}$$

- No estoy haciendo la cuenta, pero sale haciendo Gauss.
- Es el campo de un cilindro de largo L con carga Q, para radios mayores al radio del

cilindro.

- En el ejercicio L es infinito, pero ignoremos esto por ahora.

$$\Rightarrow V_0 = - \int_{R_2}^{R_1} \underbrace{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}}_{\vec{E}} \cdot \underbrace{\hat{r} \cdot d\vec{r}}_{dr}$$



$$\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$$

$$V_0 = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln(r) \Big|_{R_2}^{R_1}$$

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

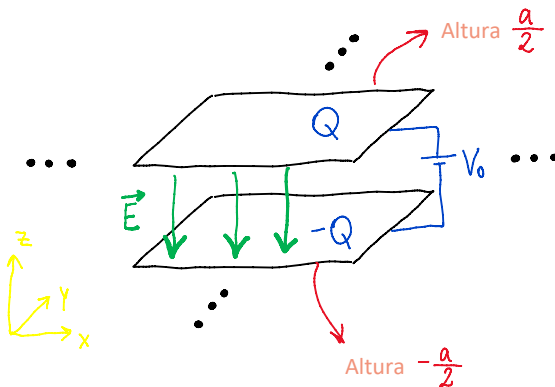
$$V_0 = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 L} (\ln(R_1) - \ln(R_2)) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\begin{aligned} \ln(a) + \ln(b) &= \ln(a \cdot b) \\ \ln(a) - \ln(b) &= \ln\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}} \quad \text{Capacidad por unidad de longitud}$$

(d) por unidad de área, para un condensador plano infinito; si la separación entre placas es de 1 mm, dar el valor del área para que $C = 1 \text{ F}$.



Por simetría:

$$\vec{E} = E(z) \hat{z}$$

$$Q = \sigma \cdot A \quad \begin{cases} \sigma & \text{Densidad de carga} \\ A & \text{Área} \end{cases}$$

a Separación entre planos

Necesito el campo entre los planos para después calcular la diferencia de potencial.

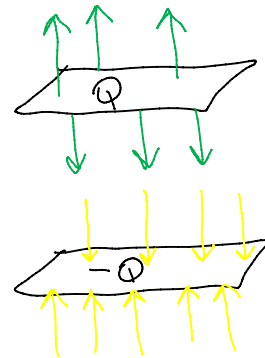
Un solo plano en $z = L$:
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{si } z > L \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{si } z < L \end{cases}$$

El campo total es la suma del campo de cada plano:

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} = 0 & \text{si } z > \frac{a}{2} \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} & \text{si } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} = 0 & \text{si } z < -\frac{a}{2} \end{cases}$$

 Plano de arriba

 Plano de abajo



$$\Rightarrow V_0 = V\left(\frac{a}{2}\right) - V\left(-\frac{a}{2}\right) = - \int_{-a/2}^{a/2} \underbrace{E(z)}_{\vec{E}} \cdot \underbrace{\hat{z} \cdot d\vec{z}}_{\hat{z} \cdot \hat{z} = 1}$$

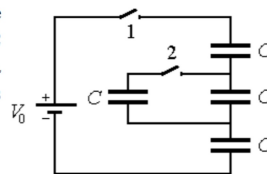
$$V_0 = - \int_{-a/2}^{a/2} \frac{-\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} z \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) \right) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma a}{\epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0 A}{a}$$

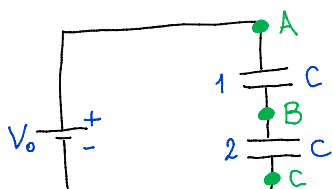
$$\Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{\epsilon_0}{a} \quad \text{Capacidad por unidad de área}$$

Ejercicio 7

Cuatro capacitores idénticos están conectados a una batería V_0 como se muestra en la figura. Al comenzar, la llave 1 está cerrada y la llave 2 está abierta. Luego de un tiempo muy largo se abre la llave 1 y se cierra la llave 2. ¿Cuál será la diferencia de potencial final entre los capacitores si la batería es de 9V?

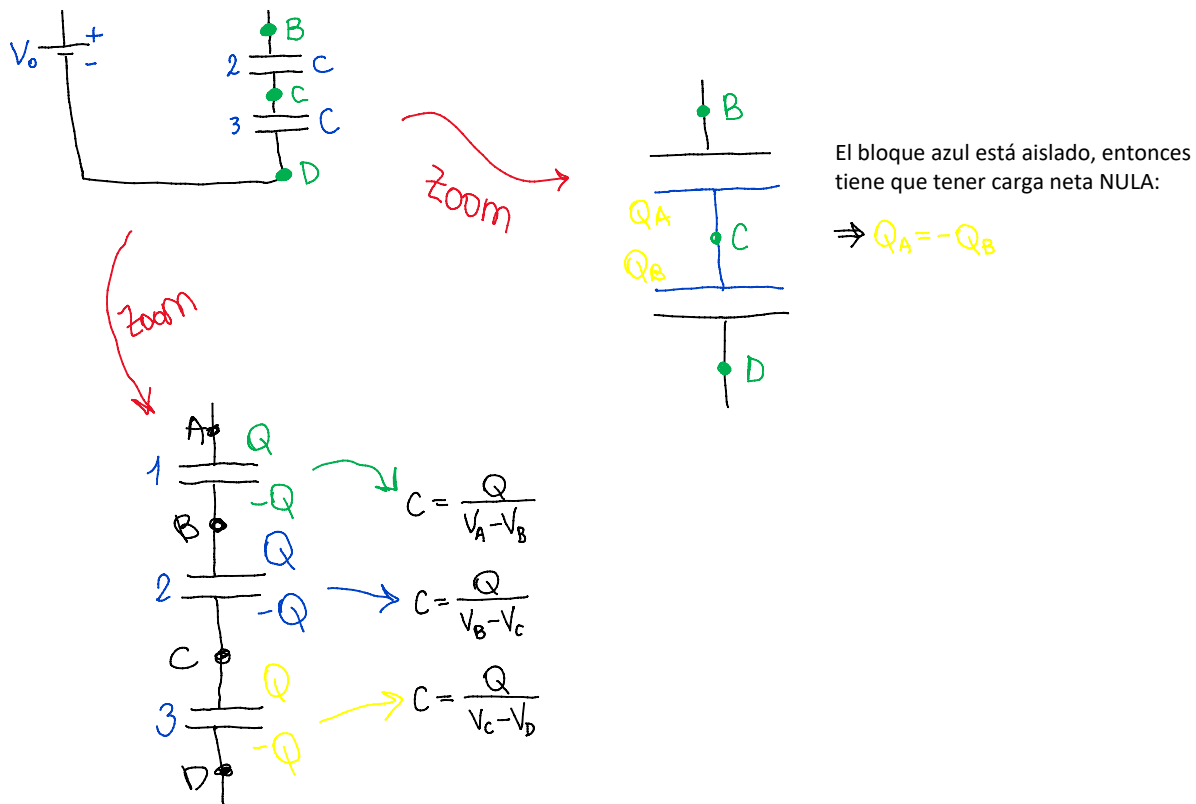


Llave 1 cerrada, llave 2 abierta:



$$V_A - V_D = V_0$$

1 n



$$\Rightarrow \frac{Q}{C} = V_A - V_B = V_B - V_C = V_C - V_D$$

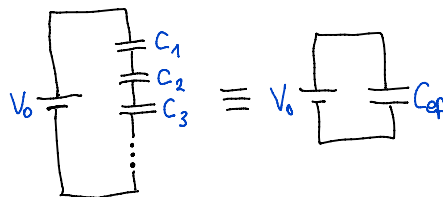
$$\Rightarrow \underbrace{V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_D}_{= V_A - V_D = V_0} = \frac{3Q}{C} \Rightarrow V_0 = \frac{3Q}{C} \Rightarrow Q = \frac{V_0 C}{3}$$

COMENTARIO: Capacitores en serie

$$V_0 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \right)$$

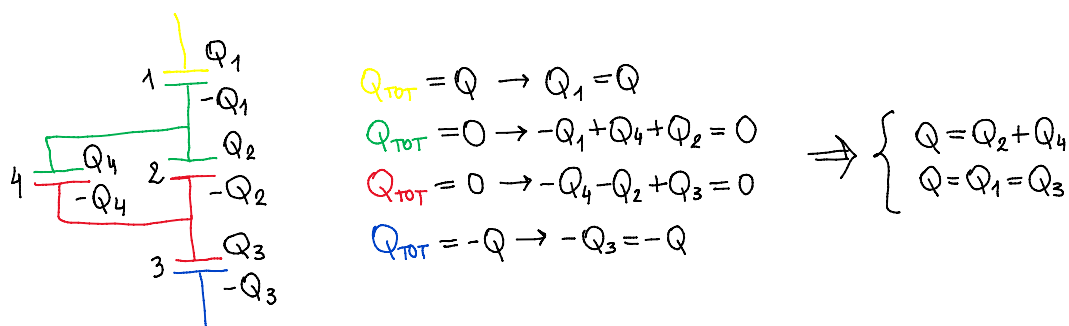
$\underbrace{\hspace{10em}}_{1/C_{eq}}$

C_{eq} Capacidad equivalente



Abro llave 1, cierro llave 2:

La consigna dice "luego de un tiempo muy largo" $\longrightarrow$ Tengo que esperar a que todos los capacitores se carguen completamente. O sea que tengo que esperar a llegar al equilibrio.



$$\textcircled{1} \rightarrow C = \frac{Q}{V_A - V_B} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{Q}{C} = \frac{CV_0}{3C} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{V_0}{3}$$

$Q = \frac{CV_0}{3}$

② y ④ $\rightarrow$ Los capacitores 2 y 4 están sometidos a la MISMA diferencia de potencial $V_B - V_C$

$\Rightarrow$ Se dice que están en PARALELO

$$\Rightarrow V_B - V_C = \frac{Q_2}{C} = \frac{Q_4}{C} \Rightarrow Q_2 = Q_4$$

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= Q_4 \\ Q_2 + Q_4 &= Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2Q_2 = Q \Rightarrow Q_2 = Q_4 = \frac{Q}{2} = \frac{CV_0}{6}$$

$Q = \frac{CV_0}{3}$

$$\Rightarrow V_B - V_C = \frac{CV_0}{6C} = \frac{V_0}{6} = V_B - V_C$$

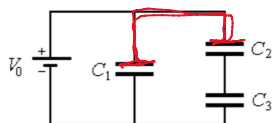
$$\textcircled{3} \rightarrow V_C - V_D = \frac{Q_3}{C} = \frac{Q}{C} = \frac{CV_0}{3C} = \frac{V_0}{3} = V_C - V_D$$

$Q = \frac{CV_0}{3}$

Ejercicio 8

En el circuito de la figura:

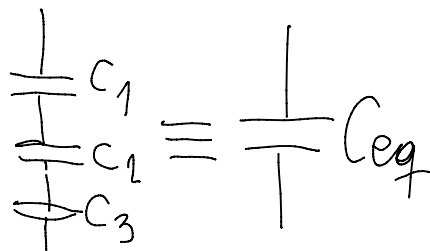
- Calcule la capacidad equivalente que se observa desde la batería.
- Encuentre las cargas de cada condensador y calcule la energía del sistema.
- Se desconecta la batería, ¿se redistribuyen las cargas?
- Si ahora agregamos un dieléctrico lineal de permitividad ϵ en el condensador C_1 , ¿cómo se redistribuyen las cargas? ¿Cuál es la energía del sistema? ¿Dónde está la energía que falta?



- Calcule la capacidad equivalente que se observa desde la batería.

COMENTARIO:

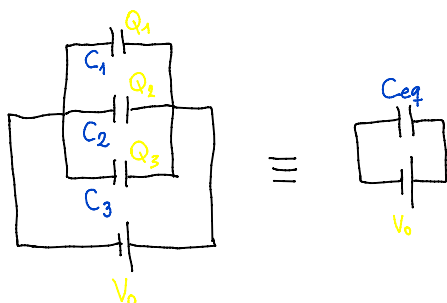
Como ya vimos, la capacidad equivalente de capacitores en SERIE es $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$



$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots}$$

Capacidad equivalente de capacitores en PARALELO:

- Todos los capacitores están a la misma diferencia de potencial

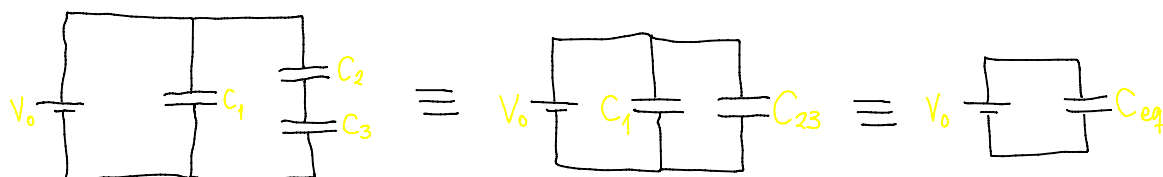


$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{Q_{TOT}}{V_0} = \frac{Q_1}{V_0} + \frac{Q_2}{V_0} + \frac{Q_3}{V_0} = C_1 + C_2 + C_3$$

- Caso general:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$



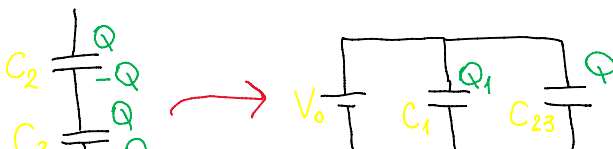
$$2 \text{ y } 3 \text{ están en serie} \Rightarrow \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$2, 3 \text{ y } 1 \text{ están en paralelo} \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_{23}$$

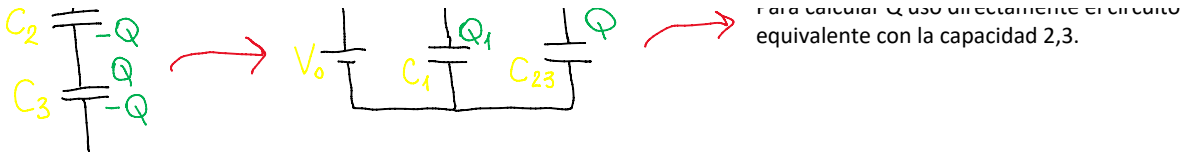
$$\Rightarrow C_{eq} = C_1 + \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

(b) Encuentre las cargas de cada condensador y calcule la energía del sistema.

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_0} \Rightarrow Q_1 = C_1 V_0$$



Para calcular Q uso directamente el circuito equivalente con la capacidad 2,3.



$$Q_2 = Q_3 = Q$$

$$C_{23} = \frac{Q}{V_0} \Rightarrow Q = C_{23} V_0$$

$$Q = \frac{V_0}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = Q_2 = Q_3$$

Energía del sistema?

$$\text{Energía de un capacitor: } U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

$$U_{\text{sist}} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{Q_3^2}{C_3}$$

$$U_{\text{sist}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{C_1^2 V_0^2}{C_1} + \frac{V_0^2 \left(\frac{1}{1/C_2 + 1/C_3} \right)^2}{C_2} + \frac{V_0^2 \left(\frac{1}{1/C_2 + 1/C_3} \right)^2}{C_3} \right\}$$

$$U_{\text{sist}} = \frac{V_0^2}{2} \left\{ C_1 + \frac{1/C_2 + 1/C_3}{(1/C_2 + 1/C_3)^2} \right\}$$

$$U_{\text{sist}} = \frac{V_0^2}{2} \left\{ C_1 + \frac{1}{1/C_2 + 1/C_3} \right\} = \frac{V_0^2}{2} \{ C_1 + C_{23} \}$$

Otras formas equivalentes (y más fáciles) de hacer lo mismo son:

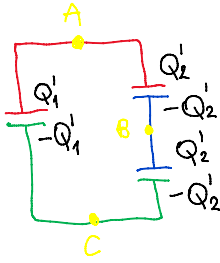
- Usar los capacitores 1 y 2,3 que están en paralelo entre sí, y por lo tanto, ambos están a potencial V_0 :

$$U_{\text{sist}} = \frac{1}{2} V_0^2 C_1 + \frac{1}{2} V_0^2 C_{23}$$

- Usar el capacitor equivalente, que está a potencial V_0 :

$$U_{\text{sist}} = \frac{1}{2} V_0^2 C_{\text{eq}}$$

(c) Se desconecta la batería, ¿se redistribuyen las cargas?



$$\left. \begin{aligned} Q_{TOT} &= Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \\ Q_{TOT} &= 0 = Q_2' - Q_2' \quad \checkmark \\ Q_{TOT} &= -Q_1 - Q_2 = -Q_1' - Q_2' = -Q_3' \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$$

$$\underbrace{V_A - V_B}_{\frac{Q_2'}{C_2}} + \underbrace{V_B - V_C}_{\frac{Q_2'}{C_3}} + \underbrace{V_C - V_A}_{-\frac{Q_1'}{C_1}} = 0 \Rightarrow \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} + \frac{Q_2'}{C_3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= Q_1' + Q_2' \\ \frac{Q_1'}{C_1} &= \frac{Q_2'}{C_2} + \frac{Q_2'}{C_3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Despejo } Q_1' \text{ y } Q_2'$$

Resolviendo:

$$Q_1' = Q_1$$

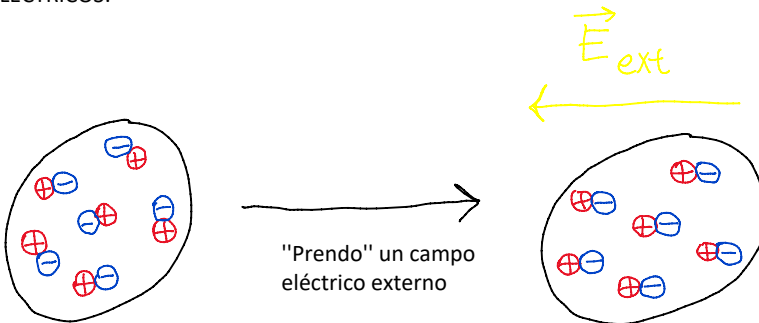
$$Q_2' = Q_2$$



NO se redistribuyen las cargas

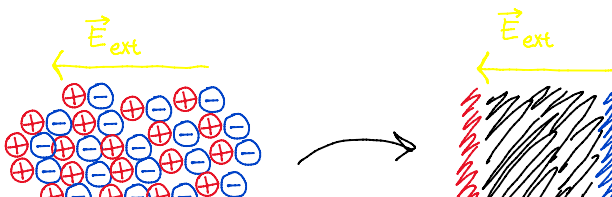
- (d) Si ahora agregamos un dieléctrico lineal de permitividad ϵ en el condensador C_1 , ¿cómo se redistribuyen las cargas? ¿Cuál es la energía del sistema? ¿Dónde está la energía que falta?

DIELÉCTRICOS:

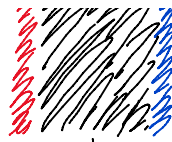
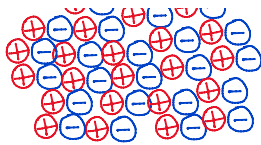


Dieléctrico:
Conjunto de dipolos
apuntando para
todos lados

Los dipolos se
alinean con el
campo externo



La carga en volumen se cancela (los dipolos se cancelan entre sí).
Solo sobrevive la carga en las superficies.



Neutro

La carga en volumen se cancela (los dipolos se cancelan entre sí).
Solo sobrevive la carga en las superficies.



El dieléctrico, al estar en presencia de un campo externo, genera su propio campo que se OPONE al campo externo.

$$\Rightarrow |\vec{E}_{\text{TOT}}| = |\vec{E}_{\text{ext}}| - |\vec{E}_{\text{diel.}}| < |\vec{E}_{\text{ext}}|$$

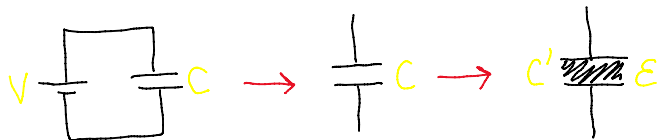
$\Rightarrow$ El dieléctrico disminuye el módulo de campo neto.

Permitividad ϵ : Nos dice cuánto es afectado el dieléctrico por el campo externo. A mayor permitividad, mayor será el campo del dieléctrico.

Permitividad del vacío: ϵ_0

Constante dieléctrica: $K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} > 1$ para dieléctricos

- Situación 1:



Desconecto la pila

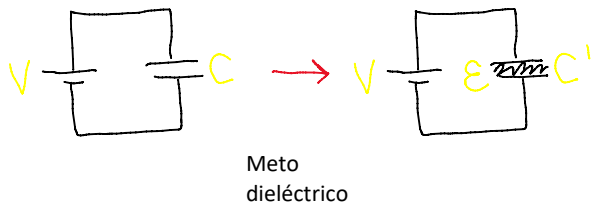
Meto dieléctrico

El dieléctrico disminuye el campo. Entonces, disminuye la diferencia de potencial en una cantidad K . Pero la carga se mantiene constante porque no tiene a donde ir.

$$V \rightarrow \frac{V}{K} < V$$

$$\Rightarrow C' = \frac{Q}{V/K} = K \frac{Q}{V} = KC \quad \text{La capacidad aumenta en una cantidad } K \text{ (Recordar que } K > 1 \text{ !)}$$

- Situación 2:



El dieléctrico disminuye el potencial pero en realidad este NO puede disminuir por estar conectado a una fuente. Entonces, la carga del capacitor tiene que aumentar en una cantidad K para mantener el potencial fijo.

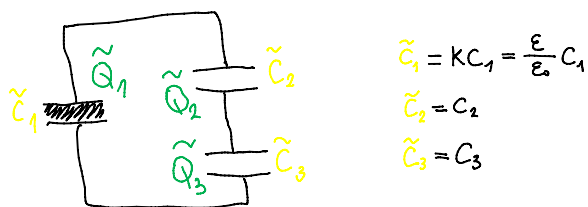
$$Q \rightarrow KQ > Q$$

$$\Rightarrow C' = \frac{KQ}{V} = KC \quad \text{La capacidad aumenta en una cantidad } K \text{ (Recordar que } K > 1 \text{!)}$$

$$K = \frac{C_{(\text{con dieléctrico})}}{C_{(\text{sin dieléctrico})}}$$

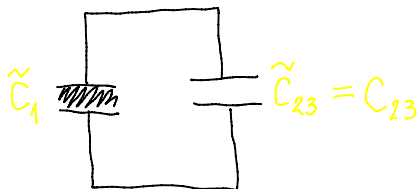
Volvamos al ejercicio:

Partiendo del ítem (c), agregamos un dieléctrico en el capacitor 1.



$$\left\{ \begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 \\ \Delta \tilde{V}_1 &= \underbrace{\Delta \tilde{V}_2 + \Delta \tilde{V}_3}_{\Delta \tilde{V}_{23}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \Delta V_i &\rightarrow \text{Diferencia de potencial en el capacitor } i \\ \text{Misma lógica que antes} \end{aligned}$$

Pero es más sencillo usar un capacitor equivalente entre 2 y 3:



$$\underbrace{Q_1 + Q_2}_C = \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_{23} \Rightarrow V_0(C_1 + C_{23}) = \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_{23} \quad (1)$$

$$C_1 V_0 + C_{23} V_0$$

$$\tilde{Q}_{23} = \tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_3$$

$$\Delta \tilde{V}_1 = \Delta \tilde{V}_{23} \Rightarrow \frac{\tilde{Q}_1}{K C_1} = \frac{\tilde{Q}_{23}}{C_{23}} \Rightarrow \tilde{Q}_1 = \frac{K C_1}{C_{23}} \tilde{Q}_{23} \quad (2)$$

$$(1), (2) \left(\frac{K C_1}{C_{23}} + 1 \right) \tilde{Q}_{23} = V_0 (C_1 + C_{23})$$

$$\tilde{Q}_{23} = \frac{V_0 (C_1 + C_{23})}{K \frac{C_1}{C_{23}} + 1} = \tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_3$$

$$(2) \tilde{Q}_1 = K \frac{C_1}{C_{23}} \frac{V_0 (C_1 + C_{23})}{K \frac{C_1}{C_{23}} + 1} = \frac{V_0 (C_1 + C_{23})}{1 + \frac{C_{23}}{K C_1}} = \tilde{Q}_1$$

Energía?

$$\tilde{U}_{sist} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}_1^2}{K C_1} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}_{23}^2}{C_{23}}$$

⋮

$$\tilde{U}_{sist} = \frac{V_0^2 (C_1 + C_{23})^2}{2 (K C_1 + C_{23})} = U_{sist} \frac{C_1 + C_{23}}{K C_1 + C_{23}} < U_{sist}$$

< 1 porque K > 1

⇒ Se pierde energía

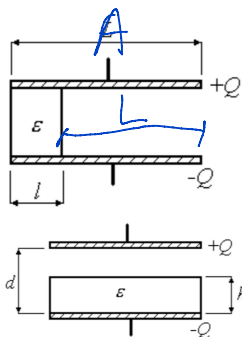
A donde se fue la energía faltante?

Es la energía que se usó para polarizar al dieléctrico.

Ejercicio 9

Entre las placas de un capacitor plano de sección A se coloca un dieléctrico como muestra la figura de arriba. Posteriormente se carga hasta que adquiere una carga Q y se lo desconecta de la fuente.

- Determine el valor de la capacidad del sistema, la diferencia de potencial entre las placas y la energía acumulada en el capacitor.
- ¿Qué sucederá con la carga, la diferencia de potencial y la energía si se le retira el dieléctrico? ¿Y si no se hubiese desconectado la fuente?
- Repita los cálculos anteriores para el caso en que el dieléctrico se coloca como muestra la figura de abajo.



- Determine el valor de la capacidad del sistema, la diferencia de potencial entre las placas y la energía acumulada en el capacitor.

$\text{Área } A$
 $L + l = A$
 ϵ
 Q
 $-Q$
 $\text{Separación } d$
 L
 $\text{Área } l$

$C_2 = \frac{\epsilon_0 L}{d}$
 $C_1 = K \frac{\epsilon_0 l}{d} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \cdot \frac{\epsilon_0 l}{d} = \frac{\epsilon l}{d}$

Están en paralelo

$C_{eq} = \frac{\epsilon l}{d} + \frac{\epsilon_0 L}{d} = \frac{\epsilon l + \epsilon_0 L}{d}$

$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$

$U_{sist} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{eq}}$

$\vec{E}_{cap} \downarrow$
 $\uparrow \vec{E}_{diel.}$

- ¿Qué sucederá con la carga, la diferencia de potencial y la energía si se le retira el dieléctrico? ¿Y si no se hubiese desconectado la fuente?

Si ahora saco el dieléctrico:

- Q queda igual porque no tiene a donde irse.
- V aumenta porque desaparece el campo E del dieléctrico.
- La energía aumenta porque ya no tengo que gastar energía en polarizar al dieléctrico.

Si no se hubiese desconectado la fuente, y se retira el dieléctrico:

- V queda igual porque la fuente me fija el potencial.
- La capacidad efectiva disminuye porque ya no tengo al potencial.

$\Rightarrow \begin{cases} Q = \Delta V \cdot C_{eq} \text{ disminuye} \\ U_{sist} = \frac{1}{2} C_{eq} (\Delta V)^2 \text{ disminuye} \end{cases} \longrightarrow \text{Ya no necesito carga extra para contrarrestar el campo del dieléctrico y mantener el potencial fijo.}$

- (c) Repita los cálculos anteriores para el caso en que el dieléctrico se coloca como muestra la figura de abajo.

