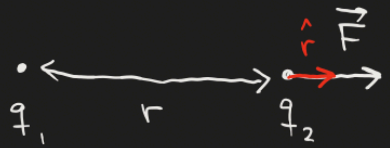
LEY DE COULOMB



$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$$

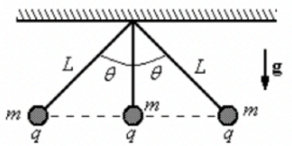
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

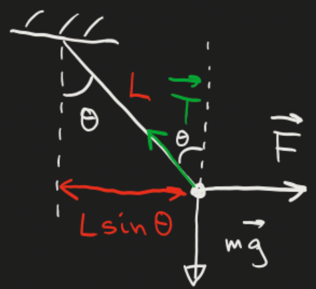
Campo eléctrico creado por q_1

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = k\frac{q_1}{r^2}\hat{r} = k\frac{q_1}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{F} = q_2\vec{E}$$

Ejercicio 2
En la figura se muestran tres cargas puntuales idénticas cada una de masa $m = 0.100\,\mathrm{kg}$ y carga $+q$, colgadas de tres cuerdas. Si la longitud de las cuerdas izquierda y derecha es $L = 30.0\,\mathrm{cm}$ y el ángulo $\theta = 45°$, determine el valor de q sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio.





$$\cos\theta = \frac{T_y}{T}$$

$$\rightarrow T_y = T\cos\theta$$

$$\hat{y})\quad T\cos\theta = mg \longrightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\hat{x})\quad F = T\sin\theta = mg\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = mg\,tg\,\theta$$

$$F = k\,\frac{q^2}{L^2\sin^2\theta} + k\,\frac{q^2}{4L^2\sin^2\theta} = \frac{kq^2}{L^2\sin^2\theta}\overbrace{\left(1+\frac{1}{4}\right)}^{5/4}$$

$$= \frac{5}{4}\,\frac{kq^2}{L^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{5}{4}\,\frac{kq^2}{L^2\sin^2\theta} = mg\,tg\,\theta \Longrightarrow q^2 = 4L^2\sin^2\theta\,\frac{mg}{5k}\,tg\,\theta$$

$$\boxed{q = 2\underbrace{L}_{0.3\,m}\,\underbrace{\sin\theta}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,\sqrt{\frac{\overbrace{mg}^{1N}}{5k}\,\underbrace{tg\,\theta}_{1}}}$$

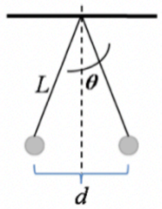
$$= 0.3\,\sqrt{\frac{2mg}{5k}}\,C = \frac{0.6}{\sqrt{k}}\,C$$

$$= \frac{0.6}{3}\times 10^{-9/2}\,C$$

$$= 0.2\times 10^{-9/2}\,C$$

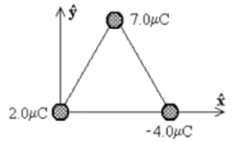
Ejercicio 3

Dos cargas puntuales idénticas en magnitud y signo, cuelgan de hilos de longitud L de manera que separadas una distancia d están en equilibrio. El ángulo que forman los hilos con la vertical puede suponerse en el límite de ángulos pequeños. Si neutralizo una de las cargas, ¿cuál será la nueva distancia de separación?

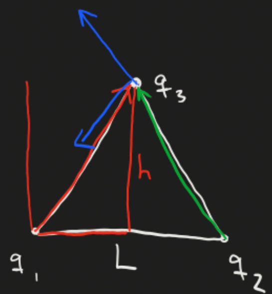


Ejercicio 4

Tres cargas puntuales están ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de 0.5 m de lado, como indica la figura. Calcule la fuerza eléctrica neta sobre la carga de 7.0 μC.



$1\,\mu C = 10^{-6}\,C$



$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2 = L^2$$

$$h^2 = L^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

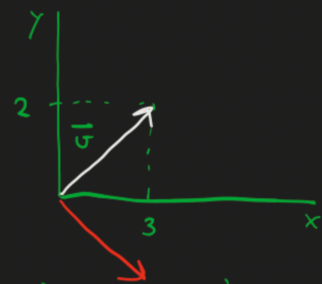
$$= \frac{3}{4}L^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = k\,\frac{q_1 q_3}{L^3}\left(\underbrace{\frac{L}{2}}_{= L\cos 60^\circ}\hat{x} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}L}_{= L\sin 60^\circ}\hat{y}\right)$$

$$= k\,\frac{q_1 q_3}{2L^2}\left(\hat{x} + \sqrt{3}\,\hat{y}\right)$$



$\vec{v} = (3, 2)$

$$\vec{F}_2 = k\,\frac{q_2 q_3}{L^3}\left(-\frac{L}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,L\,\hat{y}\right)$$

$$= 3\,\hat{x} + 2\,\hat{y}$$

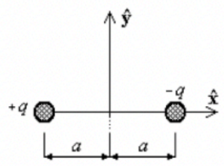
$$\hat{x} = (1,0) \qquad \hat{y} = (0,1)$$

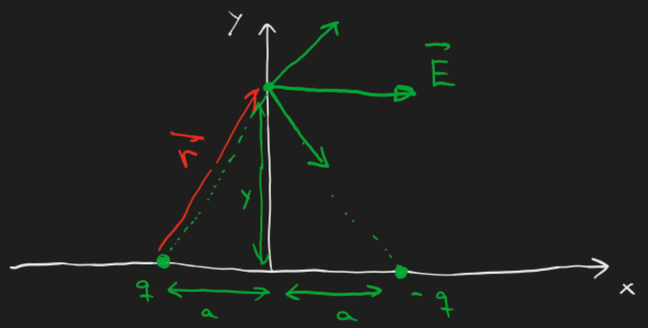
$$= k\,\frac{q_2 q_3}{2L^2}\left(-\hat{x} + \sqrt{3}\,\hat{y}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k\,\frac{q_3}{2L^2}\left[(q_1 - q_2)\,\hat{x} + \sqrt{3}\,(q_1 + q_2)\,\hat{y}\right]}$$

Ejercicio 6

Un dipolo eléctrico puede suponerse compuesto por una carga positiva q y otra negativa $-q$ separadas una distancia $2a$, como se aprecia en la figura. Determine el campo eléctrico $\mathbf{E}$ debido a estas cargas a lo largo del eje y en el punto $P = (0, y)$. Suponga que y es mucho mayor que a. Repita el cálculo para un punto sobre el eje x.





$$\vec{E} = E_x\,\hat{x}$$

Momento dipolar $\vec{p}$:

* $p = 2qa$

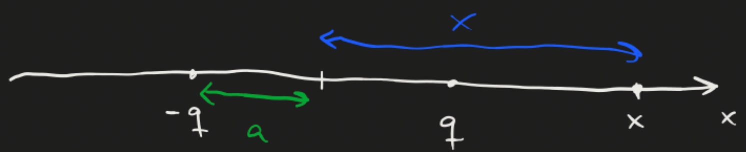
* Apunta de $-q$ a q

$$\Rightarrow \vec{p} = -2qa\,\hat{x}$$

$$E_x = 2k\,\frac{q}{\left(\sqrt{a^2 + y^2}\right)^3}\,a$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 2k\frac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}\, a\,\hat{x} \underset{y \gg a}{\simeq} 2k\frac{q}{y^3}\,a\,\hat{x} = \boxed{-\frac{k\vec{p}}{y^3} = \vec{E}}$$

$$a^2+y^2 \simeq y^2$$



$$\vec{E} = E_x\,\hat{x}$$

$$(1+x)^{\alpha} \underset{|x| \ll 1}{\simeq} 1+\alpha x$$

$$E_x = -k\frac{q}{(a+x)^2} + k\frac{q}{(x-a)^2} = kq\left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right]$$

$$= \frac{kq}{x^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^2}\right] \underset{x \gg a}{\simeq} \frac{kq}{x^2}\left[\cancel{1}+\frac{2a}{x} - \cancel{1} + \frac{2a}{x}\right]$$

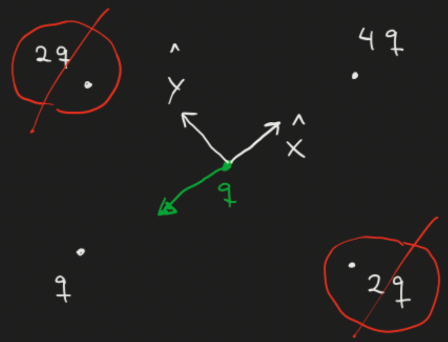
$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^2} \simeq 1+\frac{2a}{x} \qquad \frac{1}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^2} = \left(1+\frac{a}{x}\right)^{-2} \simeq 1-\frac{2a}{x}$$

$$= \frac{4kqa}{x^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{4kqa}{x^3}\hat{x} = \boxed{+\frac{2k\vec{p}}{x^3} = \vec{E}}$$

$$2\cdot 2 = 4, \qquad 2qa\,\hat{x} = \vec{p}$$

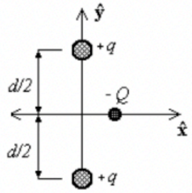
Ejercicio 7

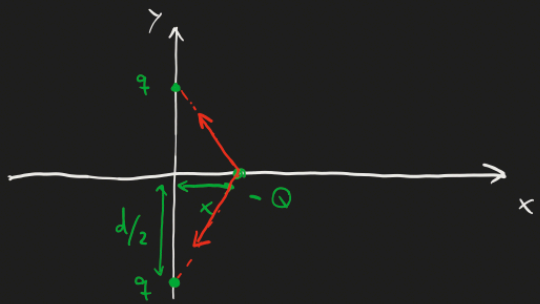
Halle la fuerza neta sobre una carga q ubicada en el centro de un cuadrado de lado L, cuando se han colocado cargas q, $2q$, $4q$ y $2q$ en los cuatro vértices (en ese orden). Saque provecho de la simetría de la configuración de cargas para simplificar el cálculo.



Ejercicio 8

Dos cargas puntuales idénticas $+q$ están fijas en el espacio y separadas por una distancia d. Una tercera carga $-Q$ puede moverse libremente y se encuentra inicialmente en reposo donde muestra la figura, con coordenadas $(x, 0)$, a igual distancia de ambas cargas $+q$. Muestre que si x es pequeña en relación con d, el movimiento de $-Q$ es armónico simple a lo largo de la recta que equidista de ambas cargas $+q$ y determine el período de ese movimiento.





$$\vec{F} = F_x \, \hat{x}$$

$$F_x = -2k \frac{qQ}{\left(\sqrt{x^2 + (d/2)^2}\right)^3} x \simeq -2k \frac{qQ}{(d/2)^3} x = -\frac{16 k q Q}{d^3} x$$

$$x^2 + (d/2)^2 \approx (d/2)^2$$

$$x << \frac{d}{2}$$

$$= -K x$$

$$\mathcal{K} = \frac{16\,k\,q\,Q}{d^3} \quad \Rightarrow \quad \text{Mov. armónico simple}$$

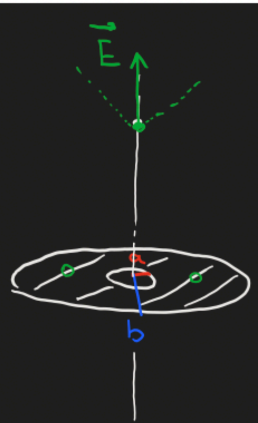
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mathcal{K}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\,d^3}{16\,k\,q\,Q}}}$$

Ejercicio 12

Una corona circular de radios a y b, tiene una densidad de carga uniforme σ.

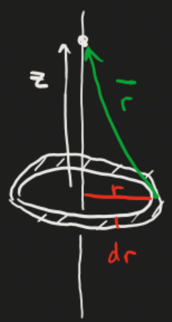
(a) Hallar el campo eléctrico en su eje.

(b) Deducir del resultado anterior el campo eléctrico en el eje de un disco de radio b y luego el campo eléctrico de un plano, ambos cargados uniformemente. En cada caso estudie la continuidad del campo y obtenga el valor del "salto" en la discontinuidad.



$\hat{z}\uparrow$

$$\vec{E} = E_z\,\hat{z}$$



$$dE_z = k\,\frac{\overbrace{\sigma\;2\pi r\,dr}^{\text{carga del anillo}}}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}\;z$$

$$-\frac{d}{dr}\,\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$E_z = \int dE_z = \int_a^b \frac{k\,\sigma\, 2\pi r z}{(z^2+r^2)^{3/2}}\, dr = 2\pi k \sigma z \int_a^b dr\, \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{d}{dr}\left(r^2+z^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{\cancel{2}}\left(r^2+z^2\right)^{-3/2}\cancel{2}r = -\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = -2\pi k \sigma z \int_a^b dr\, \frac{d}{dr}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = -2\pi k\sigma z \left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_a^b$$

$$= -2\pi k \sigma z \left[\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = 2\pi k \sigma z \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\hat{z}} \leftarrow \text{(a)}$$

(b)

$$\boxed{\vec{E} = 2\pi k \sigma z \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\hat{z}}$$

$$\boxed{\vec{E} = 2\pi \underbrace{k}_{=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} \sigma \frac{z}{|z|}\hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\hat{z} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z > 0 \\[2ex] -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z < 0 \end{cases}}$$

Discontinuidad : $\boxed{\vec{E}(z \to 0^+) - \vec{E}(z \to 0^-) = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}}$