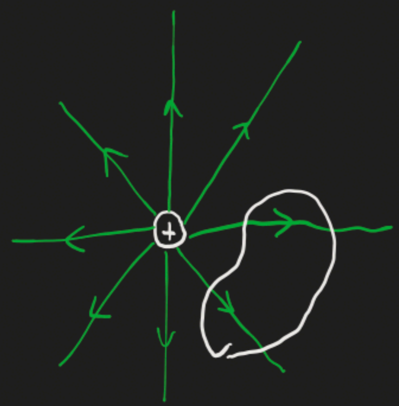
Líneas de campo

Líneas tangentes a $\vec{E}$



líneas

Densidad de líneas $= \dfrac{N}{A}$

$= \dfrac{N}{4\pi r^2}$

$= \dfrac{cte}{r^2} \propto E$

Flujo: $\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint E(r)\, \hat{r} \cdot \hat{r}\, dS = E \oint dS = EA \propto \#$ líneas

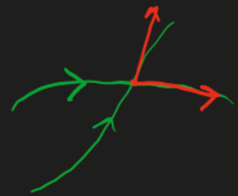
$\vec{dS} = \hat{n}\, dS$, $\hat{n} = \hat{r}$

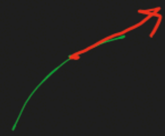
$\vec{E} = E(r)\, \hat{r}$

$\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

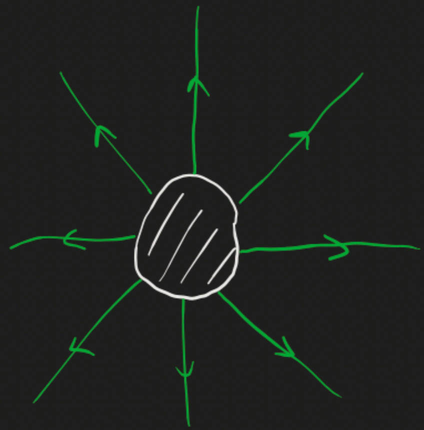
E = densidad líneas

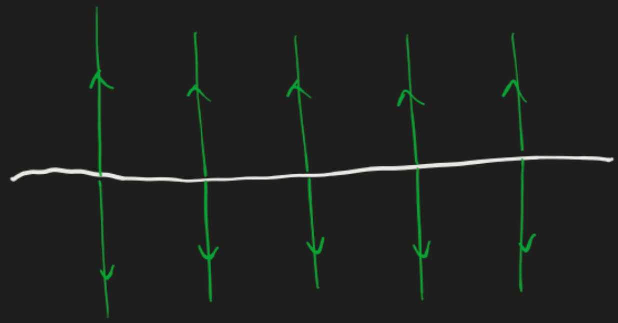
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Flujo} \propto \# \text{ líneas que atraviesan la sup.}}$





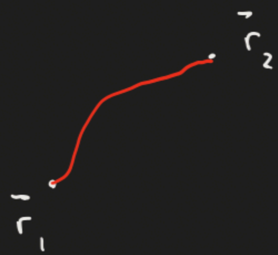
$$\bar{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}$$



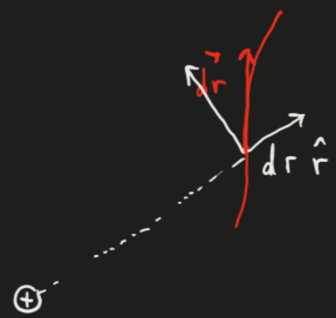


Potencial electrostático

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$



* Carga puntual $\qquad \vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$



$$\vec{E}\cdot d\vec{r} = k\frac{q}{r^2}\underbrace{\left(\hat{r}\cdot d\vec{r}\right)}_{=\ \hat{r}\cdot\left(dr\,\hat{r}\,+\,\perp\right)} = k\frac{q}{r^2}\,dr$$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{r_1}^{r_2} k\frac{q}{r^2}\,dr = -kq\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$= -kq \left.\overset{-1/r}{\overset{=}{\frac{r^{-2+1}}{-2+1}}}\right|_{r_1}^{r_2} = \frac{kq}{r_2} - \frac{kq}{r_1}$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \alpha \neq -1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V(\vec{r}) = \frac{kq}{r}} + \cancelto{0}{cte}$$

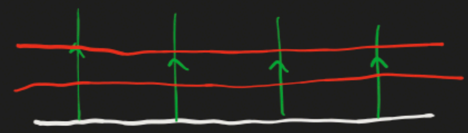
$*$ Plano $\quad \vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}$

$$\vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\cdot\left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,dz$$

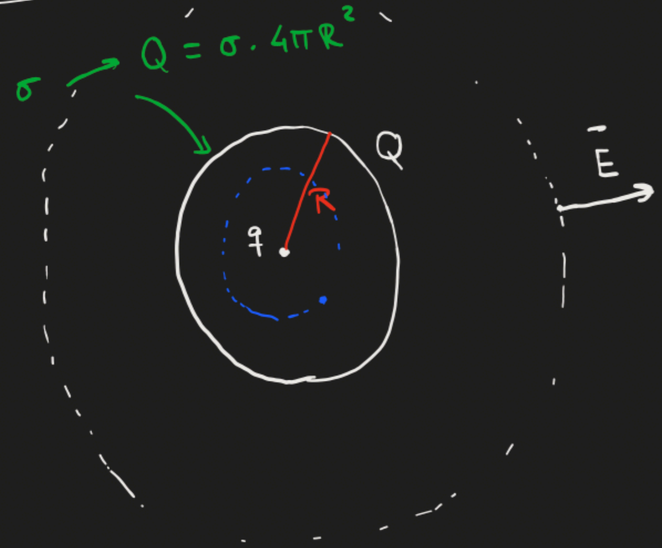
$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{z_1}^{z_2}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z_2 - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z_1\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{V(\bar{r}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z} + \cancel{cte}$$



Un ejemplo más de Gauss



$$\bar{E} = E(r)\,\hat{r}$$

$$\text{Gauss:} \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\oint \underbrace{\vec{E}}_{E(r)\,\hat{r}} \cdot \underbrace{\vec{dS}}_{\hat{n}\,dS,\ \hat{n} = \hat{r}} = \oint E(r)\, dS$$

$$= E(r) \underbrace{\oint dS}_{A = 4\pi r^2}$$

$$Q_{enc} = q + Q$$

$$= E(r)\, 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{q+Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

$r > R$

Simetría esférica

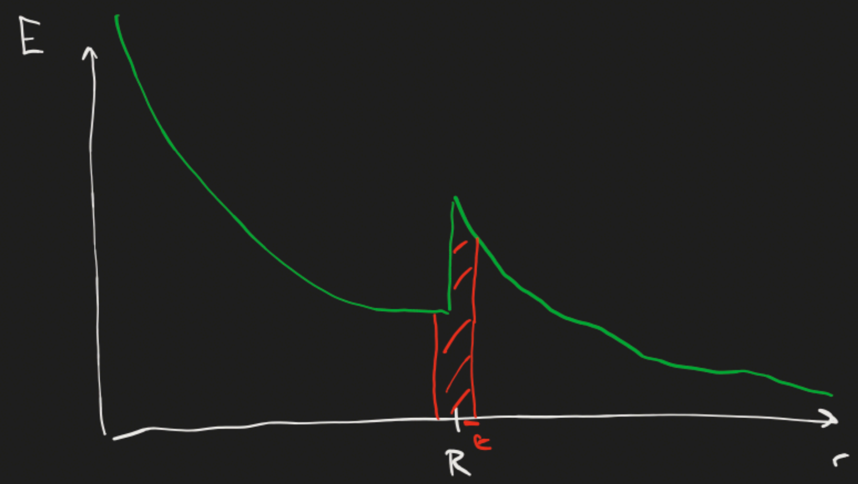
$\longrightarrow$ Campo en exterior es igual al de carga puntual

$\underline{r < R}$:

$$\boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

Simetría esférica

$\longrightarrow$ Campo en un punto insensible a lo que hay afuera.



Potencial

$$r > R \longrightarrow V(r) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r < R \longrightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

V continuo : $V(R+\epsilon) - V(R-\epsilon) = -\int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} E(r)\,dr \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$

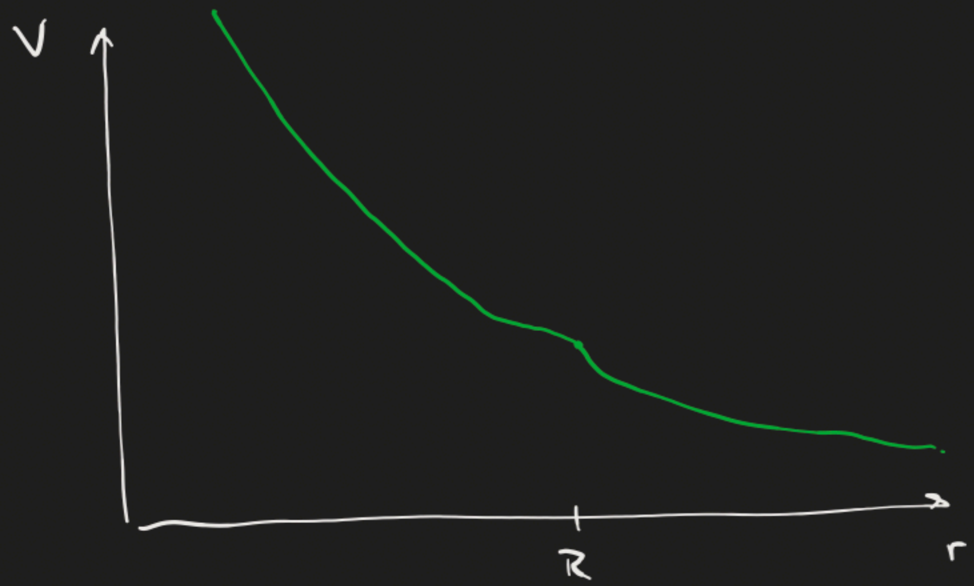
$$\Rightarrow \boxed{V \text{ es continuo}}$$

$$V(R^+) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad V(R^-) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + C$$

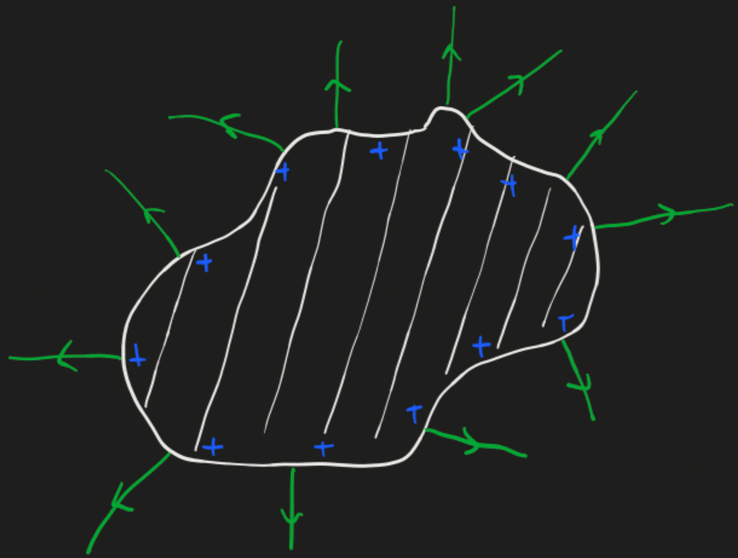
Continuo : $V(R^+) = V(R^-) \Rightarrow \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + C$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R \\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & r < R \end{cases}}$$



GUÍA 2: CONDUCTORES



Equilibrio $\Rightarrow$ $\vec{E} = 0$
dentro del conductor

Gauss $\Rightarrow$ $Q = 0$ adentro
del conductor

$\Rightarrow$ Si hay carga neta,
está en la superficie

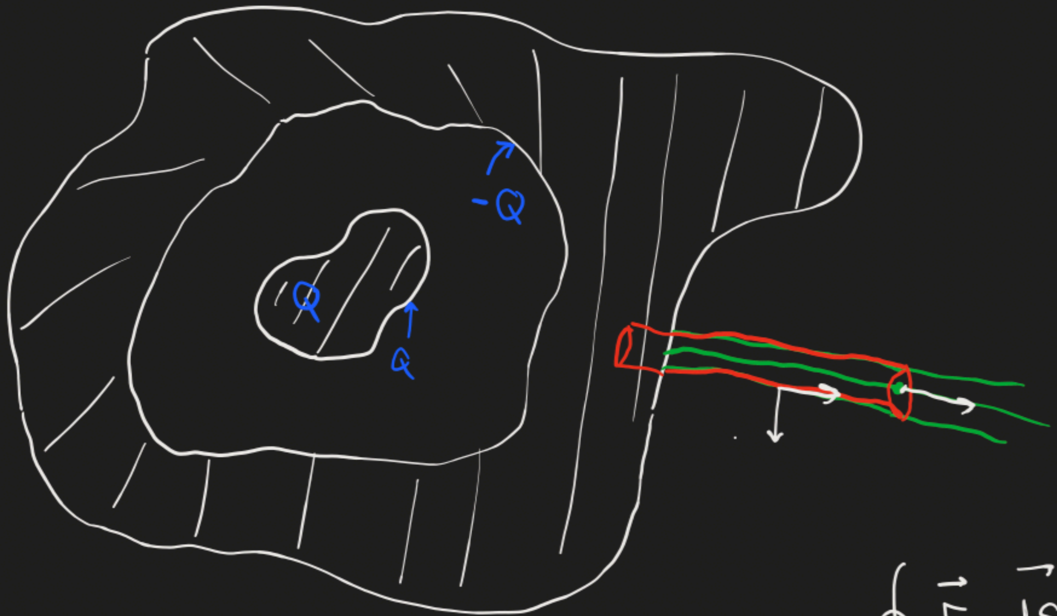
Otra cosa: $\bar{E} = 0$ $\Rightarrow$ V constante adentro
del conductor

En part., la superficie del
conductor es equipotencial

$\Rightarrow$ Líneas de campo afuera
inciden perpendicularmente sobre éste.

Ejercicio 1

Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q y al otro con carga Q'. ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas? ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan? Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.



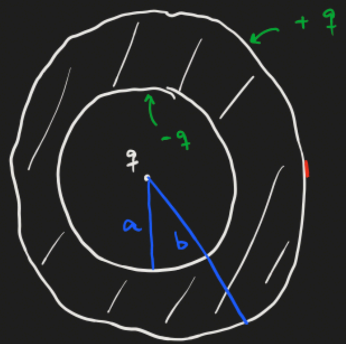
Gauss: $\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = 0$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_{\substack{\text{tapa}\\ \text{derecha}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow E = 0.$$

Ejercicio 2

Un conductor esférico, hueco y sin cargas tiene un radio interior a y otro exterior b. En el centro de la esfera se encuentra una carga puntual $+q$. ¿Cómo es la distribución de cargas? Calcule y grafique el campo eléctrico y el potencial en todos los puntos del espacio.



$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

$$\boxed{\underline{r > b} \longrightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

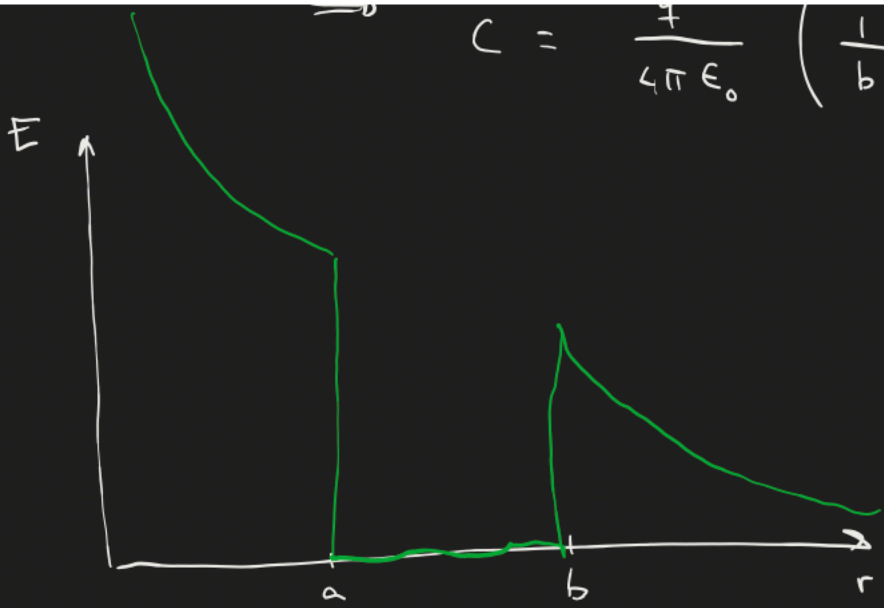
$$\boxed{\underline{a < r < b} \longrightarrow E(r) = 0, \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}}$$

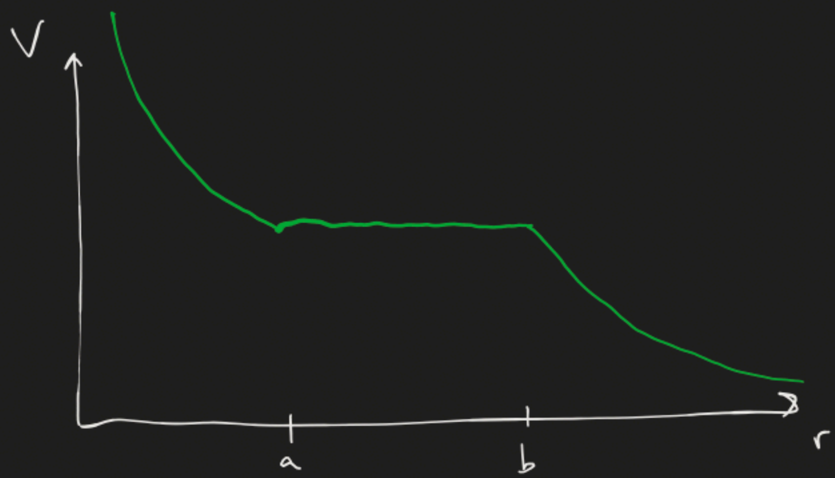
$$\boxed{\underline{r < a} \longrightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}, \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = V(r)}$$

$$V(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

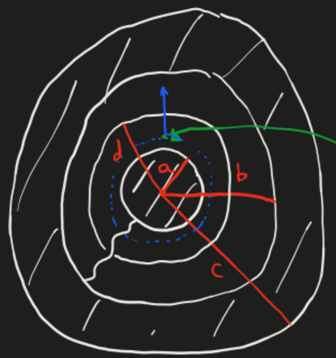
$$\Longrightarrow \quad C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

$$C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$





Ejercicio 5
Una esfera conductora de radio a está rodeada por un casquete esférico también conductor, de radio interior b y exterior c. Ambos conductores se encuentran unidos por un cable y su carga total es Q. En el espacio entre ambos se encuentra una superficie esférica de radio d ($a < d < b$), cargada con una densidad superficial de carga σ. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio (considere que el cable no rompe la simetría esférica del problema).



Carga total Q de los 2 conductores

Superficie $\longrightarrow \sigma \Rightarrow Q_s = 4\pi d^2 \sigma$

$$V(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$$

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = E(r)\, 4\pi r^2 \qquad \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Cable $\longrightarrow V(a) = V(b)$

$$V(a) - V(b) = \underbrace{V(a) - V(d)}_{\substack{\parallel \\ \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)}} + \underbrace{V(d) - V(b)}_{\substack{\parallel \\ \frac{Q_{int} + Q_s}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right)}}$$

$$= \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \cancel{\frac{1}{d}} + \cancel{\frac{1}{d}} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_s}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right)$$

$= 0$

$$\Longrightarrow \quad Q_{int} = Q_s \frac{\overset{\frac{b-d}{db}}{\overset{\parallel}{\frac{1}{d} - \frac{1}{b}}}}{\underset{\underset{\frac{b-a}{ab}}{\parallel}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}} = Q_s \frac{\frac{b-d}{d\cancel{b}}}{\frac{b-a}{a\cancel{b}}}$$

$$= \boxed{Q_s \frac{a(b-d)}{d(b-a)} = Q_{int}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{E} = E(r)\,\hat{r} \\ E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q + Q_s}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > c \\ 0 & b < r < c \\ \dfrac{Q_{int} + Q_s}{4\pi\epsilon_0 r^2} & d < r < b \\ \dfrac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & a < r < d \\ 0 & r < a \end{cases}\end{gathered}}$$