Guía 5, problema 10

Monday, 22 February 2021 11:14

Ejercicio 10

Una f.e.m. de $400\,\mathrm{V}$ se conecta en tiempo $t = 0$ a un circuito serie formado por una inductancia $L = 2\,\mathrm{H}$, una resistencia $R = 20\,\Omega$ y un capacitor $C = 8\,\mu\mathrm{F}$ inicialmente descargado.

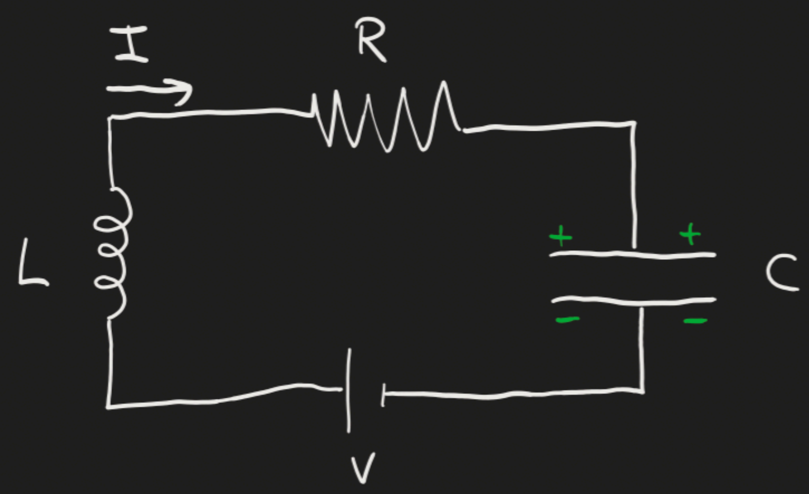
(a) Demostrar que el proceso de carga es oscilatorio y calcular la frecuencia de las oscilaciones. comparar esta frecuencia con el valor de $(LC)^{-1/2}$.

(b) Calcular la derivada temporal inicial de la corriente.

(c) Hallar, en forma aproximada, la máxima tensión sobre C.

(d) ¿Qué resistencia debe agregarse en serie para que el amortiguamiento del circuito sea crítico?

Circuito RLC



$$\boxed{V = \underset{\displaystyle L\dot{I}}{\underset{\parallel}{V_L}} + \underset{\displaystyle RI}{\underset{\parallel}{V_R}} + \underset{\displaystyle \frac{Q}{C}}{\underset{\parallel}{V_C}}}$$

$$I = +\dot{Q}$$

$\Rightarrow$ Derivando la 1ª,

$$0 = L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C}$$

$$\boxed{\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{I}{LC} = 0}$$

$$I(t) \propto e^{pt}$$

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{-R/L \pm \sqrt{(R/L)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \longrightarrow p$ real $\longrightarrow I(t)$ exponenciales reales

$\Rightarrow$ No hay oscilaciones

RÉGIMEN SOBREAMORTIGUADO

$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \longrightarrow p$ complejo $\longrightarrow I(t)$ exponenciales compleja

$\Rightarrow$ Hay oscilaciones

RÉGIMEN SUBAMORTIGUADO

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \text{AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO}$$

Régimen subamortiguado

$$I(t) \propto e^{pt}$$

$$p = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{<0}} = -\frac{R}{2L} \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{= i}\,\underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\equiv \omega}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm i\omega$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Solución general:

$$I(t) = C_1 \underbrace{e^{\left(-\frac{R}{2L} + i\omega\right)t}}_{= e^{-\frac{R}{2L}t} e^{i\omega t}} + C_2 \underbrace{e^{\left(-\frac{R}{2L} - i\omega\right)t}}_{= e^{-\frac{R}{2L}t} e^{-i\omega t}}$$

$$= e^{-\frac{R}{2L}t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$$

$I(t)$ real $\Longrightarrow$ $C_2 = C_1^*$

$$\Rightarrow \quad C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = (\operatorname{Re} C_1) \overbrace{\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right)}^{2\cos\omega t = }$$

$$+ i (\operatorname{Im} C_1) \underbrace{\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \right)}_{= 2i \sin \omega t}$$

$$= A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = e^{-\frac{R}{2L} t} \left(A \cos \omega t + B \sin \omega t \right)$$

Condiciones iniciales:

1) I continua en presencia de una bobina

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ A}}{I(0)} = 0 \quad \Bigg\} \Rightarrow A = 0.$$

2) A $t=0$, $Q = 0$

$$\Rightarrow V = L\dot{I}(0) + R\cancel{I(0)}^{\,0} + \cancel{\frac{Q(0)}{C}}^{\,0}$$

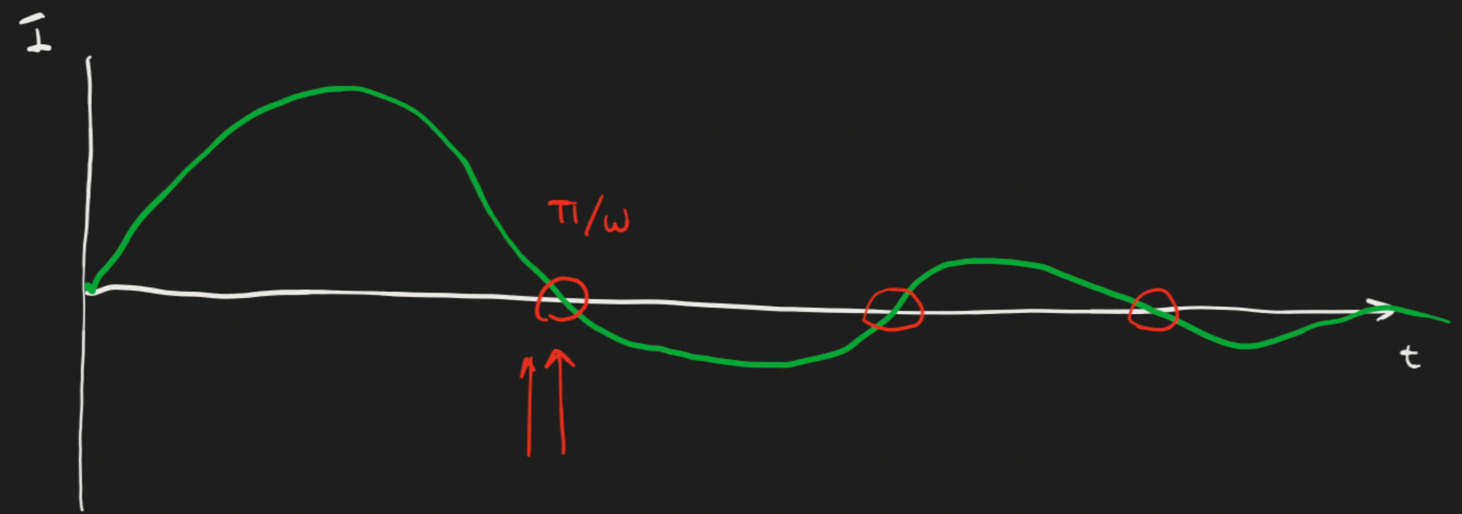
$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ B\omega}}{\dot{I}(0)} = \frac{V}{L}$$

$\leftarrow I(t) = B e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{V}{\omega L}$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{V}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t}$$

(c) Máxima tensión sobre C $\longleftrightarrow$ Máxima Q $\longleftrightarrow$ $I = 0$



Máximo ocurre en $t = \pi/\omega$

$$Q = \int_0^{\pi/\omega} dt\, I(t) = \frac{V}{\omega L} \int_0^{\pi/\omega} dt\, e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$$

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

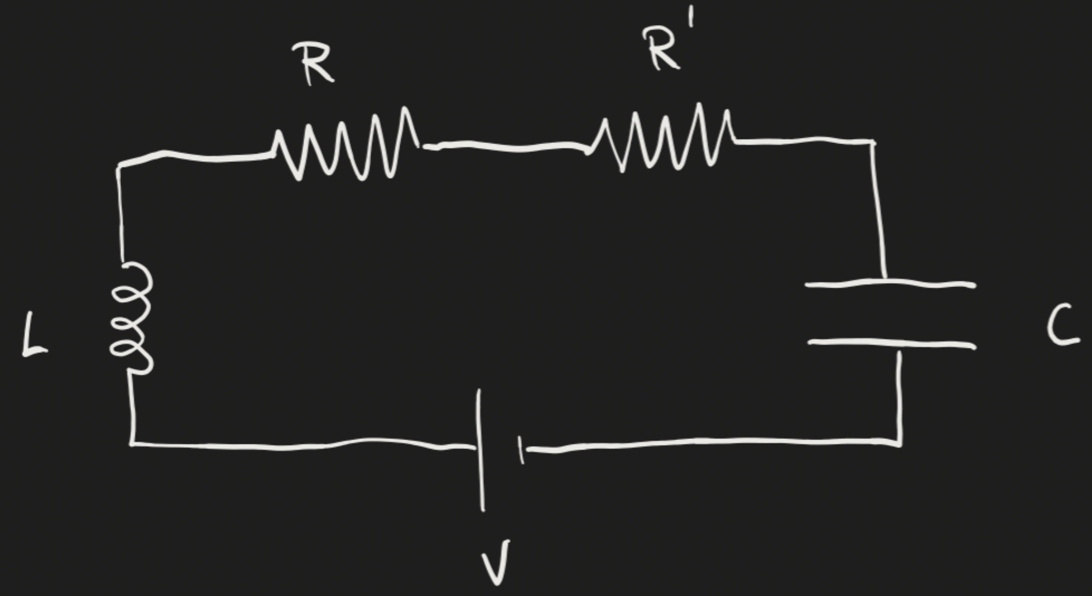
$$\Rightarrow \quad \frac{R}{2L} \ll \omega \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{2L}\frac{1}{\omega} \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad Q \simeq \frac{V}{\omega L} \int_0^{\pi/\omega} dt\, \sin \omega t = -\frac{V}{\omega L} \frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{\pi/\omega}$$

$$= -\frac{V}{\omega^2 L}\left(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} - 1\right) = \boxed{\frac{2V}{\omega^2 L} = Q_{max}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{max} = \frac{Q_{max}}{C} = \boxed{\frac{2V}{\omega^2 LC} = V_{max}}$$

(d) Qué resistencia hay que conectar en serie para que el amortiguamiento sea crítico?



Amortiguamiento crítico:

$$\left(\frac{R_{cr}}{2L} \right)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\longrightarrow \quad R^2_{cr} = \frac{4L}{C} \longrightarrow \quad R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R + R'$$

$$\boxed{R' = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - R}$$