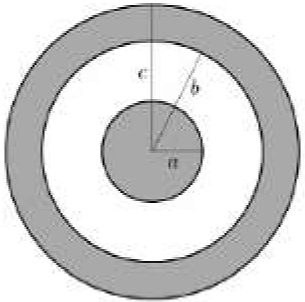
Problema 1

Un conductor esférico macizo, de radio a, se ubica en el centro de un conductor esférico hueco, de radio interior b y radio exterior c, tal como se muestra en la figura.



El conductor interior tiene carga total Q, y el exterior tiene carga total Q'. El sistema está en equilibrio.

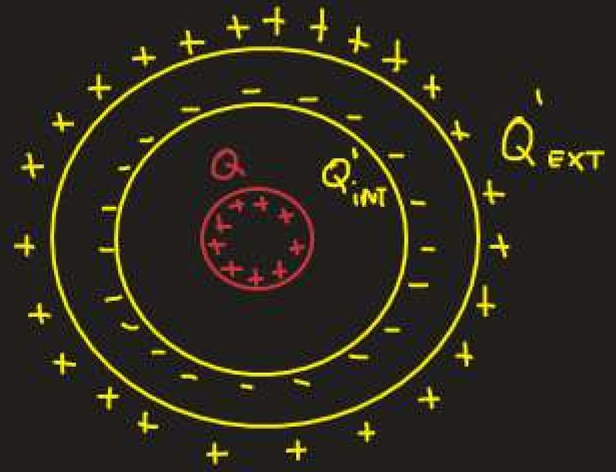
(a) ¿Cuánto vale la carga en la superficie interior del conductor hueco? ¿Y en la exterior?

(b) A partir de la ley de Gauss, calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

(c) ¿Cómo se redistribuyen las cargas si los dos conductores se conectan mediante un cable? Asuma que el cable no rompe la simetría esférica del problema.

(d) Volvamos a la distribución original de cargas, sin cable. ¿Cómo cambia el resultado del ítem (b) si el espacio entre los dos conductores está ocupado por un dieléctrico de permitividad ϵ?

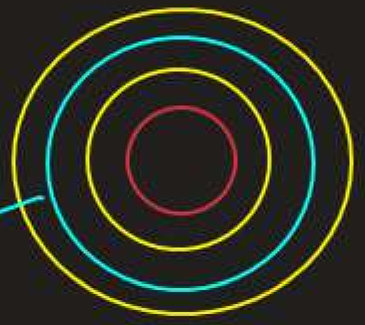
Conductor en equilibrio $\longrightarrow$ carga en la superficie y nula en el resto del cuerpo



En el dibujo asumí que $Q > 0$ y que $Q' > 0$ (solo para el dibujo)

a) $Q'_{INT} + Q'_{EXT} = Q'$ pero como el campo eléctrico dentro del conductor hueco debe ser nulo,

entonces $Q'_{INT} + Q = 0$ para que $\oint_{S'} \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_{ENC}}{\epsilon_0} = 0$



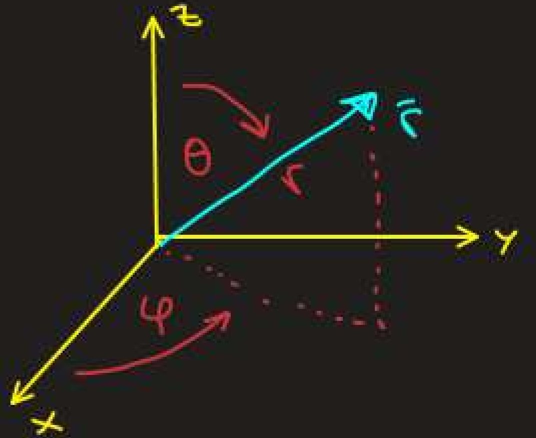
$\longrightarrow Q'_{INT} = -Q$ y por lo tanto,

$$Q'_{EXT} = Q' - Q'_{INT} = Q' - (-Q) = Q' + Q$$

Resumiendo, $Q'_{INT} = -Q$ y $Q'_{EXT} = Q' + Q$

b) Ley de Gauss $\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_{ENC}}{\epsilon_0}$

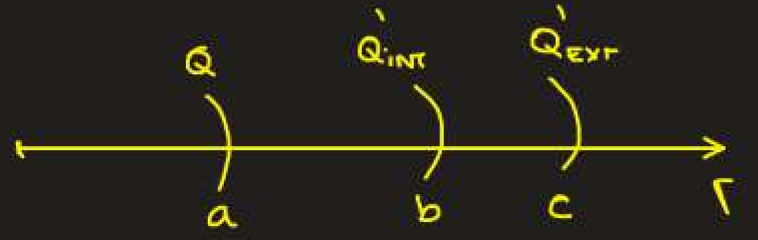
•) Por la simetría del problema $\bar{E}$ debería depender sólo de la distancia al origen ó centro de la esfera interior y debería apuntar en la dirección radial. Es decir, usando coordenadas esférica $\bar{E} = E(r)\,\hat{r}$



•) Las superficies de Gauss que voy a usar son esferas concéntricas de radio r

Hago un corte en el diagrama del problema. Dependiendo del valor de r voy a

Hago un corte en el diagrama del problema. Dependiendo del valor de r voy a encerrar más o menos carga eléctrica:



$$Q_{ENC} = \begin{cases} 0 & \text{si } r<a \\ Q & \text{si } a\leq r<b \\ Q+Q'_{INT} & \text{si } b\leq r<c \\ Q+Q'_{INT}+Q'_{EXT} & \text{si } c\leq r \end{cases}$$

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \oint_S E(r)\,\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{1}\,dS = \oint_S E(r)\,dS = E\oint dS = ES$$

E es cte sobre S

con $S = 4\pi r^2$

Entonces, y usando que $Q+Q'_{INT} = 0$ y que $\underbrace{Q+Q'_{INT}}_{0} + \underbrace{Q'_{EXT}}_{Q'+Q} = Q'+Q$ tenemos que

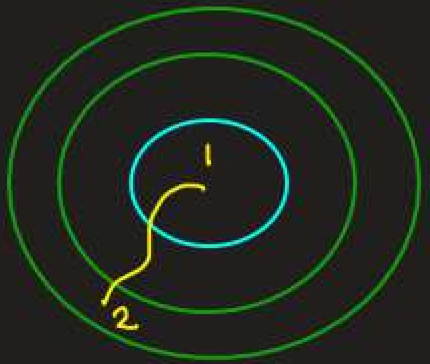
estoy dentro del conductor S'

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = E\,4\pi r^2 = \frac{Q_{ENC}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\begin{cases} 0 & \text{si} \quad r<a \\ Q & \text{si} \quad a\leq r<b \\ 0 & \text{si} \quad b\leq r<c \\ Q+Q' & \text{si} \quad c\geq r \end{cases} \longrightarrow \boxed{E = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r<a \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2\epsilon_0} & \text{si} \quad a\leq r<b \\ 0 & \text{si} \quad b\leq r<c \\ \dfrac{Q+Q'}{4\pi r^2\epsilon_0} & \text{si} \quad c\geq r \end{cases}}$$

c) Si se conecta un cable, entonces pasamos a tener un único conductor. Por lo tanto, solamente habrá carga neta en la superficie exterior del conductor hueco y valdrá $Q+Q'$.

Por lo tanto, $E = \begin{cases} 0 & \text{si } r < c \\ \dfrac{Q+Q'}{4\pi r^2 \epsilon_0} & \text{si } c \leq r \end{cases}$ en $\hat{r}$

Otra forma:



$V_1 - V_2 = 0$ por estar unidos por el cable (es un equipotencial) entonces Q en la esfera maciza es cero. Es decir, tanto en el volumen (conductor) como en su superficie. Lo mismo ocurre en la superficie interior de la esfera hueca como así también en su volumen. Por lo tanto, toda la carga $(Q+Q')$ está ubicada en la superficie exterior de la esfera hueca.

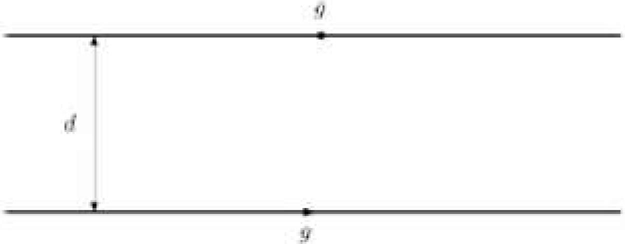
d) Al considerar un medio dieléctrico, el campo entre a y b se modifica de la siguiente manera $\bar{E}^{AHORA} = \dfrac{\bar{E}^{ANTES}}{\epsilon_{relativa}}$, $\epsilon_{relativa} = \epsilon/\epsilon_0$ y por lo tanto, $\bar{E}^{AHORA} = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon/\epsilon_0}\hat{r} \rightarrow \boxed{\bar{E}^{AHORA} = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \epsilon}\hat{r}}$

Los demás campos no se modifican.

Problema 2

(a) Considere un plano infinito por el que circula una densidad superficial de corriente $\boldsymbol{g}$ uniforme. A partir de la ley de Ampère, calcule el campo magnético en todo el espacio.

(b) Considere ahora dos de esos planos, paralelos entre sí, separados una distancia d, y con sentidos opuestos de la corriente, tal como se muestra en la figura.

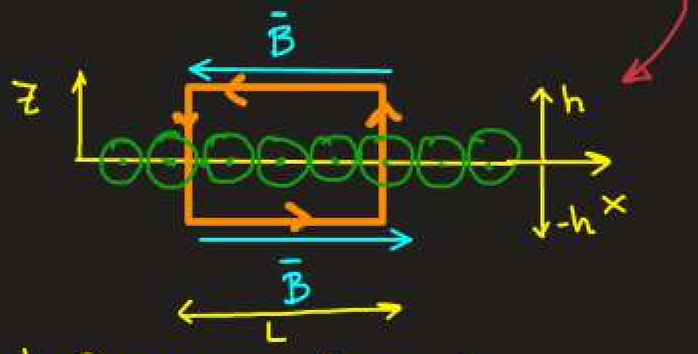


A partir del resultado del ítem anterior, calcule el campo magnético creado en todo el espacio por esta distribución de corriente.

(c) Entre los dos planos se colocan dos rieles sin resistencia, separados una distancia ℓ y unidos en uno de sus extremos, por los que se desplaza sin rozamiento una barra conductora de resistencia R, tal como se muestra en la figura.

a)

Lo miro desde acá



Ley de Ampere

$$\oint_{\ell} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{\text{CONCATENADA}}$$

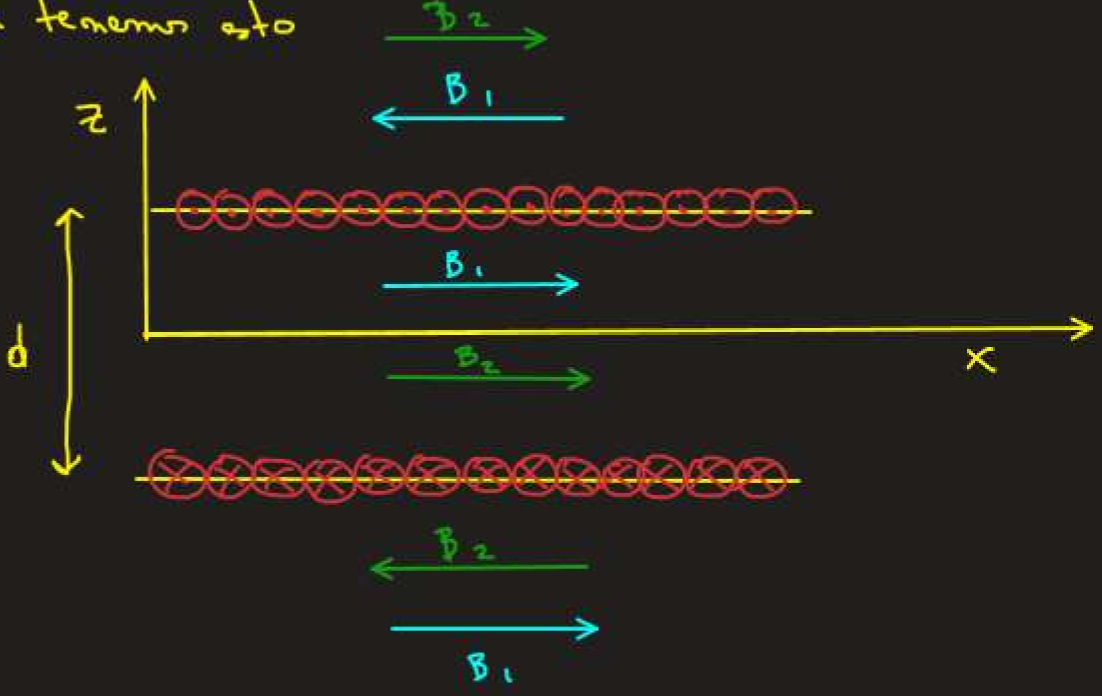
Por simetría y por tratarse de un plano infinito $\bar{B} = B(z) \begin{cases} -\hat{x} & \text{si } z>0 \\ \hat{x} & \text{si } z<0 \end{cases}$

Entonces, $\oint_l \bar{B}\cdot d\bar{l} = \int_l B(z) \underbrace{(-\hat{x})\cdot(-\hat{x})}_{1} dx + \int_l B(z) \underbrace{\hat{x}\cdot\hat{x}}_{1} dx + \underbrace{0+0}_{\substack{\text{los otros términos} \\ \text{son cero porque} \\ \bar{B}\perp d\bar{l}}} = \int 2B(z)\, dx = 2B(z)\int dx = 2B(z) L$

Además, $\mu_0 I = \mu_0 \int_l g\, dl \underset{\substack{\downarrow \\ g \text{ uniforme}}}{=} \mu_0 g \int_l dl = \mu_0 g L$

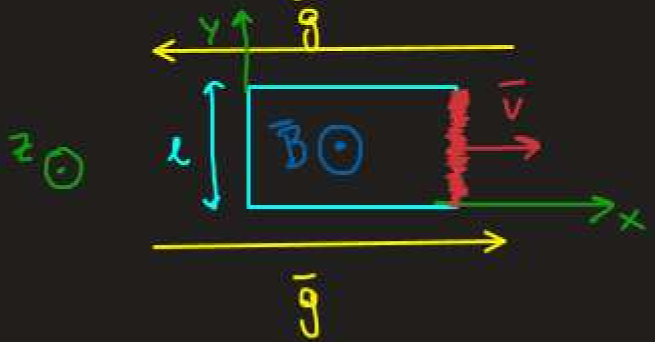
Por lo tanto, $2B(z) L = \mu_0 g L \longrightarrow B = \frac{\mu_0 g}{2} \longrightarrow \boxed{\bar{B} = \frac{\mu_0 g}{2} \begin{cases} -\hat{x} & \text{si } z>0 \\ \hat{x} & \text{si } z<0 \end{cases}}$

b) Ahora tenemos esto



$$\bar{B} = \begin{cases} \bar{0} & \text{si} \quad z > d/2 \\ \mu_0 g \hat{x} & \text{si} \quad -d/2 < z < \frac{d}{2} \\ \bar{0} & \text{si} \quad z < -d/2 \end{cases}$$

c)

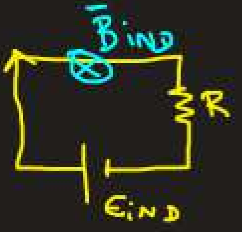


$\bar{F}_{BARRA} = I\,\bar{L} \times \bar{B}$

Sale de la ley de Lenz $\dfrac{d\Phi}{dt} = -\epsilon_{IND}$

Con $\Phi = \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$

$\bar{B}$ es cte en S, entonces $\Phi = BS$ con $S = \ell\, x_{(t)}$. $\dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{d}{dt}(B\ell x) = B\ell\dot{x} = B\ell V$



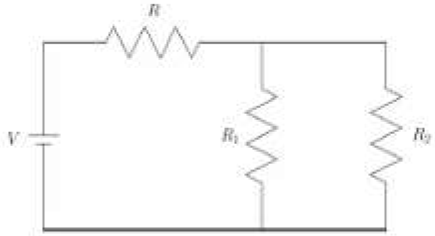
Por lo tanto, $\epsilon_{IND} = -B\ell V$.

Ley de Ohm para circuito: $\epsilon_{IND} = I R \rightarrow |I| = \left|\dfrac{\epsilon_{IND}}{R}\right| = \dfrac{B\ell V}{R}$

Finalmente, $\bar{F}_{BARRA} = |I|\,\bar{L} \times \bar{B} = \frac{B l v}{R}\, l\,(-\hat{y}) \times B\hat{z} = -\frac{B^2 l v l}{R}\, \underbrace{\hat{y} \times \hat{z}}_{\hat{x}} \rightarrow F_{BARRA} = \frac{\mu_0^2 g^2 l^2 v}{R}\,(-\hat{x})$

Problema 3

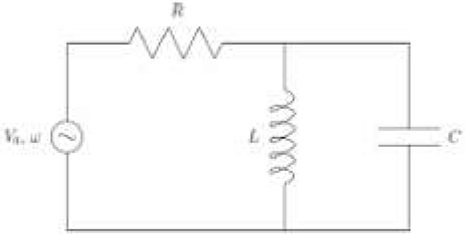
Considere el circuito de la figura.



(a) Calcule la resistencia equivalente del circuito.

(b) Calcule la corriente que pasa por cada resistencia.

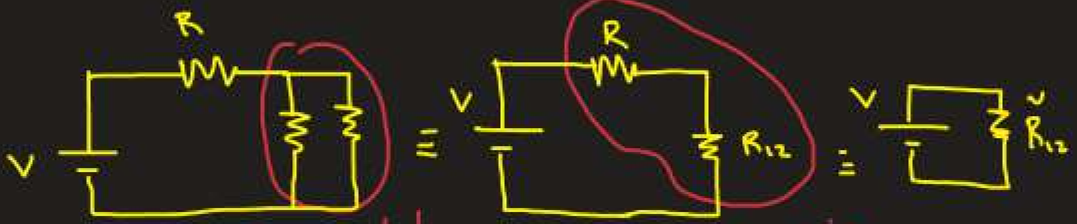
(c) Calcule la corriente que pasa por la resistencia R si reemplazamos las resistencias R_1 y R_2 por una inductancia y un capacitor, y la batería por una fuente de corriente alterna, tal como se muestra en la figura.



Ayuda: para agilizar las cuentas, exprese la corriente en términos de la combinación

$$X = \frac{L/C}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

a)



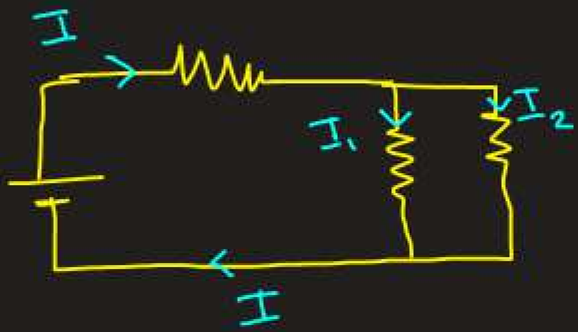
en paralelo R_{12}

en serie $\tilde{R}_{12}$

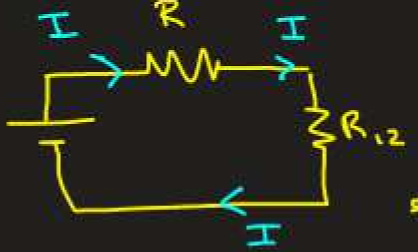
$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \longrightarrow \boxed{R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$\tilde{R}_{12} = R + R_{12} = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \tilde{R}_{12}$$

b) $V = I \tilde{R}_{12} \longrightarrow I = V / \tilde{R}_{12}$



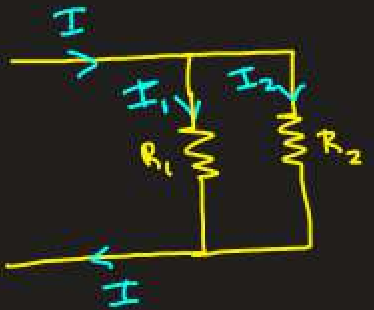
Com $I = I_1 + I_2$; Tenemos que



ya que R y R_{12} están en serie

Entonces $V_{R_{12}} = I R_{12}$ es decir, $V_{R_{12}} = \frac{V}{\tilde{R}_{12}} \cdot R_{12} = \frac{V\ R_{12}}{\left(R + \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}_{= R_{12}}\right)} = \frac{V R_{12}}{R + R_{12}}$

Además,

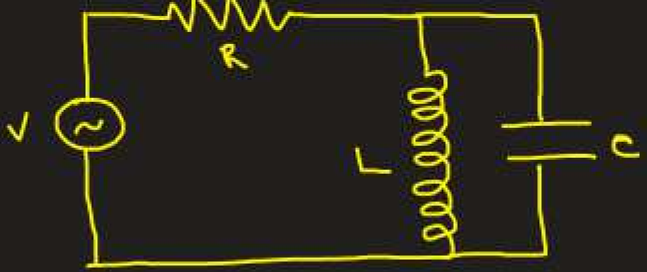


ambos están a la misma diferencia de potencial por estar en paralelo, entonces $V_{R_1} = V_{R_2} = V_{R_{12}} = \frac{V R_{12}}{R + R_{12}}$

Entonces, $\begin{cases} V_{R_1} = I_1 R_1 = \dfrac{V R_{12}}{R + R_{12}} \longrightarrow I_1 = \dfrac{V R_{12}}{R_1 (R + R_{12})} \\ V_{R_2} = I_2 R_2 = \dfrac{V R_{12}}{R + R_{12}} \longrightarrow I_2 = \dfrac{V R_{12}}{R_2 (R + R_{12})} \end{cases}$

Finalmente, $\boxed{I_R = \dfrac{V}{R + R_{12}}, \quad I_{R_1} = I_1 = \dfrac{V R_{12}}{R_1 (R + R_{12})}, \quad I_{R_2} = I_2 = \dfrac{V R_{12}}{R_2 (R + R_{12})}}$

c)



L y C están en paralelo, entonces $\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}$

$$= \frac{1}{jwL} + \frac{1}{\left(\frac{1}{jwC}\right)} = \frac{\frac{1}{jwC} + jwL}{jwL \cdot \frac{1}{jwC}} = \frac{\frac{1}{jwC} + jwL}{L/C}$$

entonces, $Z' = \frac{L/C}{\frac{1}{jwC} + jwL} = \frac{L/C}{j\left(\frac{-1}{wC} + wL\right)} = \frac{-j\, L/C}{\frac{-1}{wC} + wL} = \frac{j\, L/C}{\frac{1}{wC} - wL} = jX$

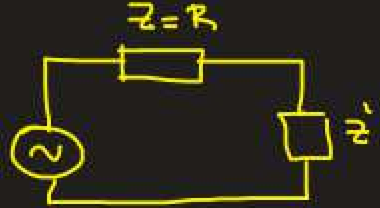
$\frac{1}{j} = -j$

multiplico arriba y abajo por -1

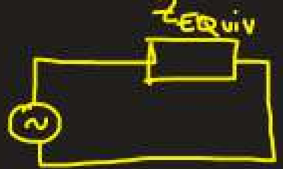
$X \in \mathbb{R}$

multiplico arriba y abajo por

Entonces,



$\equiv$



con $Z_{EQUIV} = Z + Z' = R + jX$

Por lo tanto, $|Z_{equiv}| = \sqrt{R^2 + X^2}$ entonces $|I_R| = \dfrac{|V|}{|Z_{equiv}|} = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

Finalmente, $\boxed{I_R(t) = |I_R| \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{con} \quad tg(\varphi) = \dfrac{X}{R}}$

Problema 4

Verdadero o falso: para cada una de las siguientes afirmaciones, diga si es verdadera o falsa y expliqu
por qué.

(a) La nota producida por una cuerda con un extremo fijo y el otro libre es más grave que cuando la misma cuerda tiene los dos extremos fijos.

(b) Cuando se toca una cuerda de guitarra, la longitud de onda del sonido producido en el aire es la misma que la de la onda que se propaga por la cuerda.

(c) El espaciado entre anillos de Newton consecutivos disminuye a medida que aumenta el radio de los anillos.

(d) En la figura de difracción causada por una rendija iluminada con luz blanca, el primer máximo secundario azul aparece más cerca del máximo central que el primer máximo secundario rojo.

a) La longitud de onda de una cuerda fija en uno de los extremos y suelta en el otro vale

$$\lambda = 4L, \frac{4L}{3} \dots \frac{4L}{(2m-1)} \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \dots$$

y con extremos fijos $\lambda = 2L, L, \dots \frac{2L}{m}$

con $m = 1, 2, 3, \dots$

Por lo tanto, sus frecuencias son iguales a $\nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow$ $\nu = \begin{cases} \frac{c(2n-1)}{4L} & \text{extremo fijo - libre} \\ \frac{cn}{2L} & \text{extremo fijo - fijo} \end{cases}$

Si tenemos el mismo n (ej. n=1) $\rightarrow \begin{cases} \nu_{FL} = \frac{c}{4L} \\ \nu_{FF} = \frac{c}{2L} \end{cases}$

Entonces $\nu_{FL} < \nu_{FF}$ → la nota es mas grave respecto a extremo fijo → V

b) Falso, la frecuencia es la misma pero cambia la longitud de onda porque la onda se mueve a una velocidad diferente $\left(v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)$

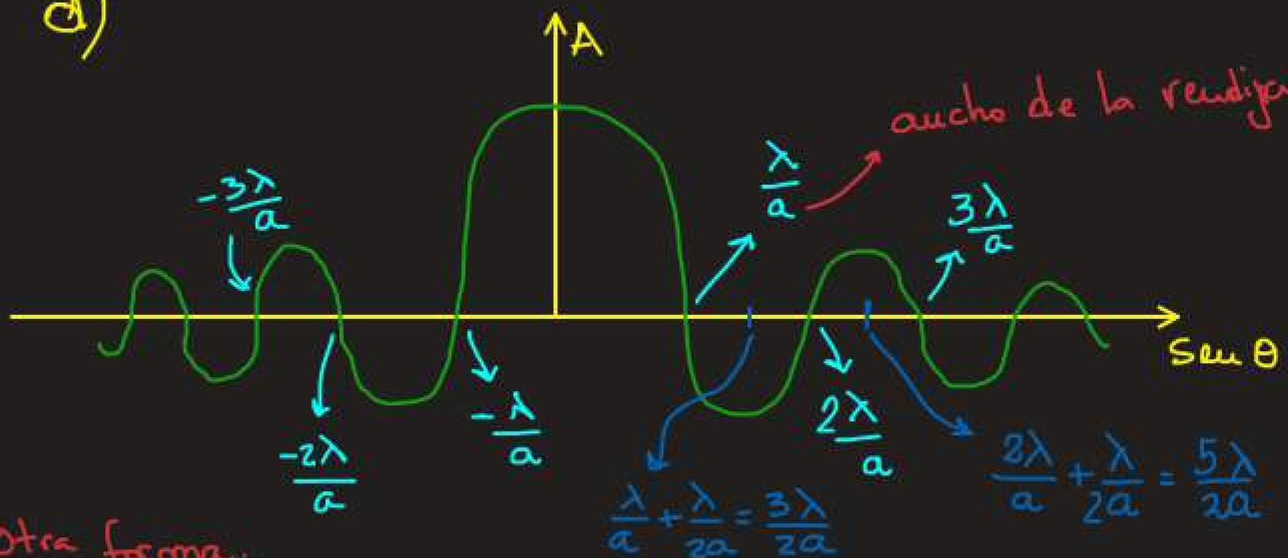
c)

c)

$$r_m = \sqrt{\frac{(2m+1)\lambda R}{2m}} \quad , \quad r_{m+1} - r_m = \sqrt{[2(m+1)+1]A} - \sqrt{(2m+1)A} = \sqrt{(2m+1)A + 2A} - \sqrt{(2m+1)A} = \Delta r$$

$\frac{\lambda R}{2m}$ = lo llamo A

Entonces, si $m \to \infty$ entonces $\Delta r \to 0$ Verdadero d)



$\nu > \nu$ entonces como $c = \nu\lambda$

implica que $\lambda < \lambda$

Entonces, el primer cero más cercano al máximo central ocurre para la luz de color azul. Y por lo tanto, su máximo $\rightarrow$ Verdadero

Otra forma:

$E = A(\theta)\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \alpha)$ con $A(\theta) = E_0 \dfrac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\alpha}$ con $\alpha = \dfrac{ka}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)$

α 2

$$\alpha = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi = \frac{ka}{2}\,\text{sen}(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a}{2}\,\text{sen}(\theta) = \frac{\pi a}{\lambda}\,\text{sen}(\theta) \rightarrow \text{sen}(\theta)_{MAX} = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{\pi a}\lambda = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}{a} \quad \text{con } m=1,2,\ldots$$

Entonces, con $m=1 \longrightarrow$ $\text{Sen}\,\theta_{MAX} = \dfrac{3\lambda}{2a}$