Resolución segundo parcial Física II (Q)

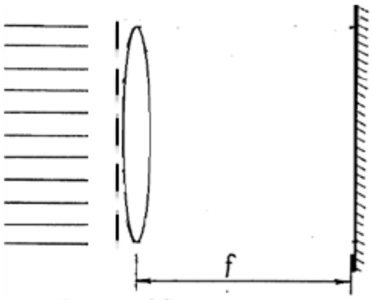


Figura 1

Problema1 : El patrón de difracción de Fraunhofer de una red iluminada normalmente con un haz de luz de λ=6550 Å aparece sobre el plano focal de una lente convergente de distancia focal f= 9 cm como indica la **Figura 1**. Se observa que entre franjas brillantes la separación es de 1 cm. a) Determinar la separación entre ranuras. b) ¿Qué ancho (en mm) debería tener el haz para resolver dos líneas de 6550 Å y 6550,5 Å en el segundo orden? c) Si el máximo de interferencia de orden 4 coincide con el mínimo de orden 1 de difracción, ¿cuánto mide el ancho de cada ranura?

$\lambda = 6550\,Å$

$f = 9\,cm$

$\Delta y = 1cm$

Estoy en la aproximación de campo lejano. Las franjas luminosas corresponden a los máximos de interferencia, que corresponden a los puntos tal que

$$kd\,\text{sen}\,\theta = m\pi$$

$$\Longrightarrow \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} d\,\text{sen}\,\theta = m\cancel{\pi}$$

$$\Longrightarrow \frac{2 d\, y_m}{\lambda f} = m \Longrightarrow \boxed{y_m^{MAX} = \frac{m\lambda f}{2d}}$$

$\theta <<$

$\text{sen}\,\theta \sim tg\,\theta \sim \frac{y}{f}$

Entonces, la separación entre franjas es $\underbrace{\Delta y}_{DATO!} = |y_{m=0} - y_{m=1}|$

$$= \frac{\lambda f}{2d}$$

$$\Longrightarrow d = \frac{\lambda f}{2 \cdot \Delta y} = \frac{6550\times 10^{-8}cm \cdot 9\cancel{cm}}{1\cancel{cm}}$$

$$= 58900\times 10^{-8}\underbrace{cm}_{10^{-2}m}$$

$$\boxed{d = 5,89\,\mu m}$$

b) Qué ancho (en mm) debería tener el haz para resolver dos líneas de 6550 A y 6550,5 A en el segundo orden?

Utilizamos el criterio de Raleigh:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \underbrace{2}_{\text{\# de orden}} \cdot \underbrace{N}_{\text{Ranuras iluminadas (las que cuentan)}}$$

$$\frac{6550\,\cancel{\mathring{A}}}{\cancel{0{,}5}\,\cancel{\mathring{A}}} = \cancel{2} \cdot N \Rightarrow N = 6550$$

Del punto anterior sabemos que la separacíon entre ranuras es d. Entonces, para iluminar 6550 rendijas el ancho del haz debe ser de

$$A = d \cdot N$$

$$= 5{,}89\,\mu m \cdot 6550$$

$$\boxed{A = 38{,}58\,mm}$$

c) Si el máximo de interferencia de orden 4 coincide con el mínimo de orden 1 de difracción, cuanto mide el ancho de cada ranura?

$$Y_4^{MAX} = 4\,\frac{\lambda f}{d}$$

Por otro lado, el mínimo de orden 1 por difracción es

$$\frac{k a}{2} \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\simeq \tan\theta = \frac{Y_1^{m}}{f}} = 1 \cdot \pi \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \theta \ll$$

$$\frac{\cancel{2}\cancel{\pi}}{\lambda} \cdot \frac{a}{\cancel{2}} \cdot \frac{Y_1^{min}}{f} = \cancel{\pi} \Rightarrow Y_1^{min} = \frac{\lambda f}{a}$$

Igualando las expresiones del cuarto máximo de interferencia con la del primer mínimo de difracción:

$$Y_4^{MAX} = Y_1^{min} \Rightarrow \frac{4\,\cancel{\lambda f}}{d} = \frac{\cancel{\lambda f}}{a} \Rightarrow a = \frac{d}{4}$$

$$\boxed{a = 1{,}4725\,\mu m}$$

Problema 2:

Un haz de rayos paralelos de luz amarilla λ= 6000 Å incide normalmente sobre la superficie plana de una lente plano-convexa, cuya superficie convexa está en contacto con otra lente plano-convexa del lado convexo como se observa en la **Figura 2**. El radio de curvatura de las lentes es de 50 cm y el índice de refracción n=1,5.
a) Marque los rayos que interfieren.
b) Determine el radio del cuadragésimo (40) anillo oscuro observado por transmisión,¿ el anillo central es claro u oscuro?
c) Conteste a) y b) para el caso en el que el arreglo inicial se sumerja en agua n_{agua}=1,33.

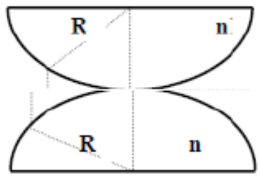
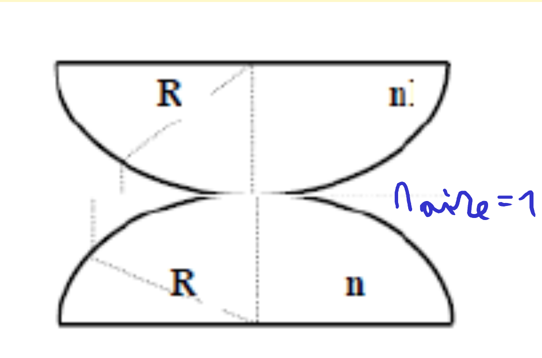


Figura 2

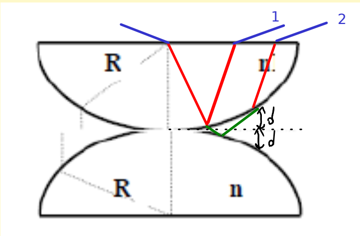


$\lambda = 6000$ Å

$R = 50$ cm

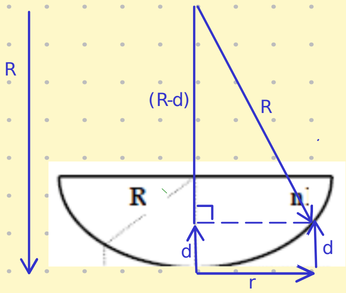
$n = 1,5$

a)



$\Delta x \cong 2 \cdot (2d) \cdot n_{aire}$

$\simeq 4d\, n_{aire}$



Pitágoras

$R^2 = r^2 + (R-d)^2$

$\cancel{R^2} = r^2 + \cancel{R^2} + d^2 - 2Rd$

$r^2 = 2Rd - d^2$

$r^2 = Rd\left(2 - \cancel{\frac{d}{R}}\right)$ $\ll 1$

$r^2 \cong 2Rd \Rightarrow \boxed{d \cong \frac{r^2}{2R}}$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x + \pi$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 4d \cdot \overbrace{n_{aire}}^{=1} + \pi \implies \boxed{\Delta\phi = \frac{4r^2}{\lambda R} + \pi}$$

$$d \simeq \frac{r^2}{2R}$$

b)

Int const: $\Delta\phi = 2m\pi \Rightarrow \frac{4r_m^2}{\lambda R} = (2m+1)$

$$\Rightarrow r_m = \sqrt{\frac{\lambda R(2m+1)}{4}}$$

$$m = 40 \rightarrow r_{40} = \sqrt{\frac{\lambda R(2 \cdot 40+1)}{4}}$$

$$m = 0 \rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{\lambda R}{4}}$$

$\neq 0 \rightarrow$ centro oscuro

c) Si $n_{agua} = 1{,}33$, $n_{agua} < n$, mismo

trozos de rayos q' en a) .

$$\cdot\ r_m = \sqrt{\frac{\lambda R(2m+1)}{4 \cdot n_{agua}}} \Rightarrow r_{40} = \sqrt{\frac{\lambda R \cdot 81}{4 \cdot 1{,}33}}$$

$r_0 = \sqrt{\frac{\lambda R}{4 \cdot 1{,}33}} \neq 0$ centro oscuro

Problema 3:

Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación:
y = 10 sin (π/3 x)(cos 20 π t) donde x e y vienen expresados en centímetros y t en segundos.
a) Calcula la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de las ondas componentes, cuya superposición puede dar lugar a la onda dada.
b)¿Qué distancia hay entre dos nodos adyacentes?
c)¿Cuál es la velocidad de oscilación de un punto de la cuerda en la posición x = 4,5 cm y en el tiempo t = 0,4 s?
d)¿Se trata de una onda viajera? Justifique su respuesta.

y(t,x) = 10 * sin(pi/3 * x) * cos(20 pi * t)

$$[x] = [y] = cm$$
$$[t] = seg$$

Formula para una onda estacionaria:

$$y(x,t) = 2A \cdot sen(k \cdot x) \cos(w \cdot t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 10 cm \Rightarrow A = 5 cm \\ k = \frac{\pi}{3} \frac{1}{cm} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}/3 \, (1/cm)} = \frac{2}{3} cm \\ c = \frac{w}{k} = \frac{20\pi}{\pi/3} \frac{cm}{seg} = 60 \frac{cm}{seg} \end{cases} \\ w = 20\pi \frac{rad}{seg} \end{cases}$$

b) Distancia entre nodos

Posición de los nodos?

$$Y(\tilde{x}, t) \doteq 0$$

$$\underbrace{A}_{\neq 0} \, sen(k\tilde{x}) \underbrace{\cos(wt)}_{\neq 0 \ \forall t} \doteq 0 \Rightarrow sen(k\tilde{x}) = 0$$

$$k\tilde{x} = m\pi$$

$$\tilde{x} = \frac{m\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}/3 \ (1/cm)} = (3\,m)\,cm \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\Delta x = x_{m+1} - x_m = 3\,cm}$$

c) Velocidad de oscilacion

$$\dot{Y} = A\, sen(k \cdot x)\left[-sen(wt)\right] \cdot w$$

$$\dot{Y}(4{,}5\,cm;\ 0{,}4\,s) = 10\,cm \cdot 20\pi\, s\; sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot 4{,}5\right) \cdot \underbrace{sen(20\pi \cdot 0{,}4)}_{sen(8\pi) = 0} = 0\ cm$$

d) No, es una onda estacionaria que puede pensarse como una suma de ondas viajeras con igual frecuencia y velocidad que viajan en direcciones opuestas.