Ondas estacionarias en una cuerda

2do Cuatrimestre 2017

Objetivo

Esta práctica tiene el propósito de estudiar ondas estacionarias en cuerdas con sus dos extremos fijos. Se propone medir los modos normales de vibración, determinando experimentalmente sus frecuencias características. En función de estos resultados, se busca determinar la velocidad de las ondas en términos de la tensión y la densidad de masa de la cuerda.

Introducción

Una *onda mecánica* es una perturbación que viaja por un material o una sustancia (esto es el medio de la onda) que produce que las partículas del medio sufran desplazamientos. Cuando estos desplazamientos son perpendiculares o transversales a la dirección de propagación de la onda, decimos que se trata de una *onda transversal*. En cambio, si los movimientos de las partículas del medio son hacia adelante y hacia atrás en la misma línea en que viaja la onda, decimos que se trata de una *onda longitudinal*.

Consideremos una cuerda de longitud L sujeta rígidamente en ambos extremos. Cuando se la perturba, en ella se produce una onda que se refleja una y otra vez en los extremos de la cuerda formando una onda estacionaria. La onda estacionaria $y(x,t)$ es el resultado de la superposición de dos movimientos ondulatorios armónicos de igual amplitud y frecuencia que se propagan en sentidos opuestos a través de un medio

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\sin(\omega t) \tag{1}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, λ es la longitud de onda y $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular (siendo T es período de la onda). El primer término de la ec. 1 $2A\sin(kx)$ corresponde a la amplitud (que depende de la posición x) y el término $\sin(\omega t)$ representa la dependencia temporal.

Para este caso, la onda estacionaria que resulta debe tener un nodo en ambos extremos de la cuerda. Entonces, para cualquier instante de tiempo se debe cumplir $2A\sin(0) = 0$ y $2A\sin(kL) = 0$

$$2A\sin(0) = 0 \qquad y \qquad 2A\sin(kL) = 0 \tag{2}$$

De esta condición se deduce ($kL = n\pi$)

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{3}$$

Dos nodos adyacentes están separados media longitud de onda ($\lambda/2$), así que la longitud de la cuerda debe ser un número entero de medias longitudes de onda. De la ec. 3 se tienen los posibles valores de λ:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{4}$$

Observación: pueden existir ondas en la cuerda si la longitud de onda no cumple la ec. 4; sin embargo, no puede haber un patrón de onda estable con nodos y la onda resultante no puede ser estacionaria.

Para cada longitud de onda estacionaria λ_n se tiene una frecuencia de onda estacionaria f_n (sabiendo que $v = \lambda f$ donde v es la velocidad de propagación de la onda en el medio)

$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{5}$$

Estas frecuencias se llaman armónicos, y el primer armónico f_1 (con $n = 1$) es la *frecuencia fundamental* (que corresponde a la longitud de onda más grande $\lambda_1 = 2L$).

En una cuerda de densidad lineal μ sometida a la tensión T , la velocidad de propagación v de una onda viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \tag{6}$$

Reemplazando la ec. 6 en la ec. 5 se tiene que las frecuencias para las que se observarán ondas estacionarias en una cuerda están dadas por

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}. \tag{7}$$

Actividades

La figura 1 muestra un esquema del dispositivo experimental. Una cuerda está sujeta

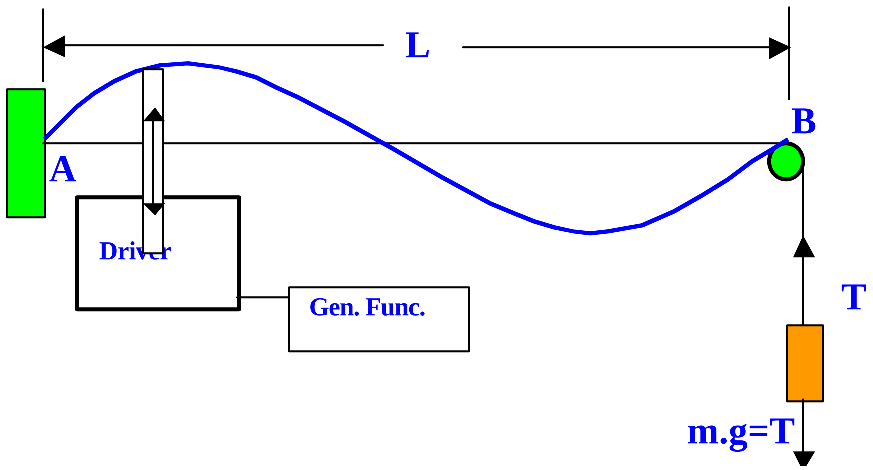

Figura 1: Esquema del dispositivo experimental propuesto.

en sus dos extremos A y B separados una distancia L. La tensión T de la cuerda está determinada por el peso colgado en uno de sus extremos. Un *driver* mecánico (conectado a un generador de funciones) imprime a la cuerda un movimiento oscilatorio armónico a una frecuencia y amplitud controladas. ¿Cómo haría para conocer μ en sus condiciones de trabajo?

Parte I

Para un valor de T y μ fijos, determine las frecuencias f para los primeros 8 modos normales de excitación de la cuerda. Para cada uno de dichos modos, determine también la longitud de onda λ correspondiente y, a partir de estos parámetros, calcule la velocidad v de la onda para cada modo. Grafique la velocidad de la onda en función del orden de cada modo. ¿Qué concluye a partir de sus resultados experimentales?

Parte II

Para una cuerda dada, varíe la masa m colgada en uno de los extremos de la cuerda. Para cada valor de m empleado, determine la velocidad de la onda en la cuerda. Tome al menos 8 valores de m. En cada caso, determine el valor de T y μ. Grafique v en función de $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ¿Qué conclusión puede obtener en este caso?

Parte III

Cuando varía la masa m, se varía la tensión T de la cuerda y su densidad de masa μ. Para cada masa se producirá un alargamiento de la cuerda $L - L_0$, donde L_0 es su longitud natural. Suponiendo que la cuerda obedece la ley de Hooke se tiene

$$T = k(L - L_0) \tag{8}$$

donde k es la constante de estiramiento de la cuerda. Sabiendo que $T = mg$ y $\mu = \frac{m_c}{L}$ siendo m_c la masa de la cuerda se tiene que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mgL}{m_c}} \tag{9}$$

Entonces, usando la ec. 8, la velocidad de la onda se puede escribir como

$$v = \sqrt{\frac{mg(L_0 + \frac{mg}{k})}{mc}} \tag{10}$$

¿Cómo puede determinar el valor de k experimentalmente? Discuta su idea con el docente y lleve adelante la medición de k. Luego compare en un gráfico la relación encontrada experimentalmente entre v y m; y en el mismo gráfico indique la curva que esperaría teóricamente para esta relación usando la ec. 10. Describa sus conclusiones en este caso.