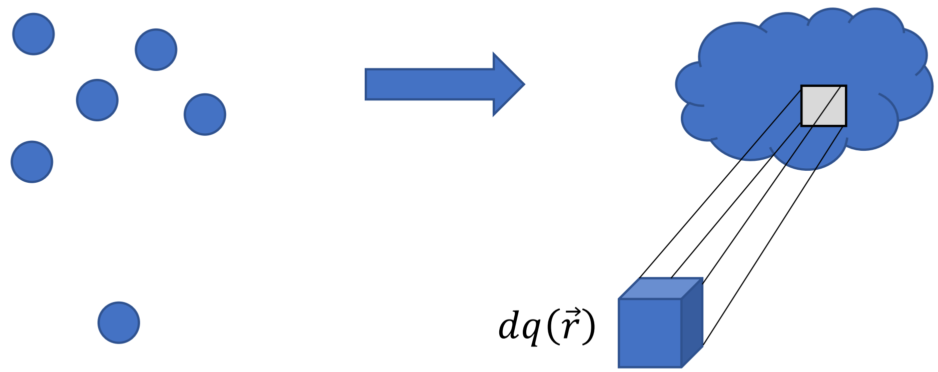
Distribución contínua de cargas



Carga puntual en punto $\vec{r}$

Diferencial de carga en el punto $\vec{r}$

Q

$$dq(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\, dx\, dy\, dz$$

Densidad de carga en $\vec{r}$

Diferencial de volumen en el punto $\vec{r}$

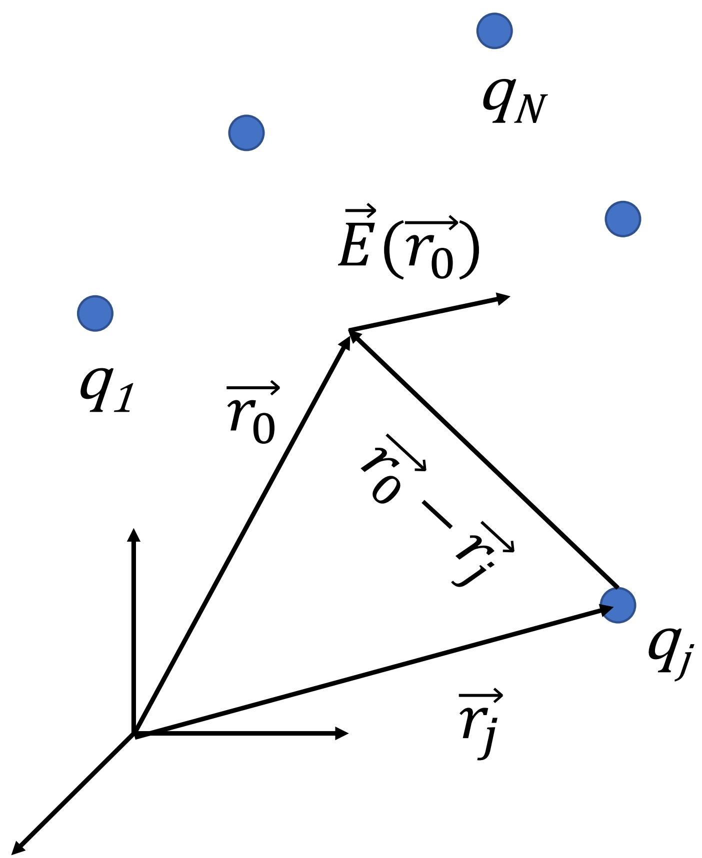
Campo eléctrico de una distribución

- Vimos que para N cargas puntuales en posiciones $\overrightarrow{r_j}$, el campo $\vec{E}$ en el punto $\overrightarrow{r_0}$

$$\vec{E}(\overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j \hat{r}_{0j}}{r_{0j}^2}$$

- Donde $\hat{r}_{0j}$ es un vector unitario que apunta desde $\overrightarrow{r_j}$ hasta $\overrightarrow{r_0}$. Equivalentemente:

$$\vec{E}(\overrightarrow{r_0}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j\left(\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_j}\right)}{\left|\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_j}\right|^3}$$

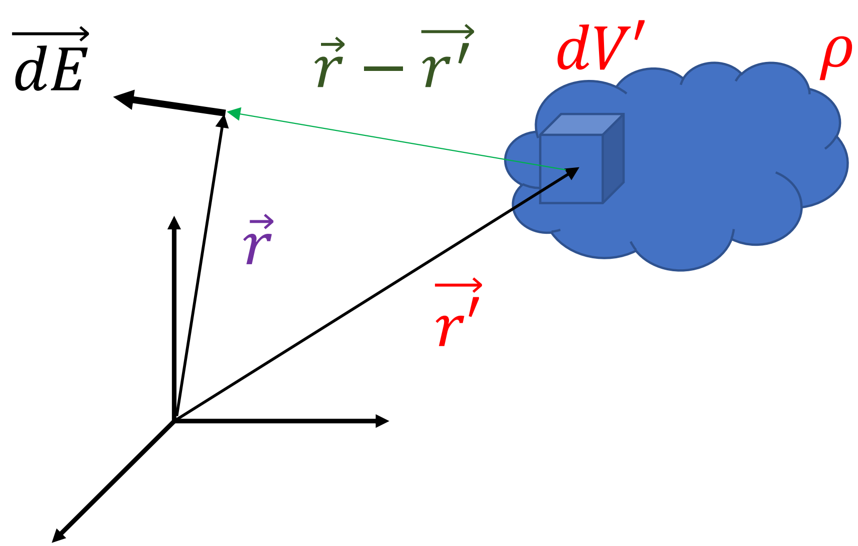


Campo eléctrico de una distribución

- Equivalentemente, pensemos en un diferencial de carga $\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dV'$ en el punto $\overrightarrow{r'}$ como parte de una distribución volumétrica ρ.

- La contribución de $\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dV'$ al campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto $\vec{r}$ es:

$$\overrightarrow{dE}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dV'\,\left(\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right)}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|^3}$$



Campo eléctrico de una distribución

- El campo total $\vec{E}$ en el punto $\vec{r}$ se obtiene integrando sobre todo el volumen de la distribución de carga.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right) (\vec{r} - \overrightarrow{r'})}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3} \, dV'$$

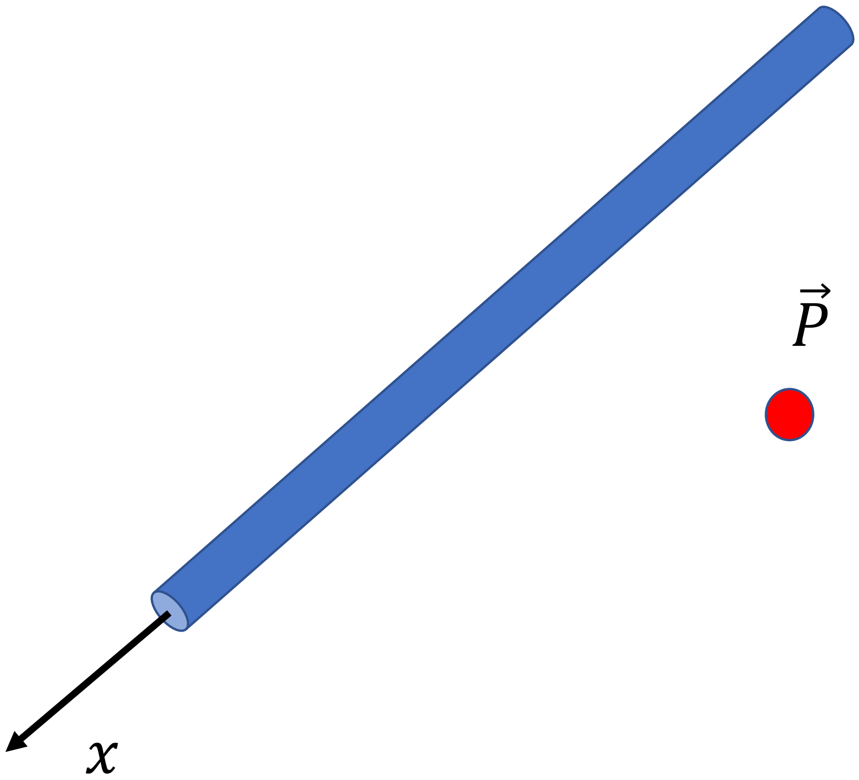
- En cartesianas $\overrightarrow{r'} = (x', y', z')$ y $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,(x - x')}{\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)^3} \, dx'dy'dz'$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,(y - y')}{\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)^3} \, dx'dy'dz'$$

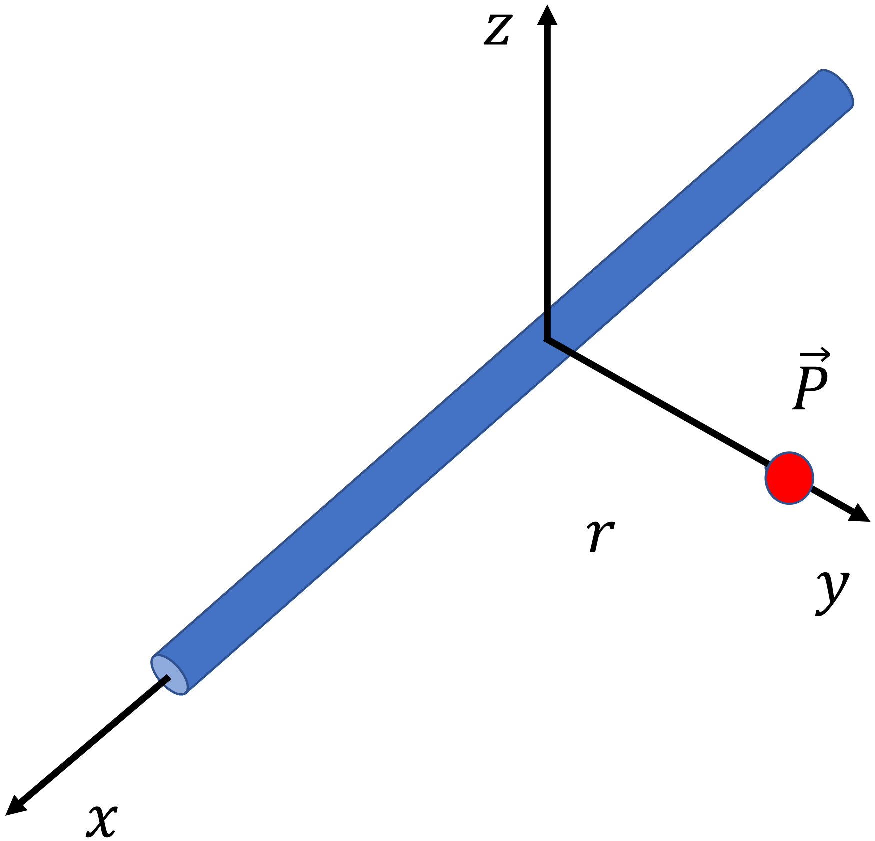
$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,(z - z')}{\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)^3} \, dx'dy'dz'$$

Distribución lineal uniforme infinita



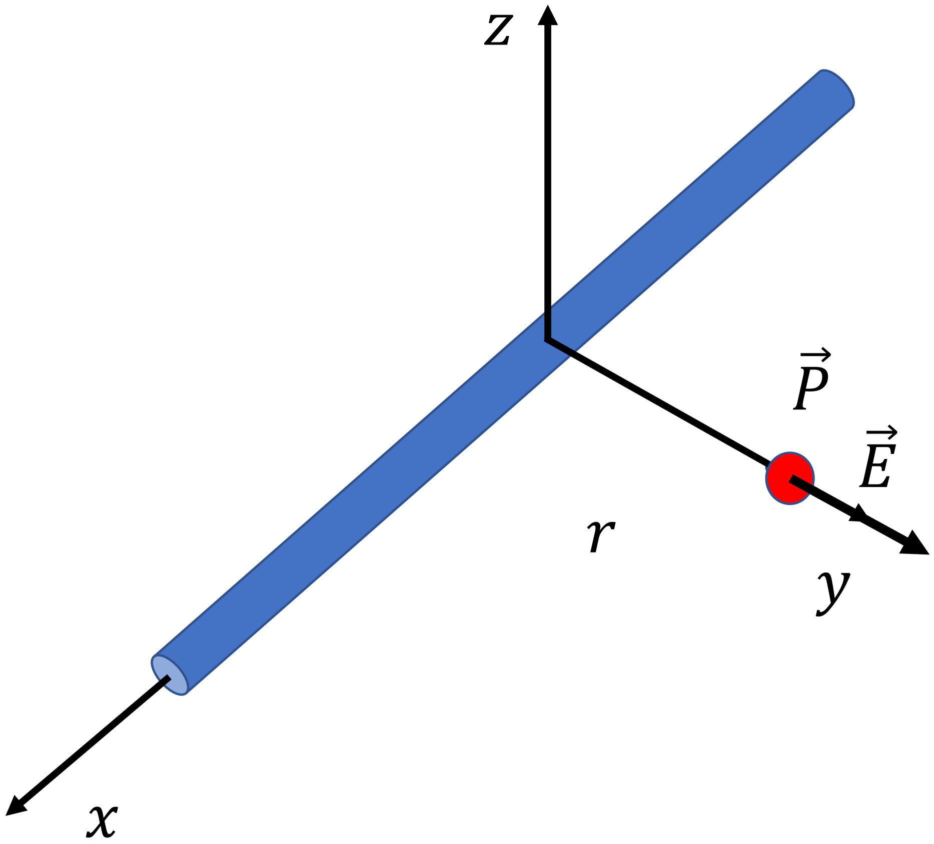
- "Hilo infinito" de carga a lo largo de eje x
- Grosor despreciable $(y' = z' = 0)$
- Distribución constante $\lambda(x)$ = cte $({}^{C}/_{m})$.
- Calculemos el campo $\vec{E}$ en el punto $\vec{P}$.
- Sumemos las contribuciones $\overrightarrow{dE}$ de los diferenciales de carga $dq = \lambda\, dx$

Distribución lineal uniforme infinita



- Simetría de traslación a lo largo del eje x.
- Pongo el origen en cualquier x. Por ejemplo, de manera que $P_x = 0$.
- Simetría alrededor de x.
- Da lo mismo cualquier ángulo entre $\vec{P}$ y los ejes $\hat{y}$ y $\hat{z}$. Puedo hacer $P_z = 0$ y $P_y = r$

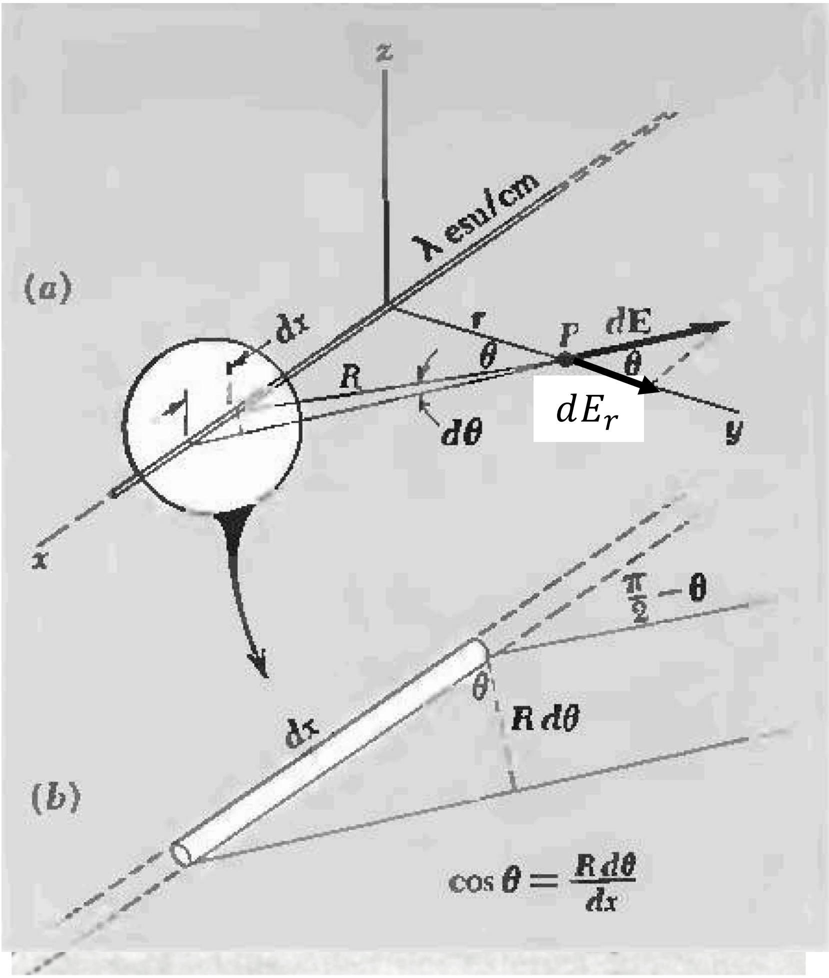
Distribución lineal uniforme infinita



- Simetría de traslación a lo largo del eje x.
- Pongo el origen en cualquier x. Por ejemplo, de manera que $P_x = 0$.
- Simetría alrededor de x.
- Da lo mismo cualquier ángulo entre $\vec{P}$ y los ejes $\hat{y}$ y $\hat{z}$. Puedo hacer $P_z = 0$ y $P_y = r$
- Entonces, el campo debe ser radial en cilíndricas y sólo depender de la distancia radial r:

$$\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$$

Distribución lineal uniforme infinita



- El diferencial de campo radial dE_r en $\vec{P}$ generado por un diferencial $dq = \lambda\, dx$ viene dado por

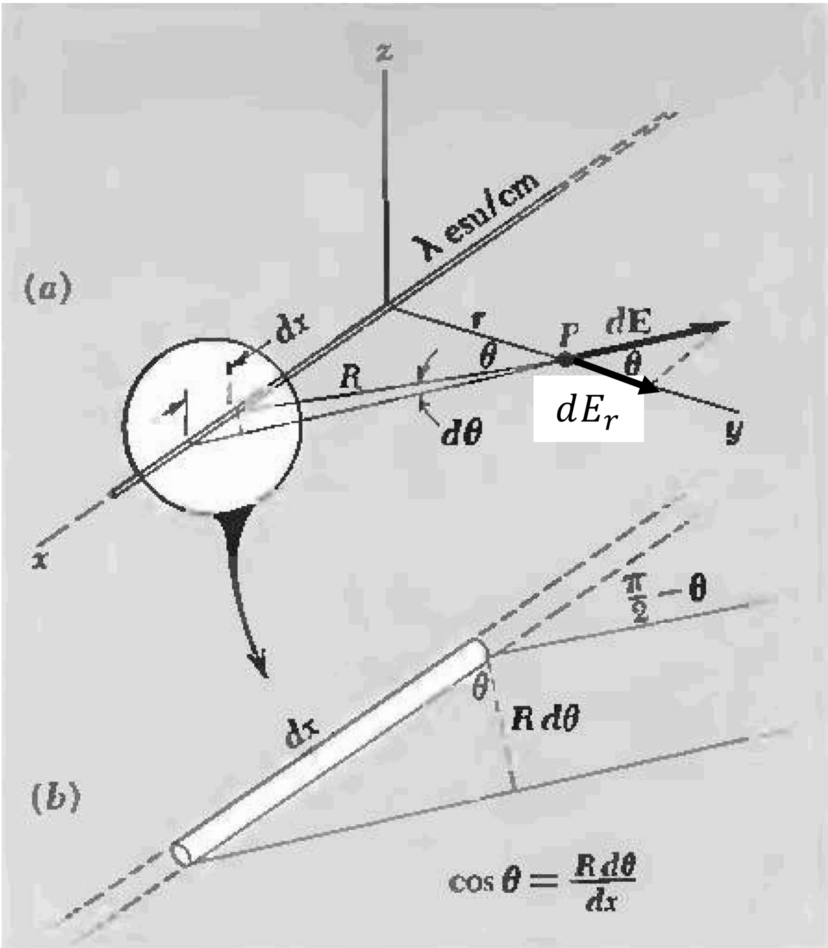
$$dE_r = dE\ \cos\theta$$

Donde el ángulo entre el eje y y la dirección al dq.

- Como vimos, $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$
- Reemplazamos dE

$$dE_r = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

Distribución lineal uniforme infinita



- Integramos sobre todo el hilo

- $E(r) = \int dE_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\, dx$

- Como $dx \; \cos\theta = R\; d\theta$ y $R \cos\theta = r$ la integral en función de θ queda:

- $E(r) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0\, r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\, r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta$

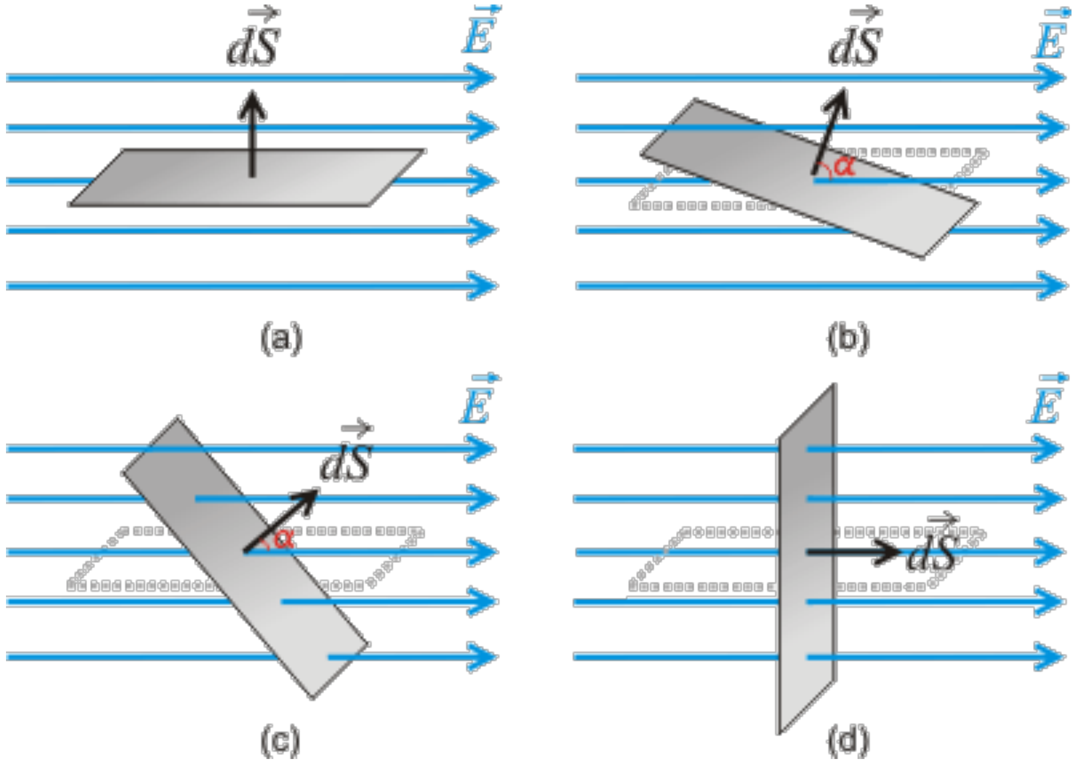
$$E(r) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Ley de Gauss

Electrostática

Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el producto de un campo por el área transversal que atraviesa

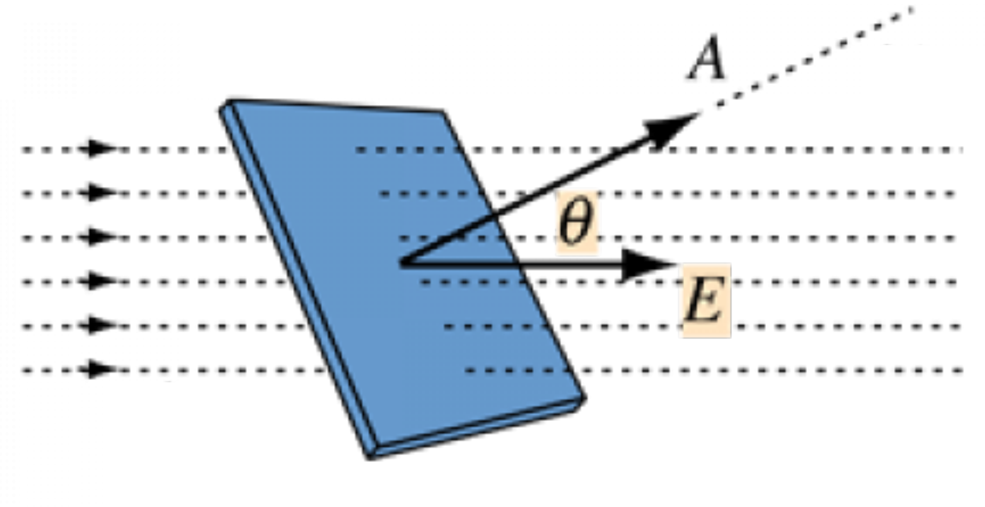


Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el producto de un campo por el área transversal que atraviesa

Superficie plana de área A, $\vec{E}$ uniforme

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\ \cos\theta$$



Flujo de campo eléctrico

- Superficie compuestas de facetas de área $\overrightarrow{A_i}$ atravesadas por campos $\overrightarrow{E_i}$.

$$\Phi = \sum_{todos\ los\ i} \overrightarrow{E_i} \cdot \overrightarrow{A_i} = \sum_{todos\ los\ i} E_i A_i \cos\theta_i$$

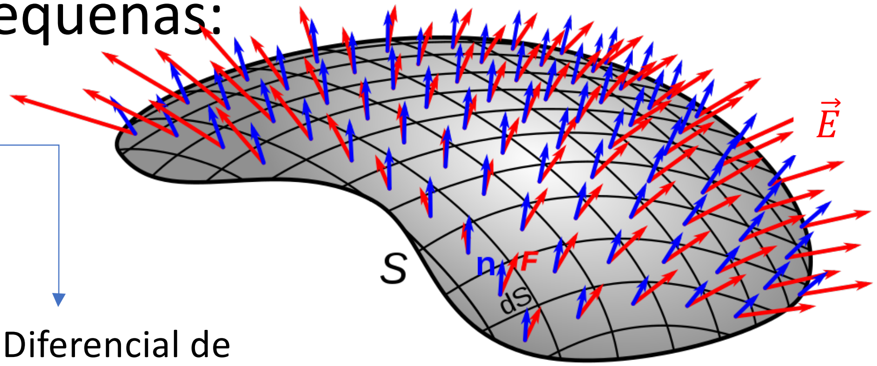
- Si las facetas son infinitesimalmente pequeñas:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, ds$$

Campo en la faceta infinitesimal

Normal a la faceta infinitesimal

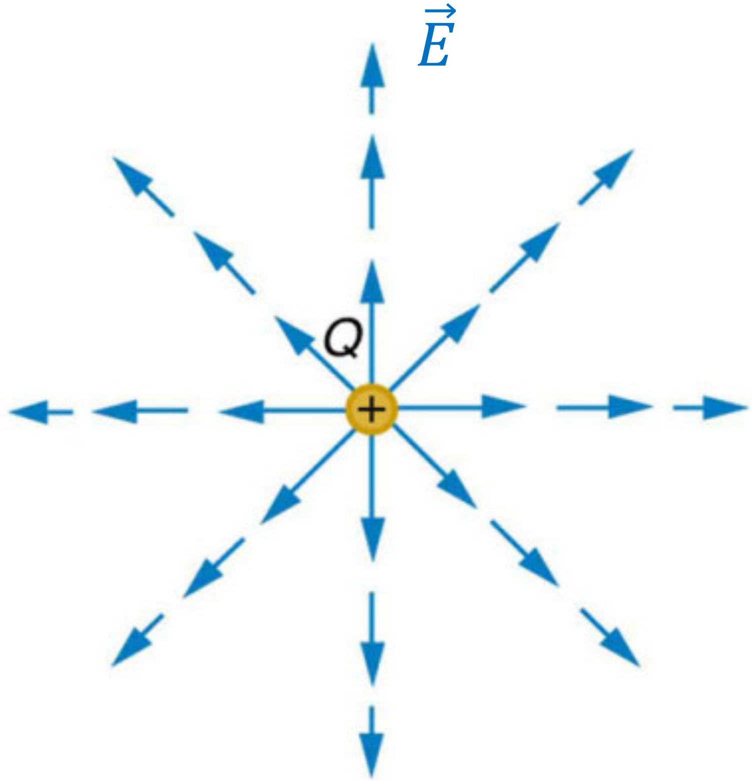
Diferencial de área



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- En coordenadas esféricas, el campo generado a una distancia r es siempre radial y vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

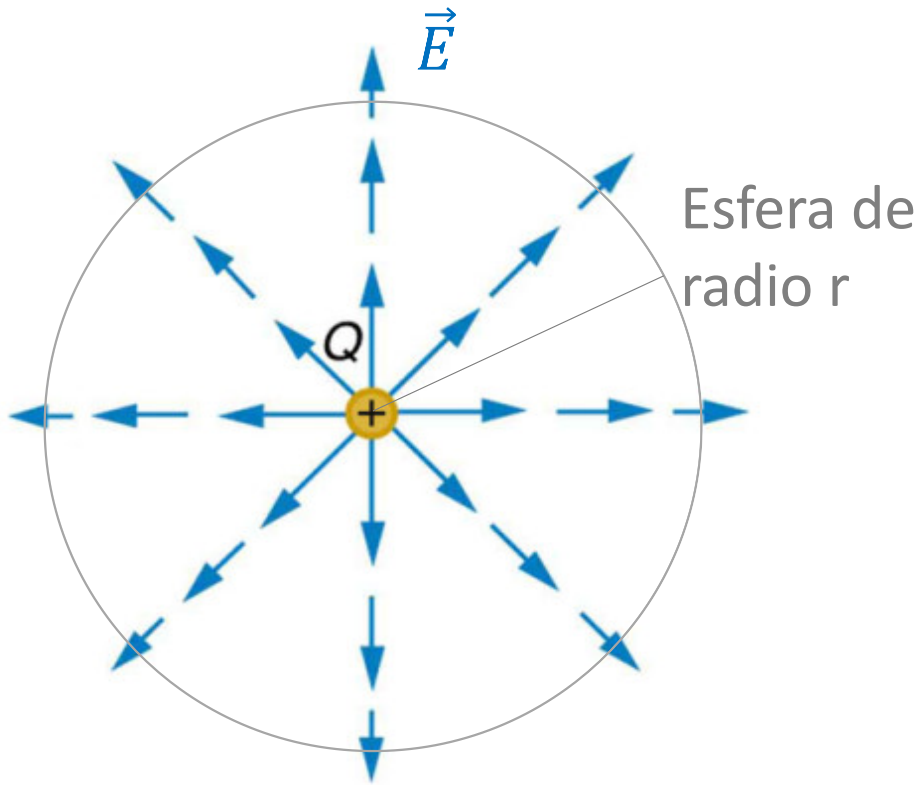


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- El flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio r vale:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Superficie de la esfera

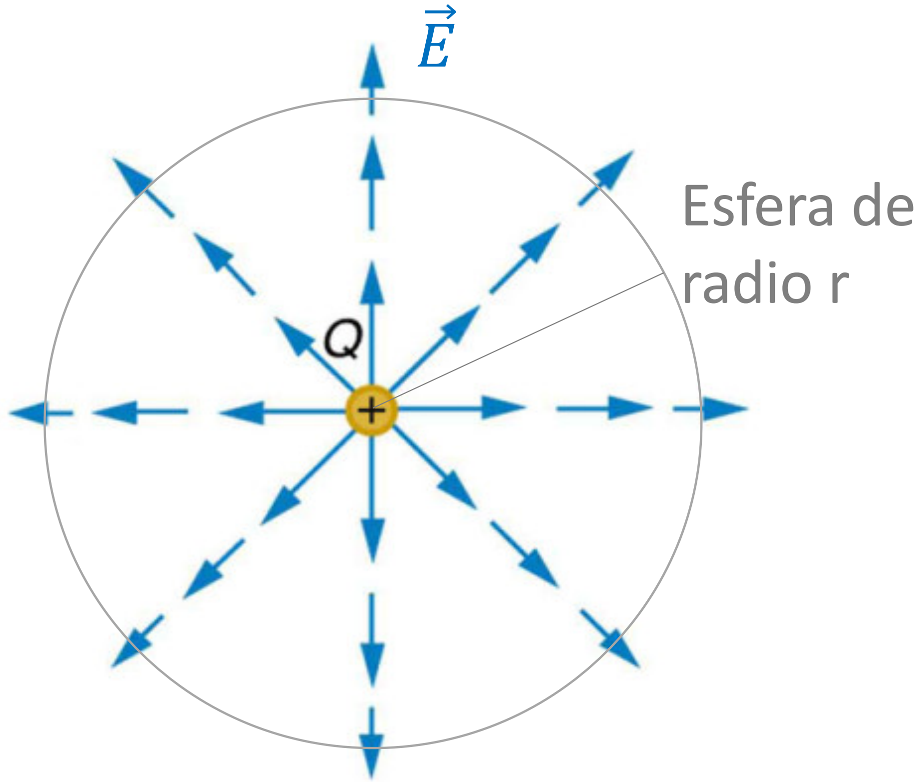


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- Sobre la esfera, $\vec{E}$ apunta siempre radialmente y vale lo mismo

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Superficie de
la esfera

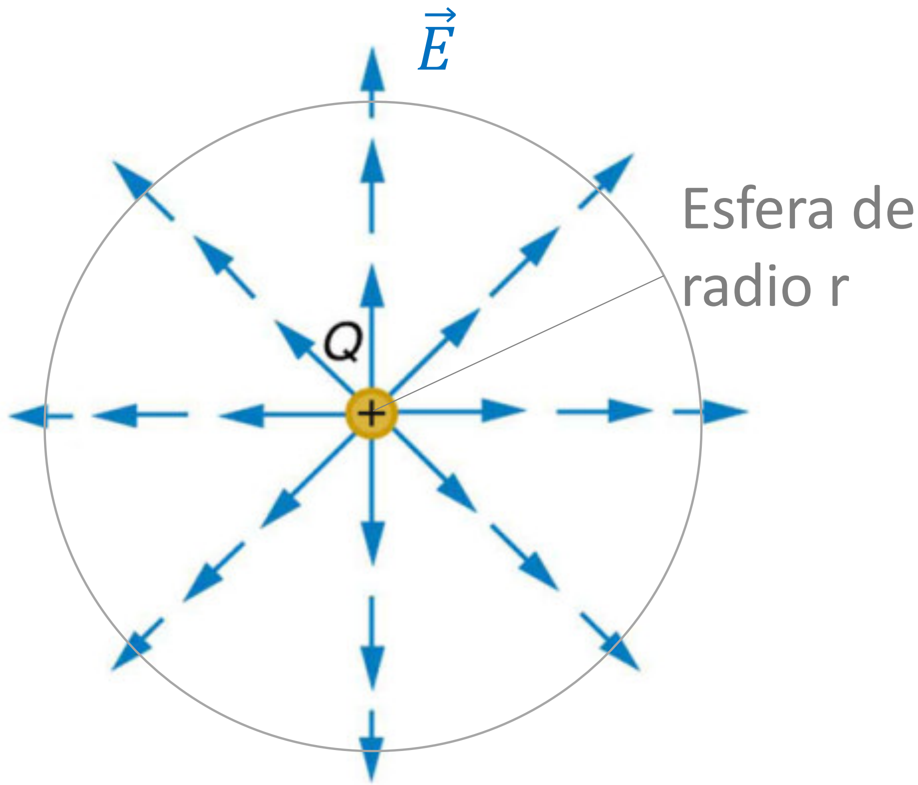


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- El diferencial de área en la esfera apunta radialmente y vale $r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

Superficie de
la esfera



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- Partiendo de:

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

Superficie de
la esfera

- Reorganizamos los factores y tachamos los r^2

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\cancel{r^2}}\cancel{r^2} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}\cdot\hat{r}$$

Superficie de
la esfera

Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- Luego, sabemos que por definición $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Superficie de
la esfera

- Ponemos ahora los límites de integración y Q sale afuera

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- La primera integral da 2, mientras que la segunda vale 2π, entonces

$$\Phi = \frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0} Q \, \cancel{4\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Vemos que el resultado no depende del radio de la esfera, o sea que es <u>el mismo para cualquier valor de r</u>.

Ley de Gauss

Carl Friederich Gauss
(1777-1855)

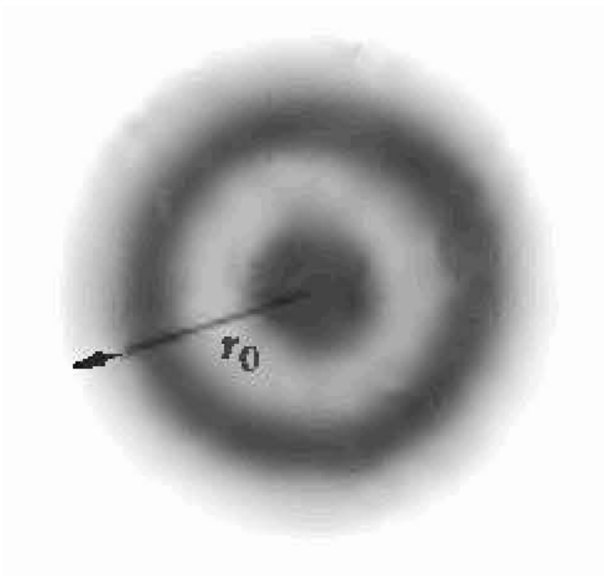
Se verifica que en general, ***para toda superficie cerrada*** *S que encierra un volumen V, El flujo del campo eléctrico* $\vec{E}$ *a través de S es proporcional a la carga total encerrada*

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dv$$

Pregunta

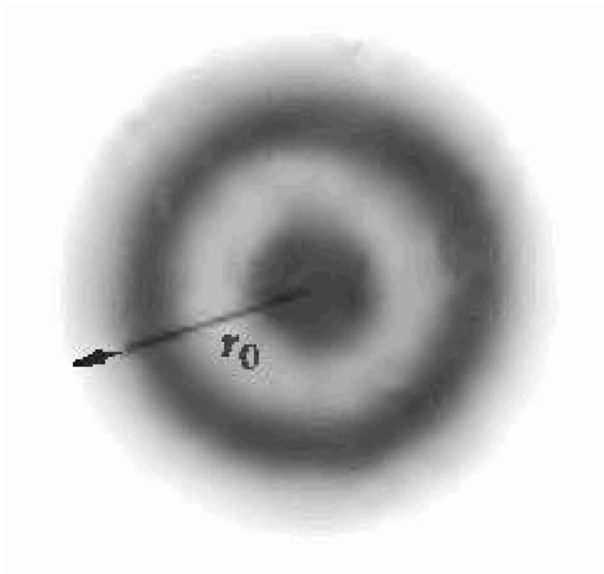
- ¿Qué dice el Teorema de Gauss?

Campo de una distribución esférica de carga



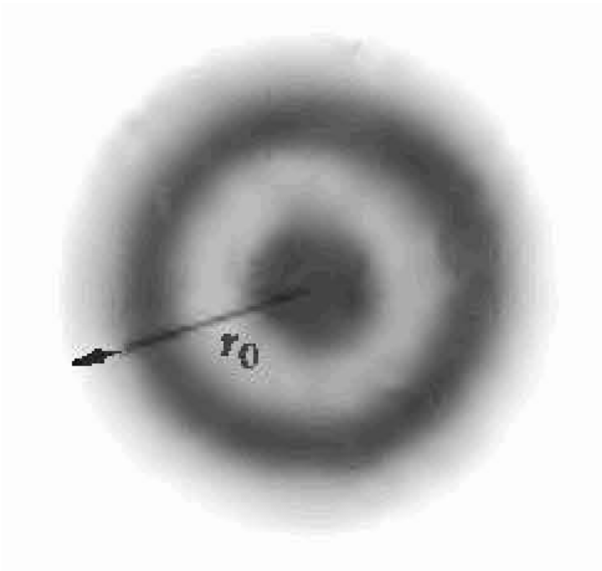
- Supongamos una distribución de carga ρ como la de la figura.

Campo de una distribución esférica de carga



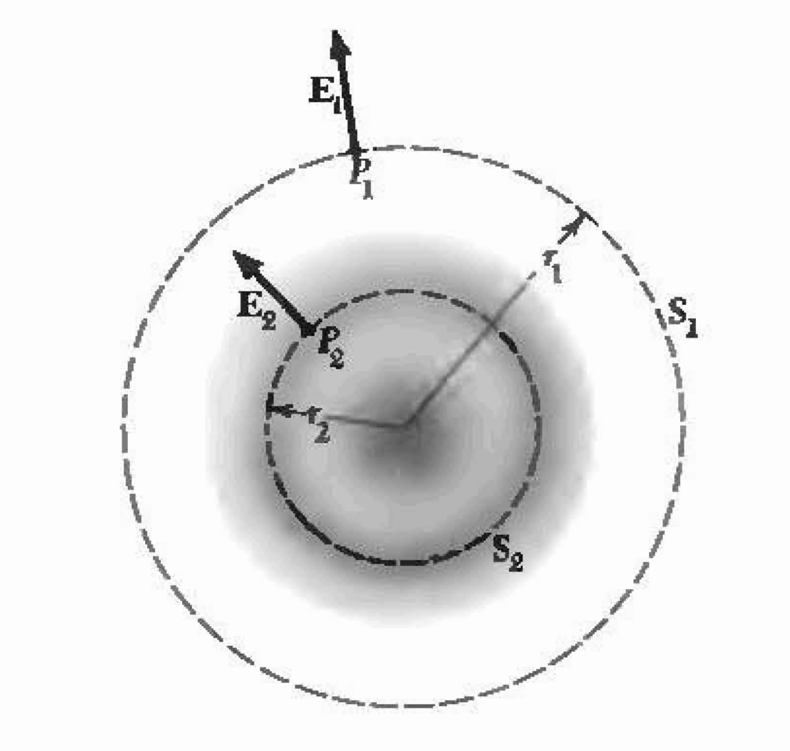
- Supongamos una distribución de carga ρ como la de la figura.
- La carga varía solamente con distancia radial y termina en $r = r_0$.

Campo de una distribución esférica de carga



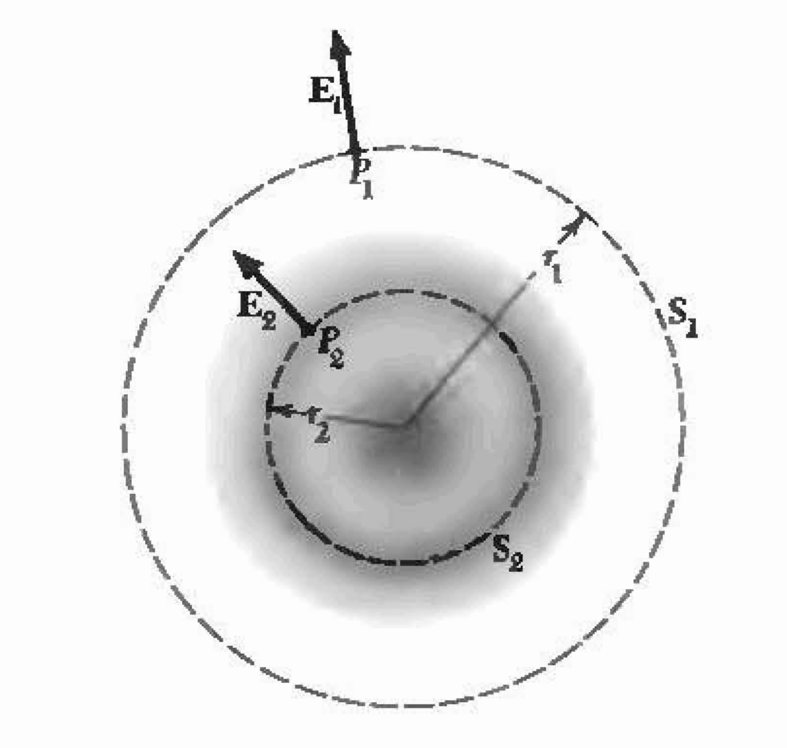
- Supongamos una distribución de carga ρ como la de la figura.
- La carga varía solamente con distancia radial y termina en $r = r_0$.
- Calculemos el campo en todo el espacio aprovechando la Ley de Gauss y la simetría del sistema.

Campo de una distribución esférica de carga



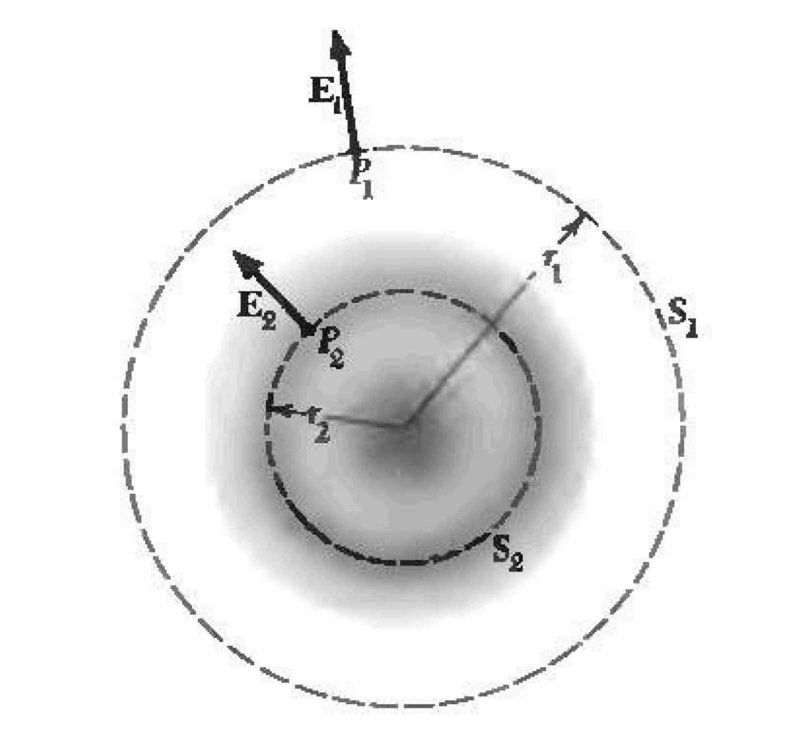
- El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).

Campo de una distribución esférica de carga



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).
- El campo debe ser radial y depender sólo de la distancia r.

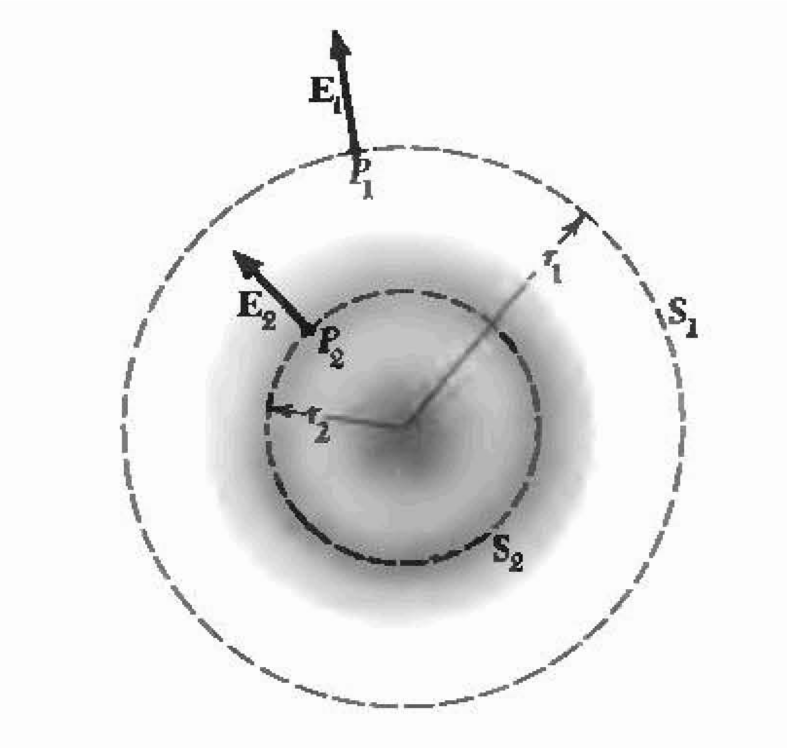
Campo de una distribución esférica de carga



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).
- El campo debe ser radial y depender sólo de la distancia r.

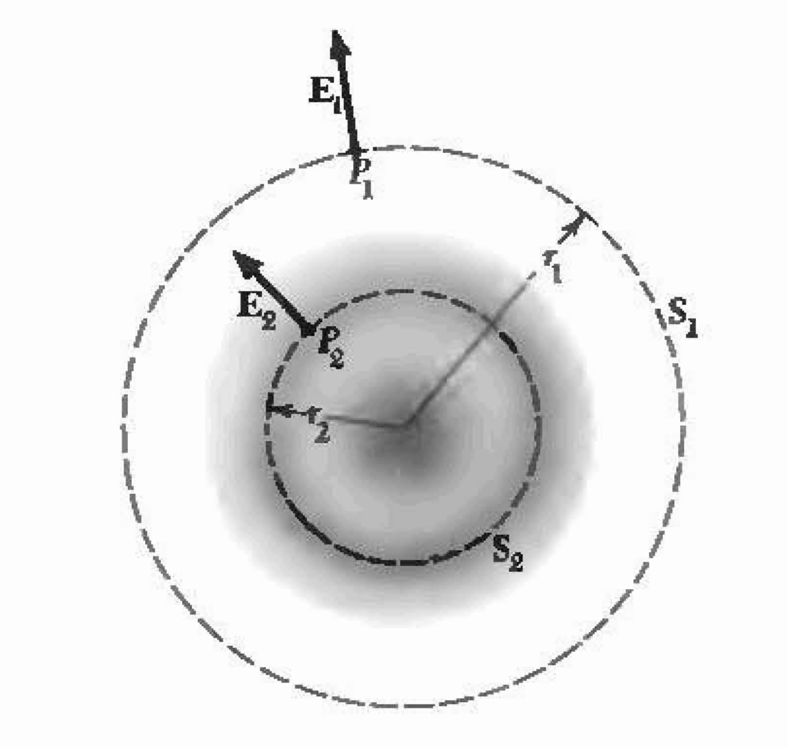
$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Sobre cualquier esfera centrada en el origen el módulo de E vale siempre lo mismo.

Campo de una distribución esférica de carga

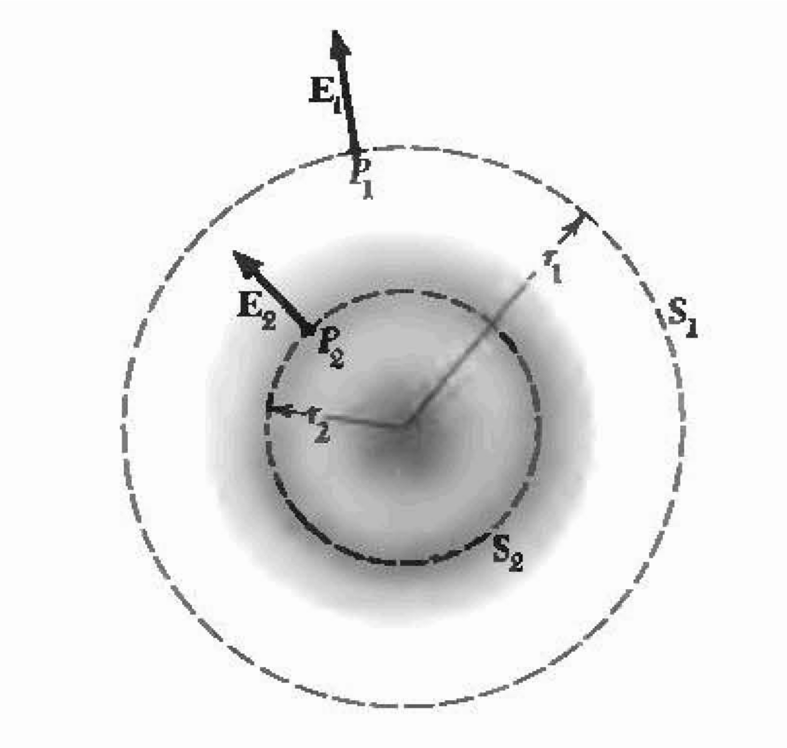


- Sobre cualquier esfera centrada en el origen el módulo de E vale siempre lo mismo.

- Si E_1 es el módulo del campo sobre la esfera S_1de radio r_1 , el flujo será:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = E_1 \int_{S_1} \hat{r} \cdot \hat{r} \, ds = 4\pi r_1^2 E_1$$

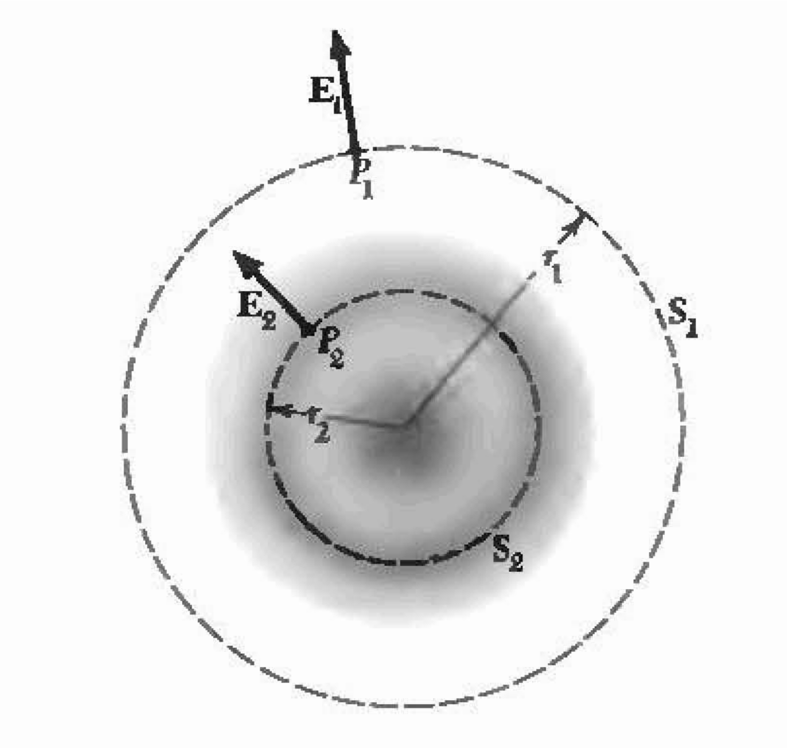
Campo de una distribución esférica de carga



- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{\epsilon_0}$$

Campo de una distribución esférica de carga



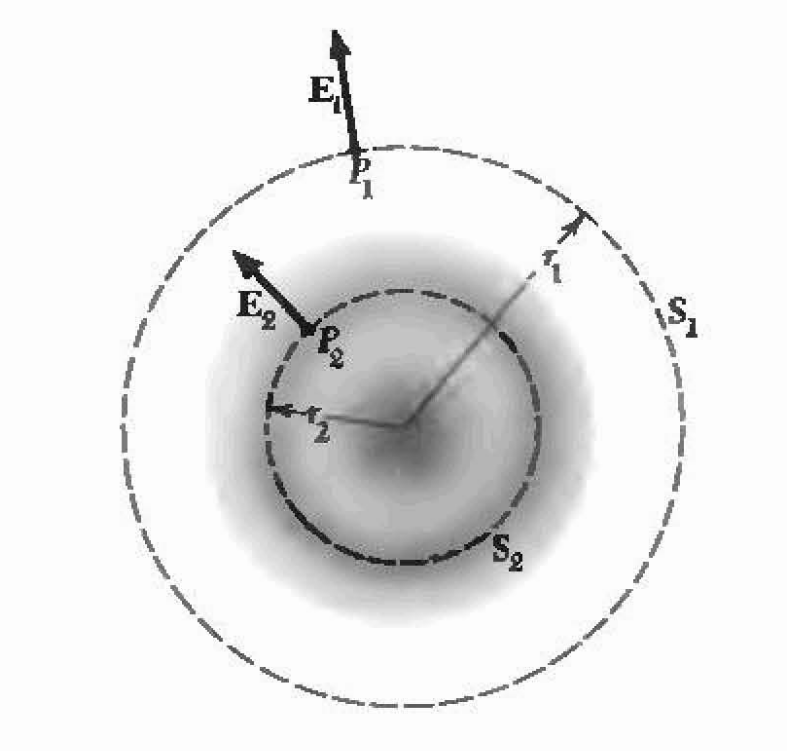
- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{\epsilon_0}$$

- Por lo tanto

$$E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{4\pi r_1^2 \epsilon_0}$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{\epsilon_0}$$

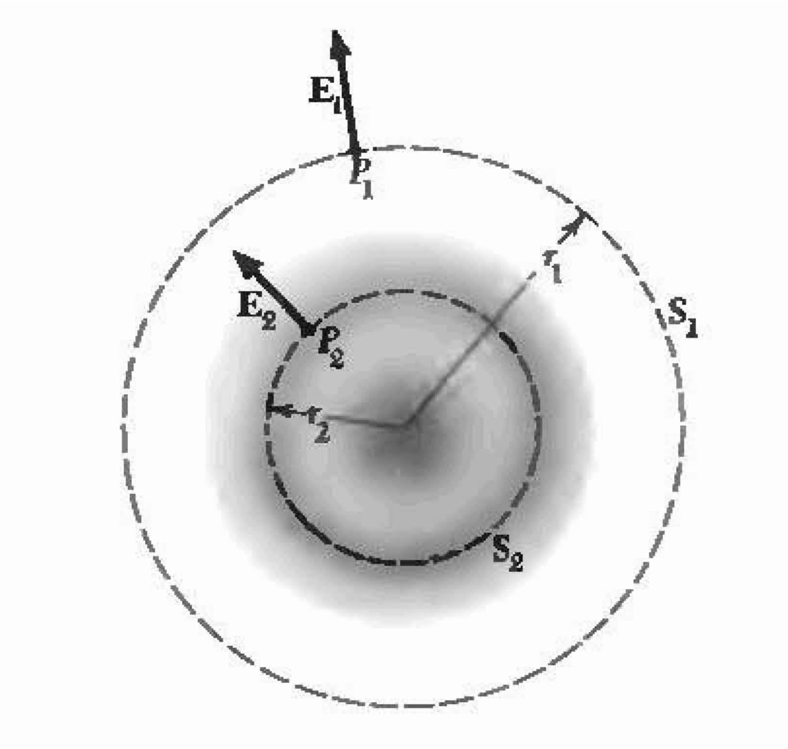
- Por lo tanto

$$E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{4\pi r_1^2 \epsilon_0}$$

Sirve para todo $r_1 > r_0$

Es como si toda la carga dentro de S_1 estuviese concentrada en el origen

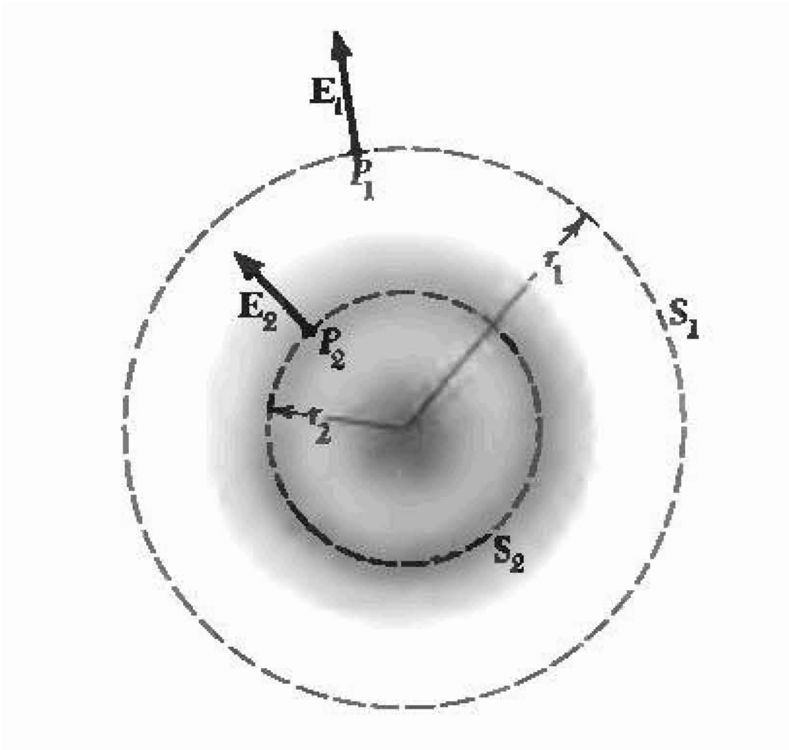
Campo de una distribución esférica de carga



- Análogamente, si E_2 es el módulo del campo sobre la esfera S_2 de radio r_2

$$E_2 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$$

Campo de una distribución esférica de carga



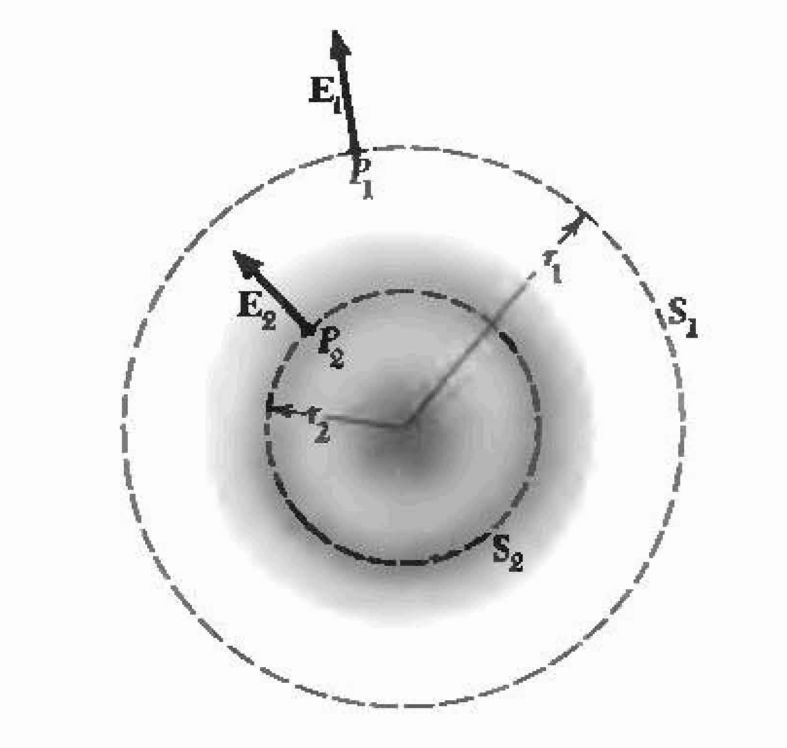
- Análogamente, si E_2 es el módulo del campo sobre la esfera S_2 de radio r_2

$$E_2 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$$

- Depende de cuánta carga encierre S_2

$$Carga\ encerrada\ por\ S_2 = \int_{\substack{\text{Volumen} \\ \text{encerrado} \\ \text{Por } S_2}} \rho\, dV$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Análogamente, si E_2 es el módulo del campo sobre la esfera S_2 de radio r_2

$$E_2 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$$

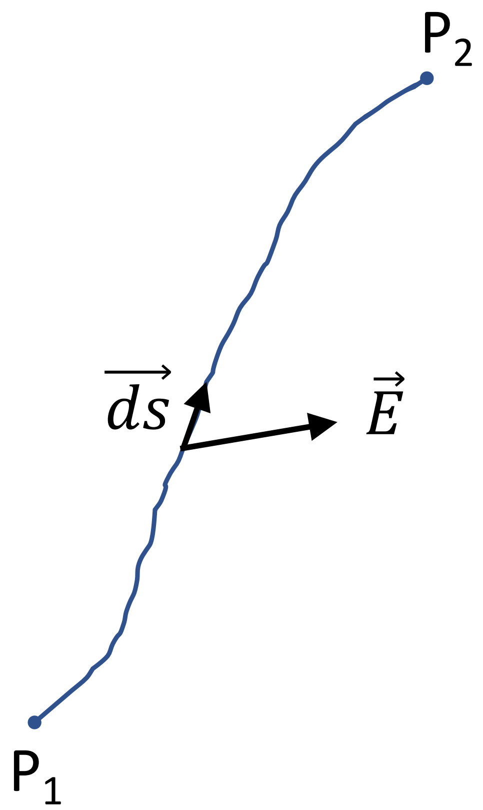
- Depende de cuánta carga encierre S_2

$$Carga\ encerrada\ por\ S_2 = \int_{\substack{\text{Volumen}\\ \text{encerrado}\\ \text{Por } S_2}} \rho\ dV$$

- No depende de la carga fuera de S_2 !

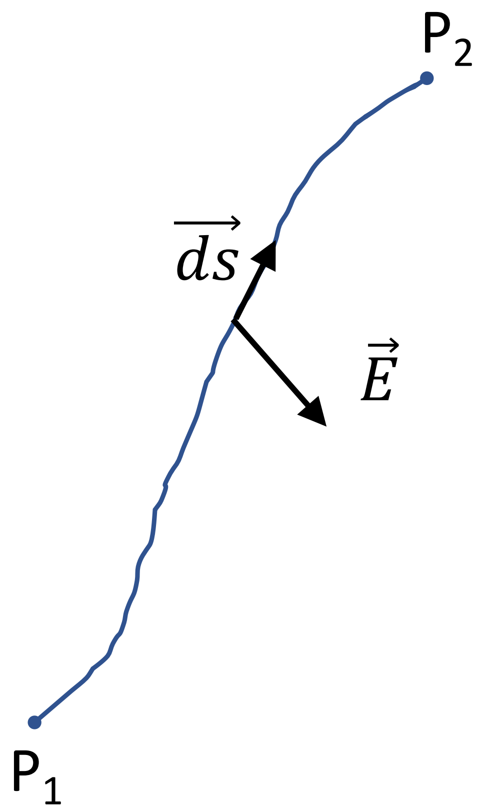
Potencial electrostático

Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

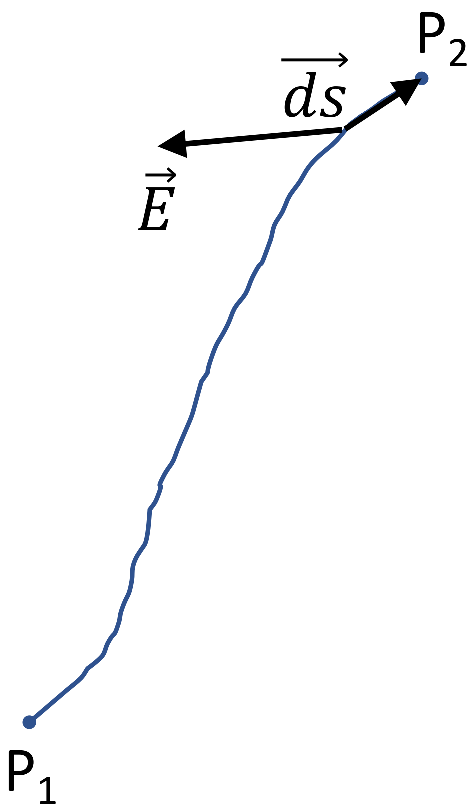
Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

- Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo $\vec{E}$ entre dos puntos P_1 y P_2.

Integral de línea del campo

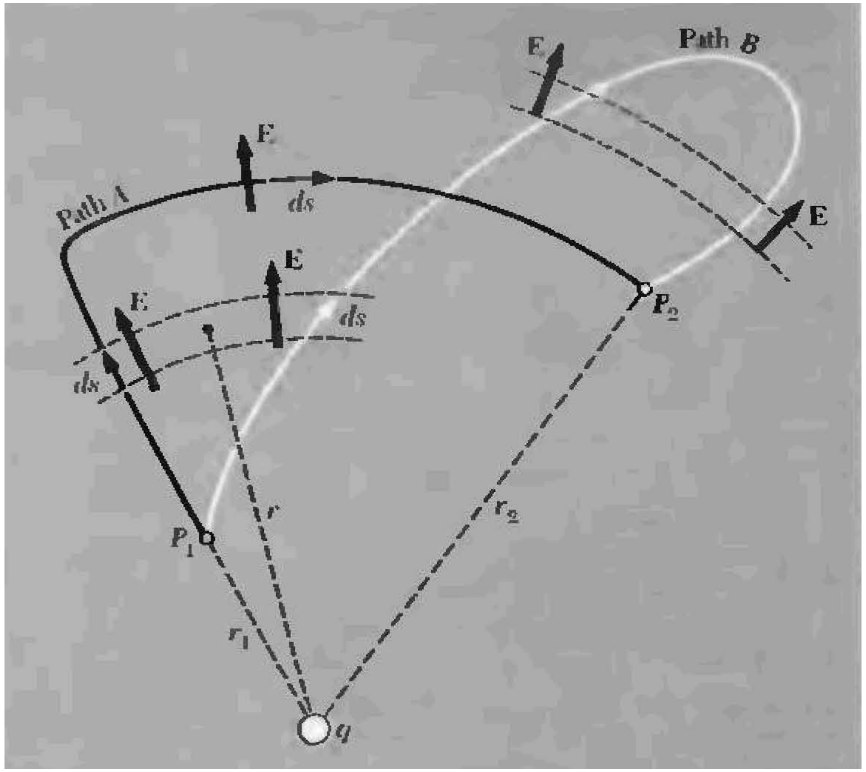


- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

- Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo $\vec{E}$ entre dos puntos P_1 y P_2.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

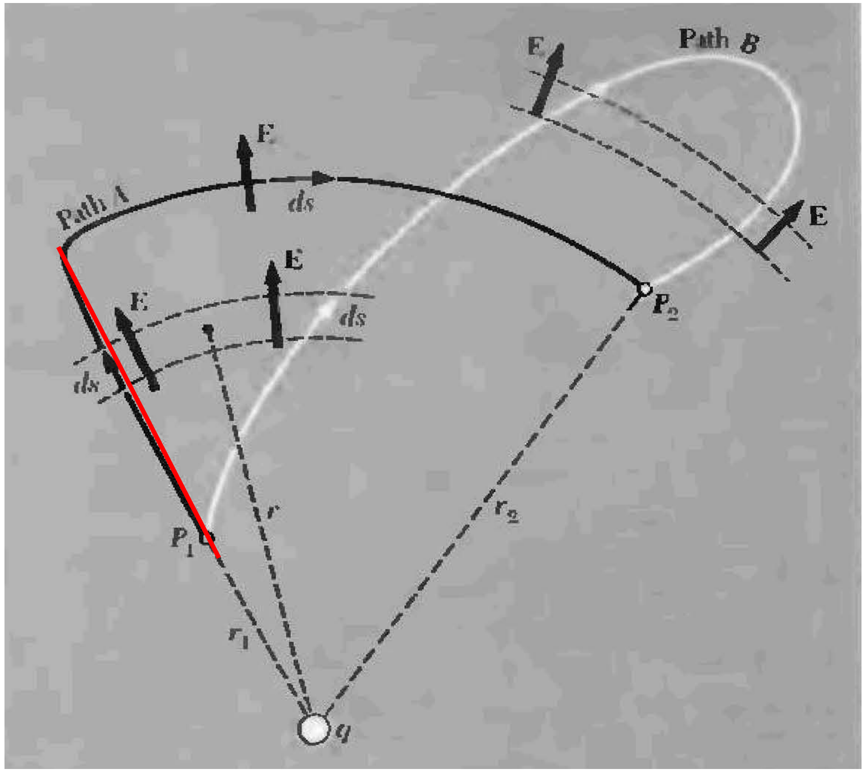
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da:

- $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} =$

Camino A

Diferencia de potencial en carga puntual



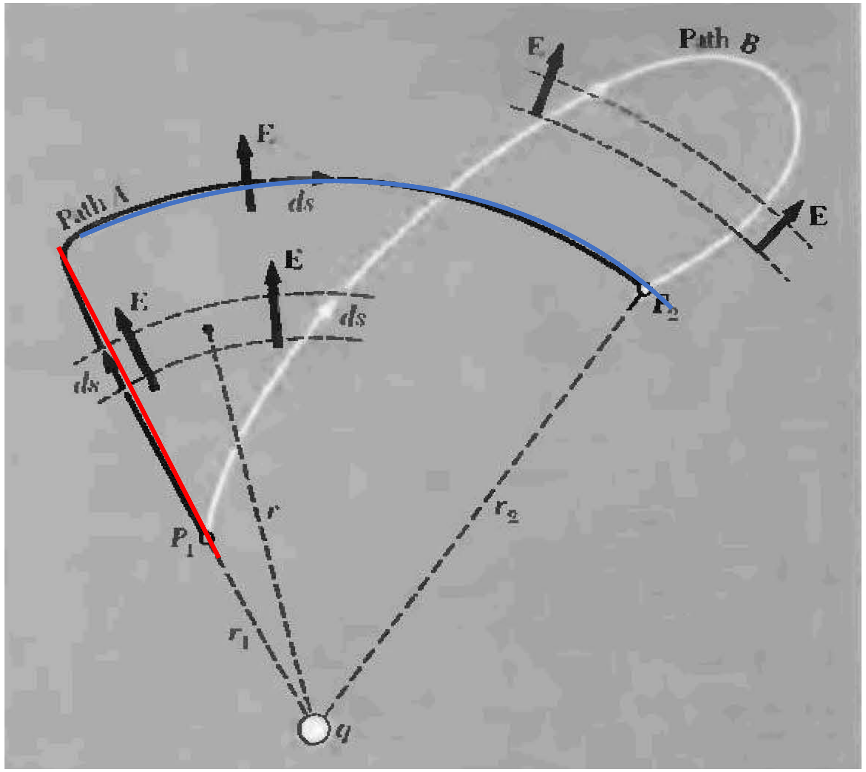
- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da:

- $\underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}}_{\text{Camino A}} = \underbrace{\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}}_{\text{Camino radial}} +$

Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

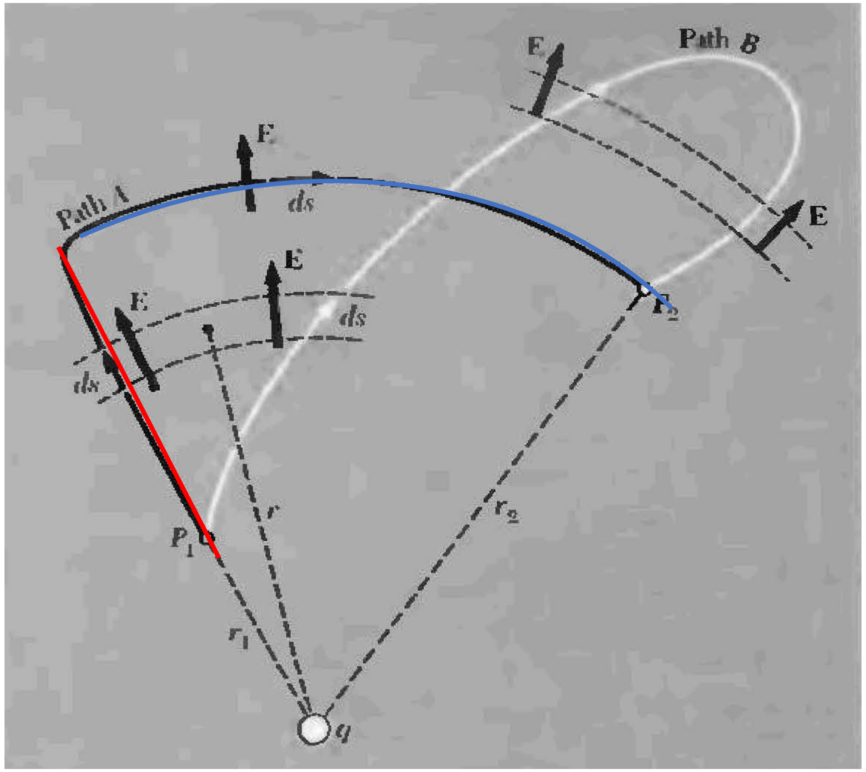
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da:

- $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} + \int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$

Camino A   Camino radial   Arco

Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da:

Son perpendiculares!

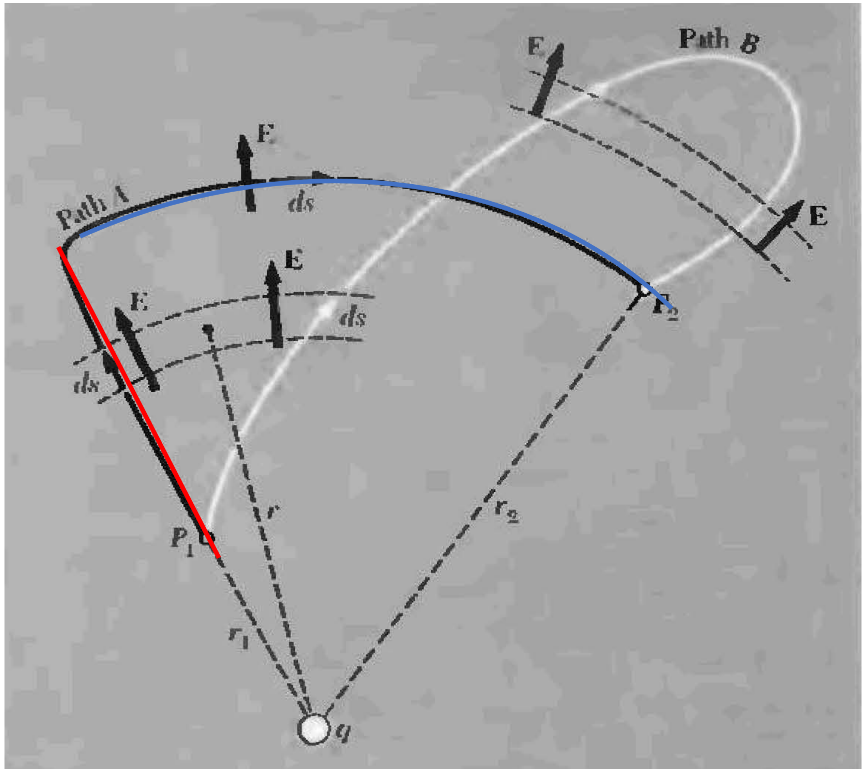
- $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} + \cancel{\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}}$

Camino A

Camino radial

Arco

Diferencia de potencial en carga puntual



- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da $\overrightarrow{ds} = dr\,\hat{r}$:

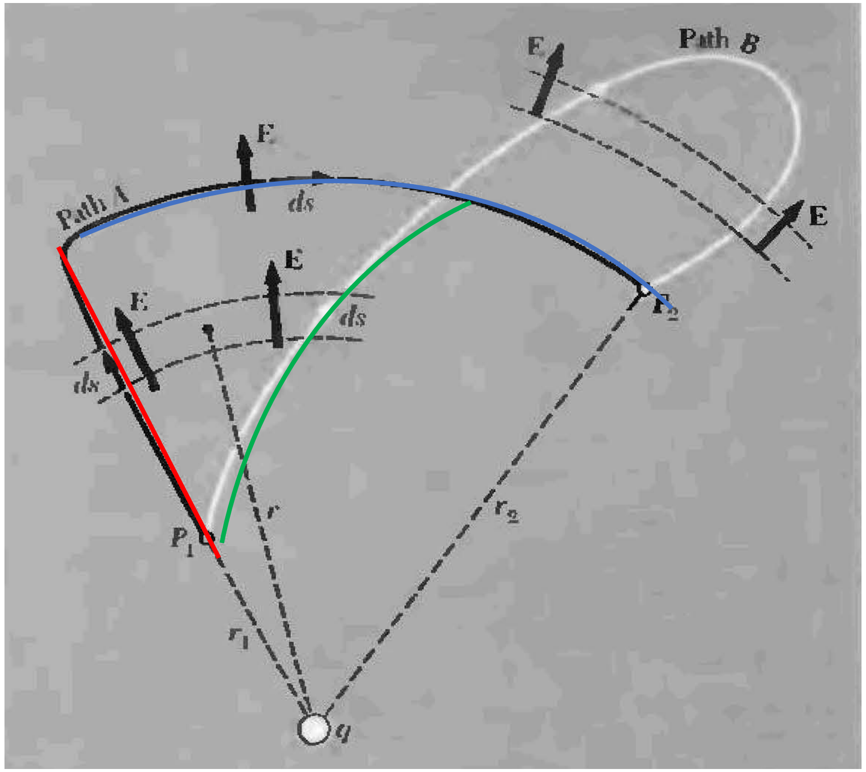
$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}\, dr$$

Camino A

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Camino A

Diferencia de potencial en carga puntual

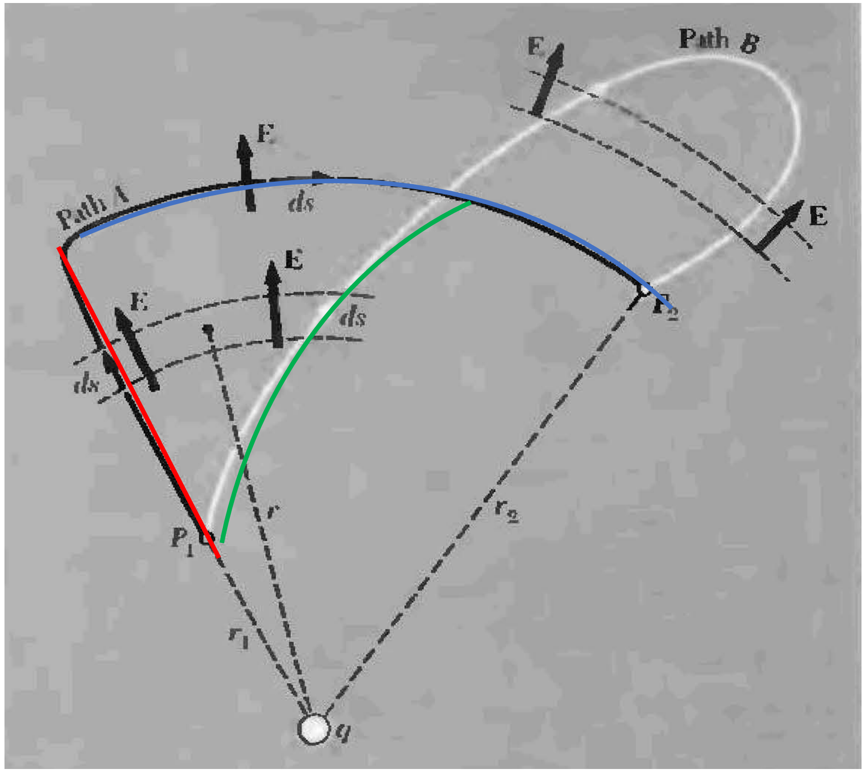


- Al ser $\vec{E}$ radial, la integral por el tramo verde del Camino B vale lo mismo que la integral del camino A.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Camino B
Tramo verde

Diferencia de potencial en carga puntual



- Al ser $\vec{E}$ radial, la integral por el tramo verde del Camino B vale lo mismo que la integral del camino A.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Camino B
Tramo verde

- Mientras que el lazo blanco no contribuye.

Diferencia de potencial en carga puntual

- Como el camino B no tiene nada especial, **la integral no depende del camino y para P_1 y P_2 fijos siempre vale:**

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

- **La diferencia de potencial entre P_1 y P_2 se define como**:

$$\phi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

- En electrostática no depende del camino
- Solo depende del punto inicial y el final

Función potencial para una carga puntual

- La diferencia de potencial entre dos puntos es para este caso:

$$\phi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

- Se puede definir una función potencial $\phi(r)$ si coloco un potencial de referencia común para todo el sistema. Podemos hacerlo en $r_1 = \infty$ (muy lejos de la distribución) con lo cual:

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Función potencial de una carga puntual con potencial cero en el infinito

Pregunta

- Se llama equipotencial al conjunto de puntos del espacio que tienen el mismo valor de la función potencial.

- ¿Qué forma tiene una equipotencial para el caso que acabamos de ver?

(a) A single positive charge