

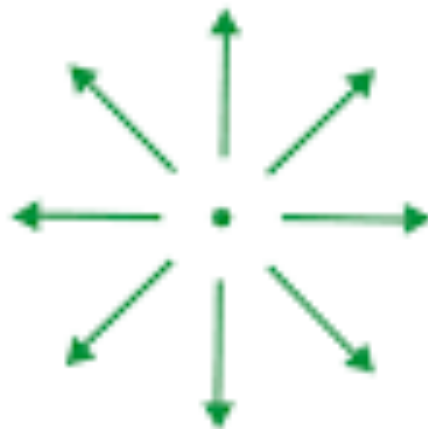
Repaso de divergencia de un campo

$$\nabla \cdot \vec{v} < 0$$



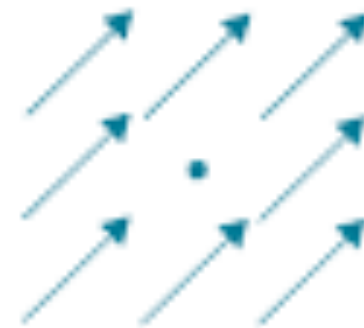
Sumidero de campo

$$\nabla \cdot \vec{v} > 0$$

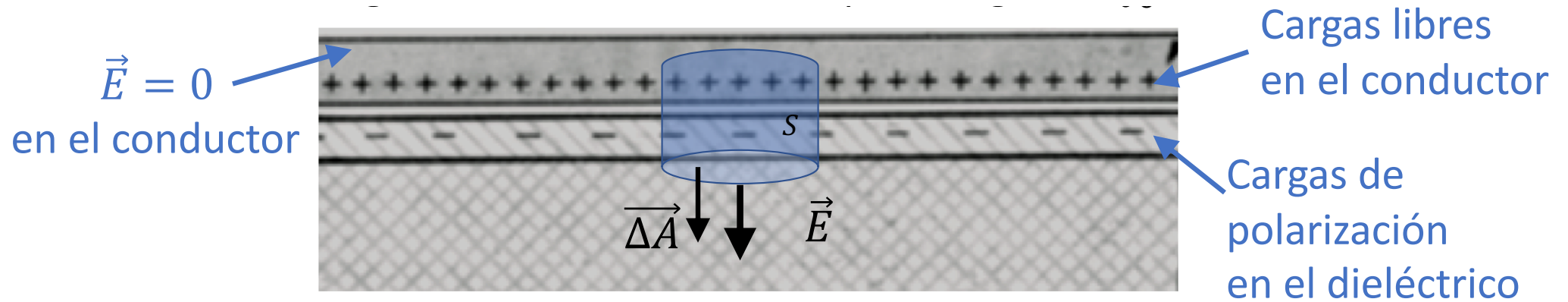


Manantial de campo

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$



Ley de Gauss para Dieléctricos



- Volviendo a nuestra superficie cerrada de Gauss:

$$\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint (\rho_{libre} + \rho_{ligada}) dV$$

- Como $\rho_{ligada} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$$\oint_s \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint (\rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dV$$

Ley de Gauss para Dieléctricos

- Por teorema de Gauss:

$$\oiint_S \vec{P} \cdot \vec{da} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV$$

- Entonces

$$\oiint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{da} = \iiint \rho_{libre} dV$$

- El campo $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ se llama corriente de desplazamiento.
Entonces:

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{da} = \iiint \rho_{libre} dV$$

Ley de Gauss
para Dieléctricos

Ley de Gauss para Dieléctricos

- Para dieléctricos lineales $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

- Donde $\varepsilon = \varepsilon_0 \kappa \geq \varepsilon_0$
- Entonces la **Ley de Gauss para dieléctricos lineales** dada una superficie cerrada S que encierra un volumen V :

$$\oiint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{da} = \iiint_V \rho_{libre} dV$$

Ley de Gauss para Dieléctricos

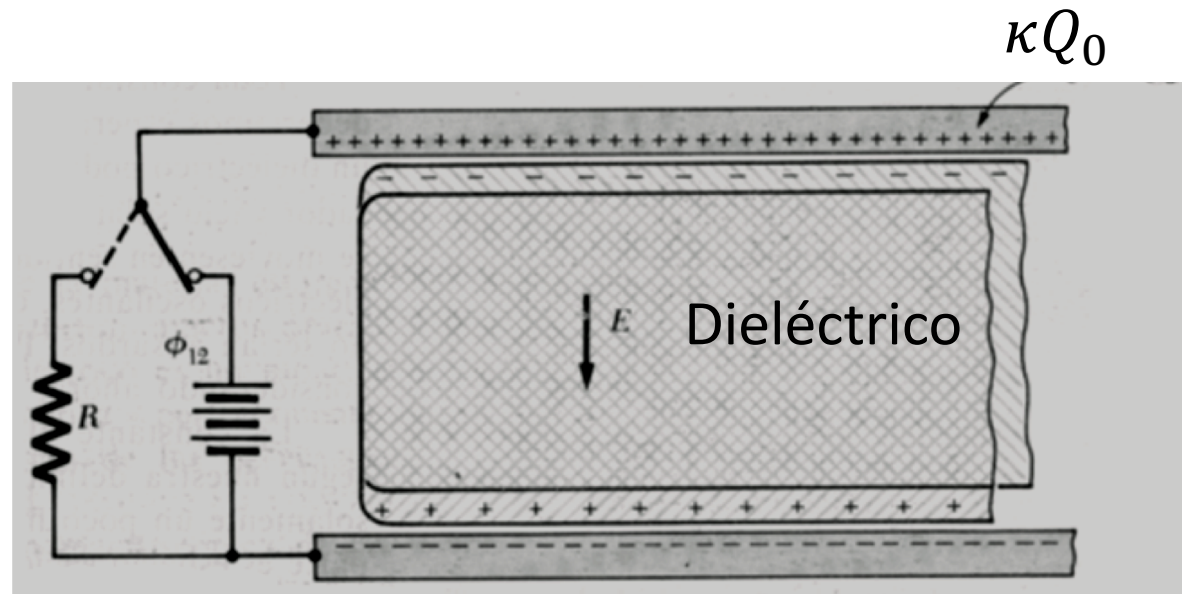
- Recordando el teorema de la divergencia, otra forma de escribir la ley de Gauss es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

Esta es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, nos dice que las cargas son manantiales o sumideros de campo eléctrico

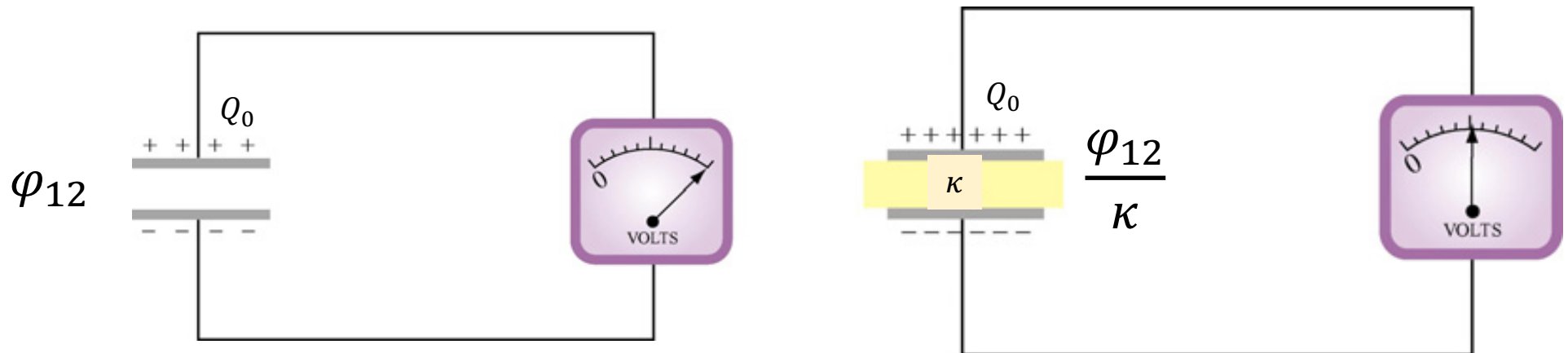
Dieléctrico en capacitor a potencial constante

- Colocamos un dieléctrico de constante κ llenando el espacio entre placas a potencial constante φ_{12}
- La carga en el conductor aumenta un factor κ .
- Al mantenerse el potencial en φ_{12} , la capacidad aumenta a κC .
- El campo total $E = \varphi_{12}/s$ en el dieléctrico no cambia

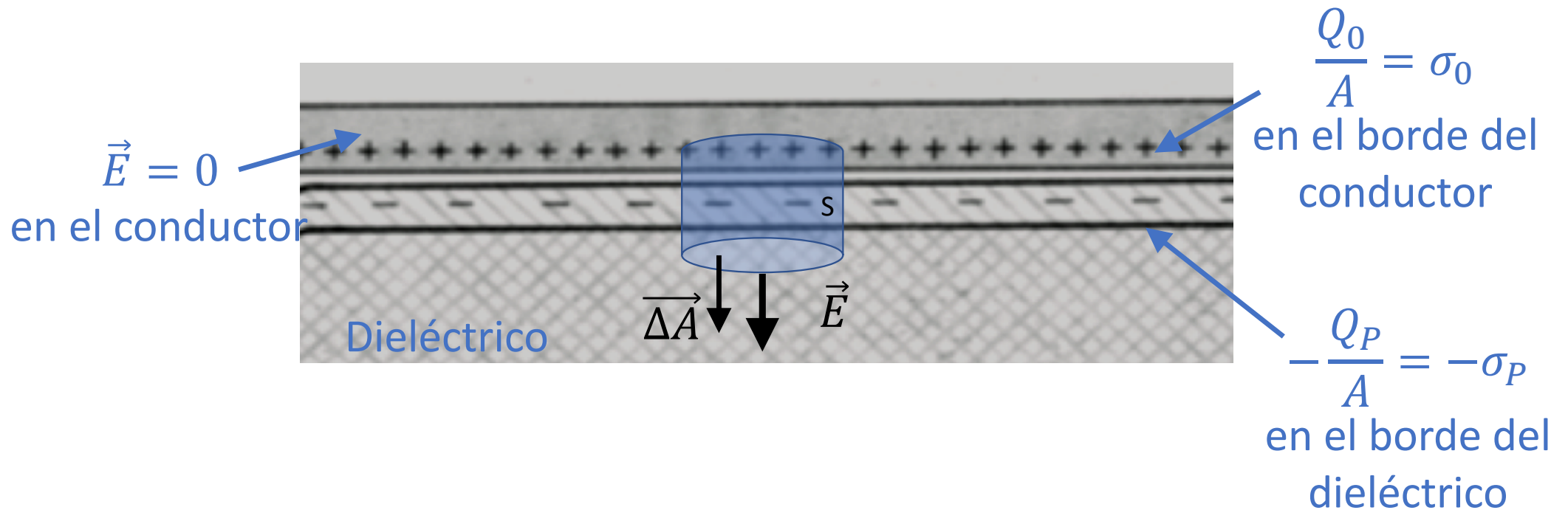


Dieléctricos en capacitor a carga constante

- Colocamos un dieléctrico de constante κ manteniendo la carga Q_0 .
- Experimentalmente se ve que el potencial cae a $\frac{\varphi_{12}}{\kappa}$, con lo cual, el campo cae a $\frac{\varphi_{12}}{s\kappa}$.
- La capacidad aumenta a κC .



Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)



$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{a} = \epsilon \vec{E} \cdot \vec{\Delta A} = \epsilon E \Delta A = \iiint \rho_{libre} dV = Q_0 \frac{1}{A} \Delta A$$

Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)

- Simplificando, tenemos $E = \frac{Q_0}{\epsilon A} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 \kappa A}$
- Para el caso sin dieléctrico el campo vale $E\kappa = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}$
- Entonces, juntando las dos últimas expresiones para E :

$$\frac{Q_0}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{Q_0 - Q_P}{\epsilon_0 A} \Rightarrow \frac{Q_0}{\kappa} = Q_0 - Q_P$$

- con lo cual la carga de polarización es

$$Q_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] Q_0, \text{ ó } \sigma_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] \sigma_0$$

Energía en capacitores con dielectricos

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico

- La energía almacenada en un capacitor venía dada por:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

- Al colocar un dieléctrico, se espera que esta cantidad cambie:
 - A potencial constante
 - A carga constante

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (con batería)

- Supongamos un capacitor de capacidad inicial C_i que llenamos completamente con un dieléctrico de constante $\kappa > 1$, manteniendo el potencial constante.

- La energía pasa de un valor inicial

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta V_i^2$$

- A un valor final

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta V_i^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \Delta V_i^2 > U_i$$

Pregunta

- ¿De donde sale la energía que ingresa al sistema al colocar el dieléctrico a voltaje constante?

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (sin batería)

- Sea un capacitor de capacidad inicial C_i y diferencia de potencial ΔV_i que llenamos completamente con un dieléctrico de constante $\kappa > 1$, manteniendo la carga constante.

- La energía pasa de un valor inicial

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta V_i^2$$

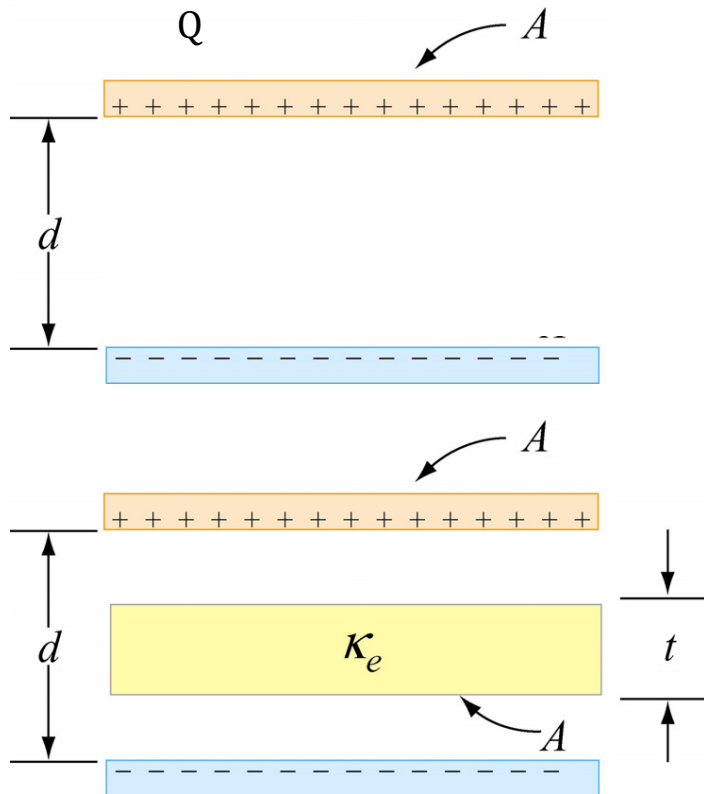
- A un valor final donde $C_f = \kappa C_i$ y $\Delta V_f = \frac{\Delta V_i}{\kappa}$

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta V_f^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \left[\frac{\Delta V_i}{\kappa} \right]^2 = \frac{U_i}{\kappa} < U_i$$

Pregunta

- ¿A dónde va la energía que ya no está en el estado final?

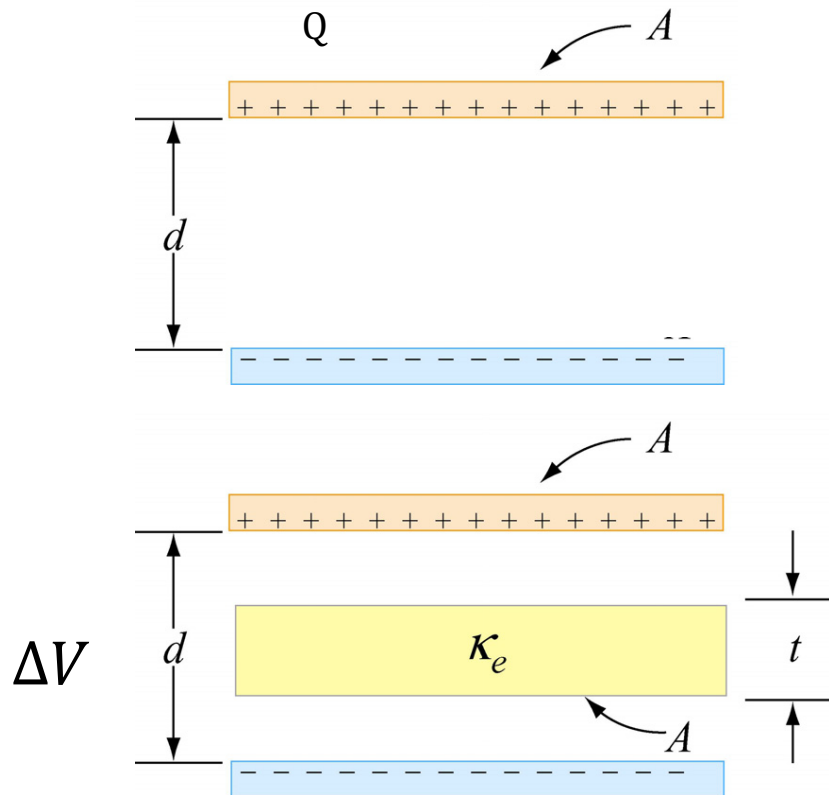
Capacitores con dieléctricos (1)



- Dado un capacitor plano de área A y espesor d , metemos un dieléctrico de constante κ_e y espesor $t < d$.
- La carga Q en el conductor permanece constante.
- Queremos ver cómo cambia la capacidad.
- Inicialmente, la capacidad es:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



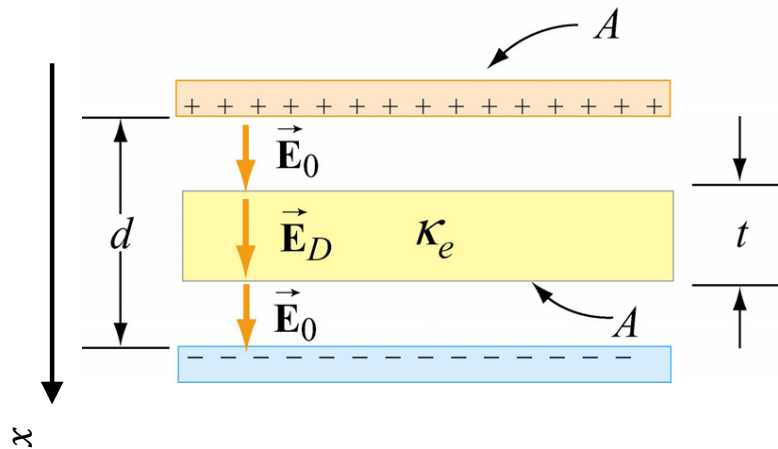
- La capacidad del capacitor con el dieléctrico vendrá dada por

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

donde ΔV es la diferencia de potencial entre las placas una vez que metimos el dieléctrico.

- Como Q no varía, sólo tenemos que calcular ΔV .

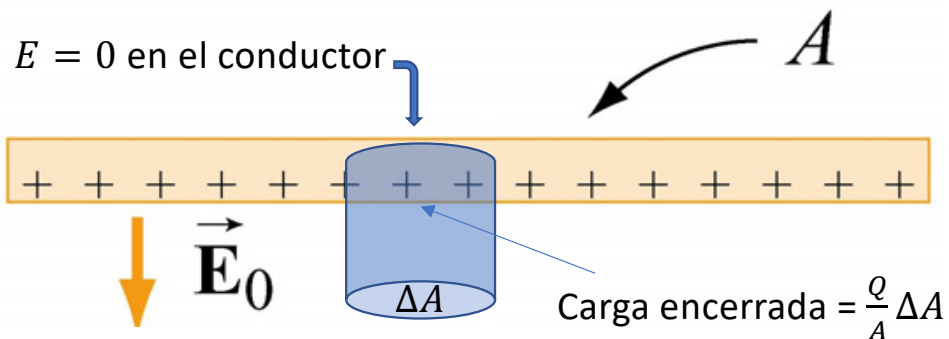
Capacitores con dieléctricos (1)



- Calculemos entonces el campo en el espacio entre las placas.

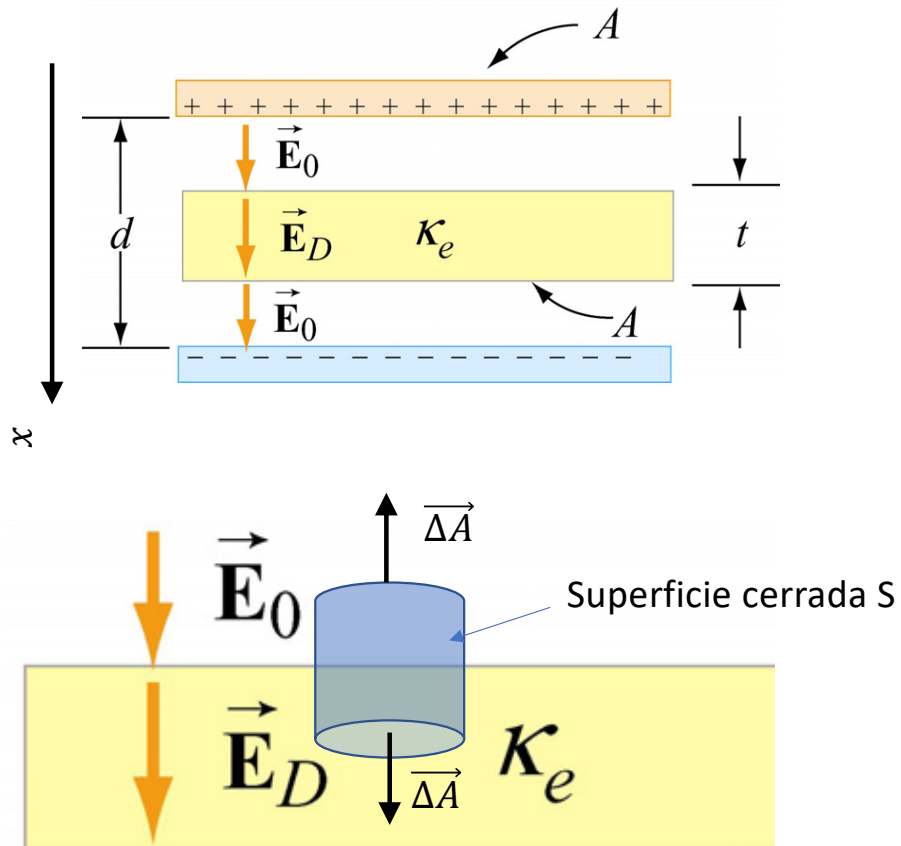
- Por ley de Gauss, En la capa de vacío de arriba el campo es simplemente

$$E_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0} \text{ o } \vec{E}_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0} \hat{x}$$



- En la capa de vacío de abajo, el valor del campo es el mismo.

Capacitores con dieléctricos (1)



- Para el campo $\vec{E}_D$ en el dieléctrico usemos la ley de Gauss para dieléctricos:

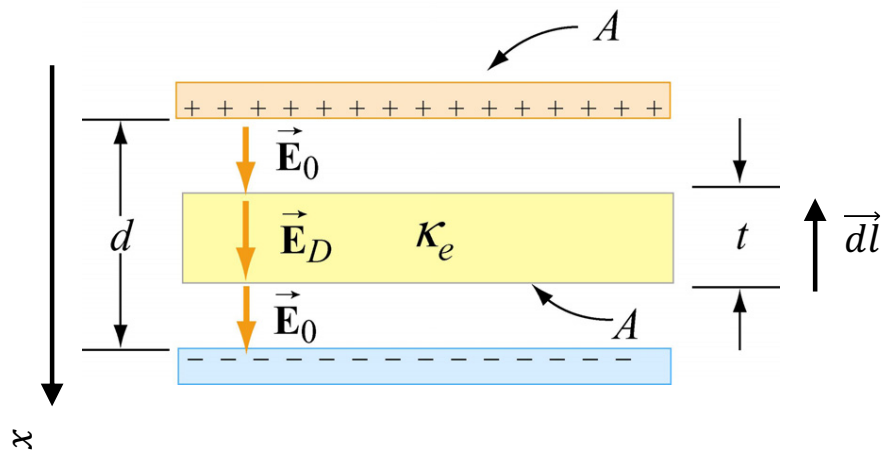
$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (\text{no hay cargas libres})$$

$$\epsilon E_D \Delta A - \epsilon_0 E_0 \Delta A = 0$$

entonces como $\epsilon = \kappa_e \epsilon_0$

$$\vec{E}_D = \frac{\vec{E}_0}{\kappa_e}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



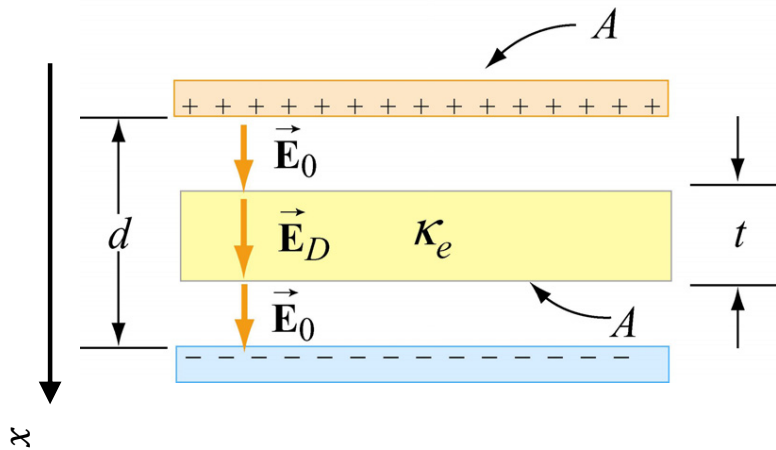
- La diferencia de potencial entre las placas es

$$\Delta V = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- la integral de camino da:

$$\begin{aligned} \Delta V &= E_0(d - t) + E_D t \\ &= \frac{Q}{A\epsilon_0} (d - t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0} t \end{aligned}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



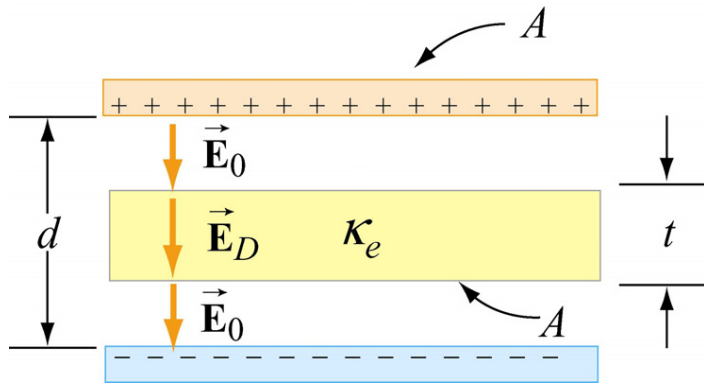
- Calculemos ahora la capacidad del capacitor con el dieléctrico:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\epsilon_0}(d-t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0}t}$$

- simplificamos y reacomodamos el denominador

$$C = \frac{1}{\frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}}$$

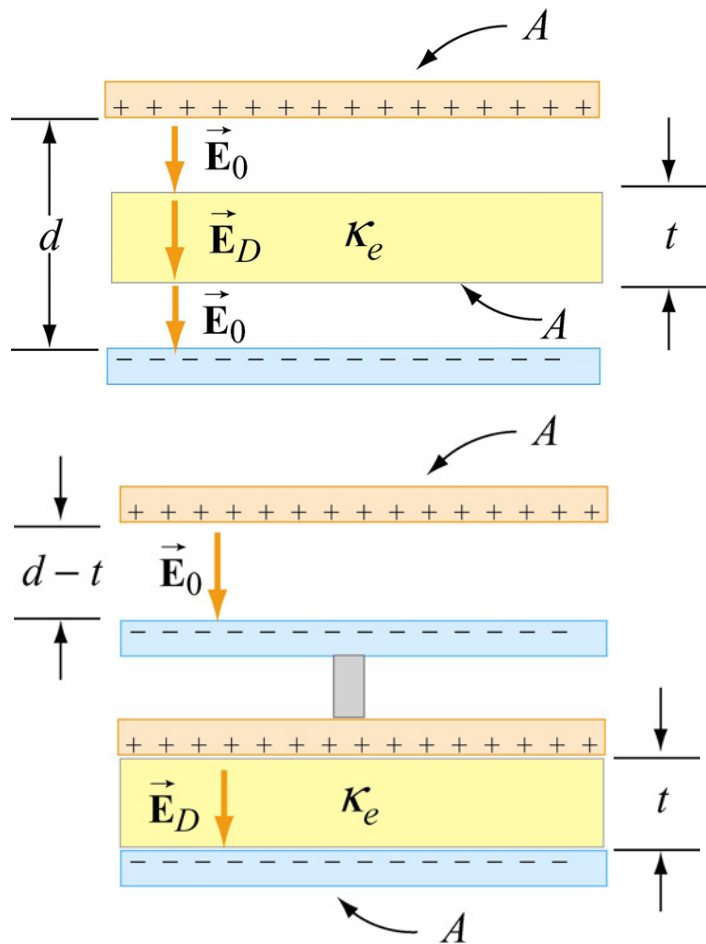
Capacitores con dieléctricos (1)



- Invirtiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d - t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (1)

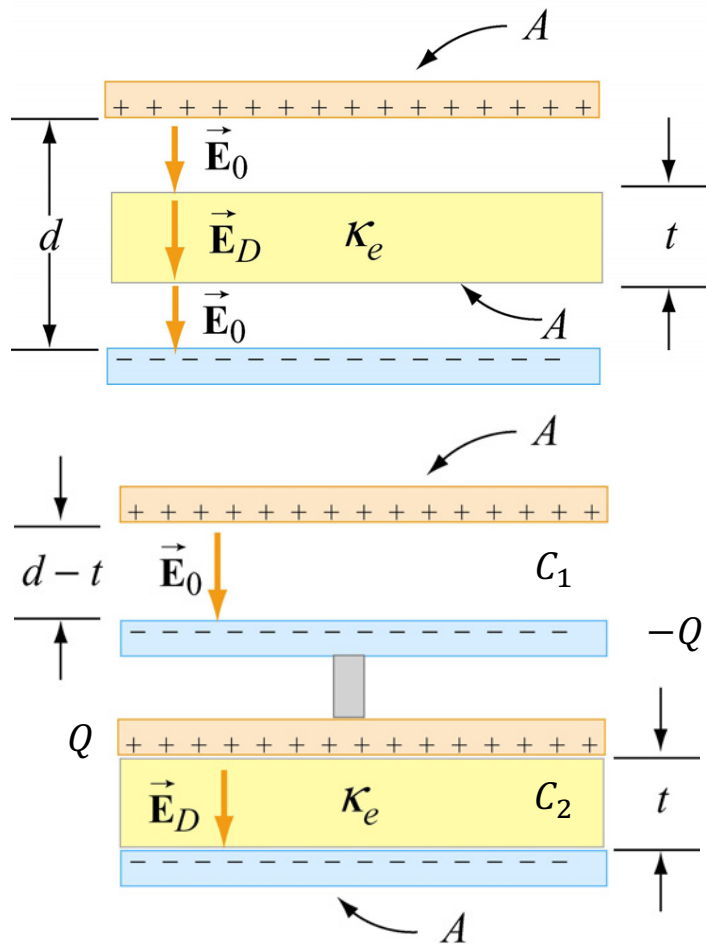


- Invirtiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d - t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

- Esto es la suma de las inversas de las capacidades de un capacitor en el vacío de espesor $d - t$ y de otro con dieléctrico de espesor t , ambos con carga Q .

Capacitores con dieléctricos (1)



- En otras palabras:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

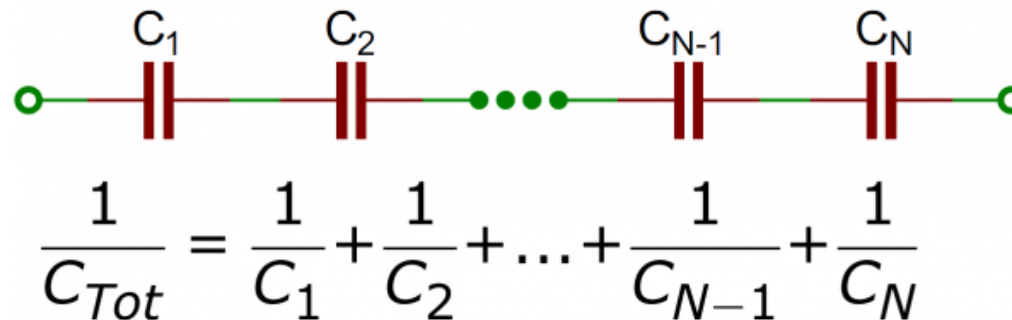
- Los capacitores tienen un conductor en común que es un equipotencial, de un lado tiene carga Q del otro $-Q$.
- Esta configuración se denomina '*en serie*'

Capacitores en serie

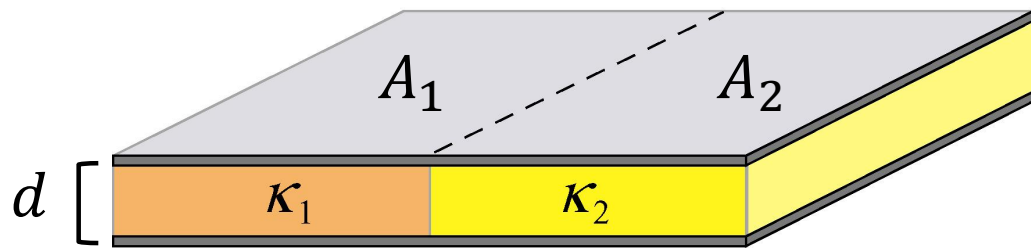
- El resultado anterior:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Puede extenderse a los capacitores en el vacío trivialmente ($\kappa_e = 1$) y a un número arbitrario de capacitores en serie.

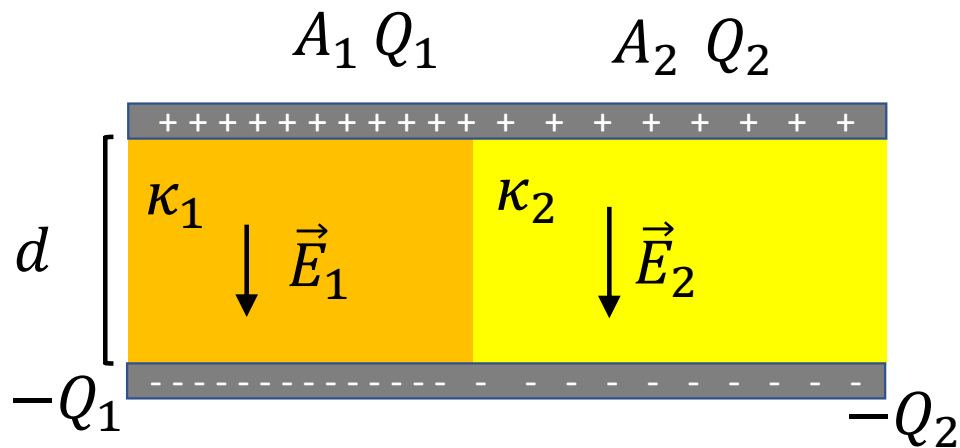


Capacitores con dieléctricos (2)



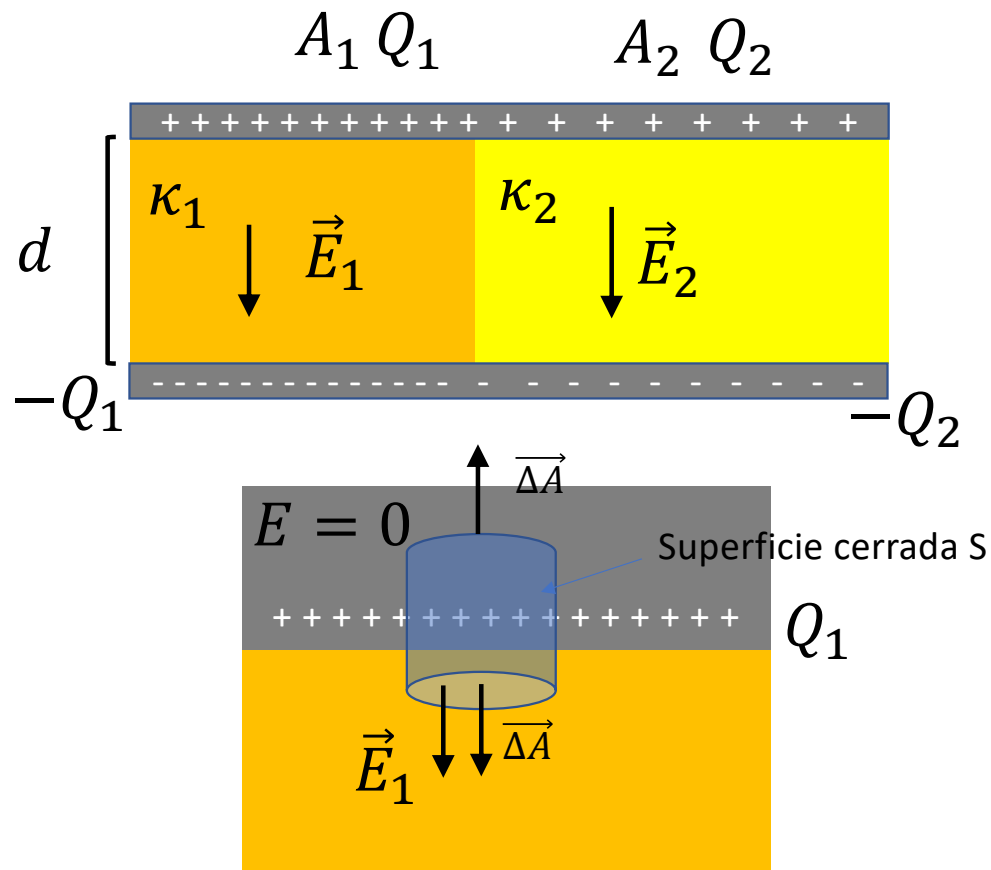
- Supongamos ahora un capacitor de área A y espesor d pequeño con carga Q , y diferencia de potencial ΔV .
- Se llena todo el espacio entre placas con dos dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2 de áreas $A_1 + A_2 = A$.

Capacitores con dieléctricos (2)



- La superficie de cada conductor es una equipotencial.
- Por lo tanto la diferencia de potencial para cada dieléctrico es la misma
- Vamos a permitir que la carga total en cada placa se redistribuya sobre cada dieléctrico $Q = Q_1 + Q_2$.

Capacitores con dieléctricos (2)



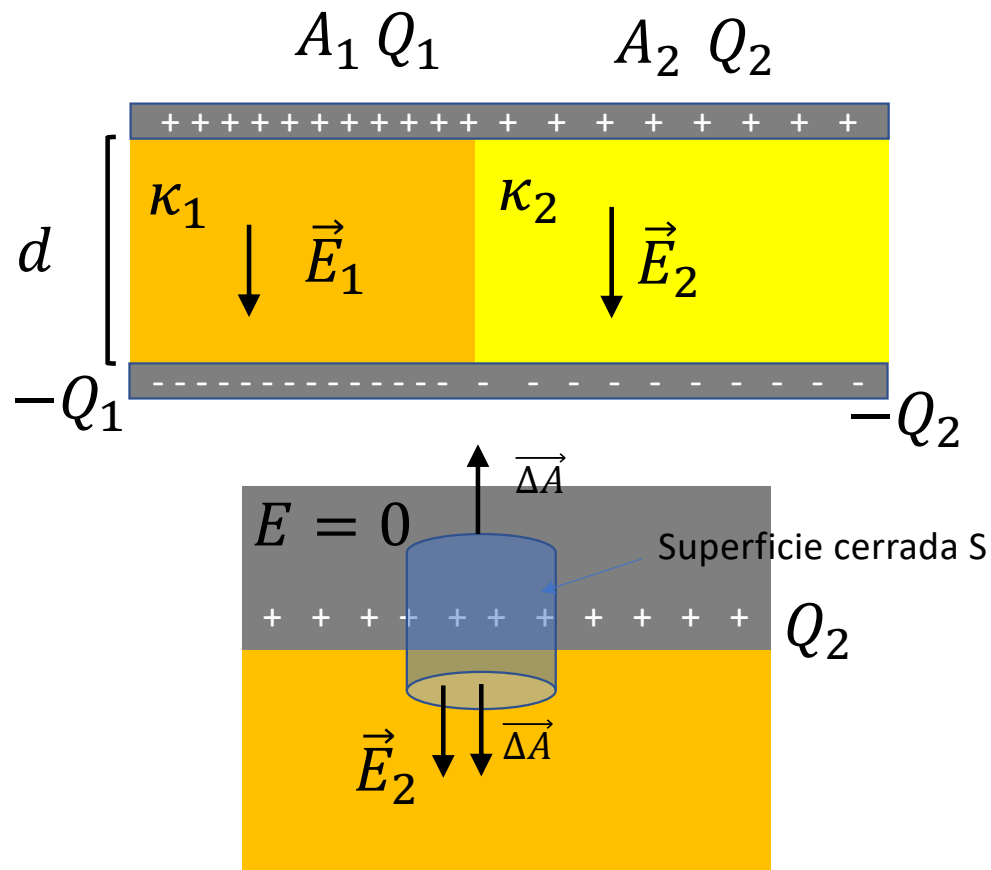
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \text{carga libre encerrada}$$

$$\kappa_1 \epsilon_0 E_1 \Delta A = \frac{Q_1}{A_1} \Delta A$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



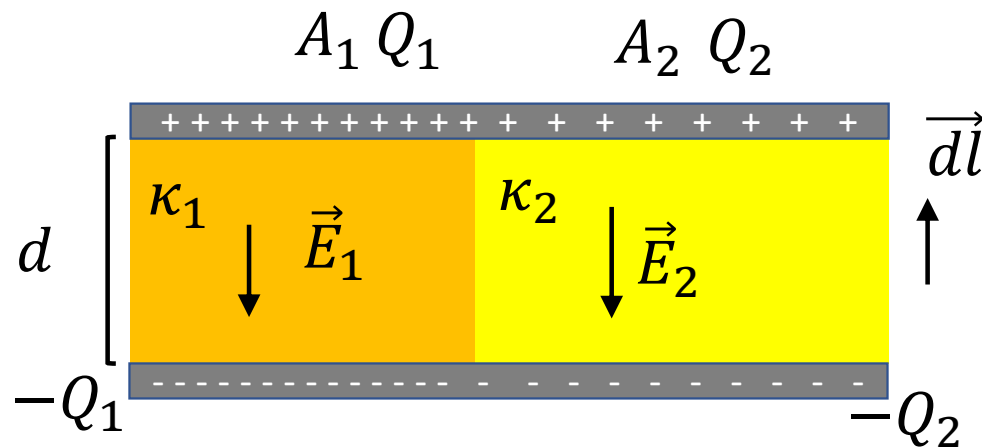
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \text{carga libre encerrada}$$

$$\kappa_2 \epsilon_0 E_2 \Delta A = \frac{Q_2}{A_2} \Delta A$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



- Como la diferencia de potencial es la misma para ambos dieléctricos

$$-\int_{-}^{+} \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} = -\int_{-}^{+} \vec{E}_2 \cdot \vec{dl}$$

$$\Delta V = E_1 d = E_2 d$$

$$\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0} = \frac{Q_2 d}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)

- De la cuenta anterior:

$$Q_2 = A_2 \kappa_2 \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1}$$

- Entonces, la capacidad total es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}}$$

- Reemplazando Q_2 tenemos

Capacitores con dieléctricos (2)

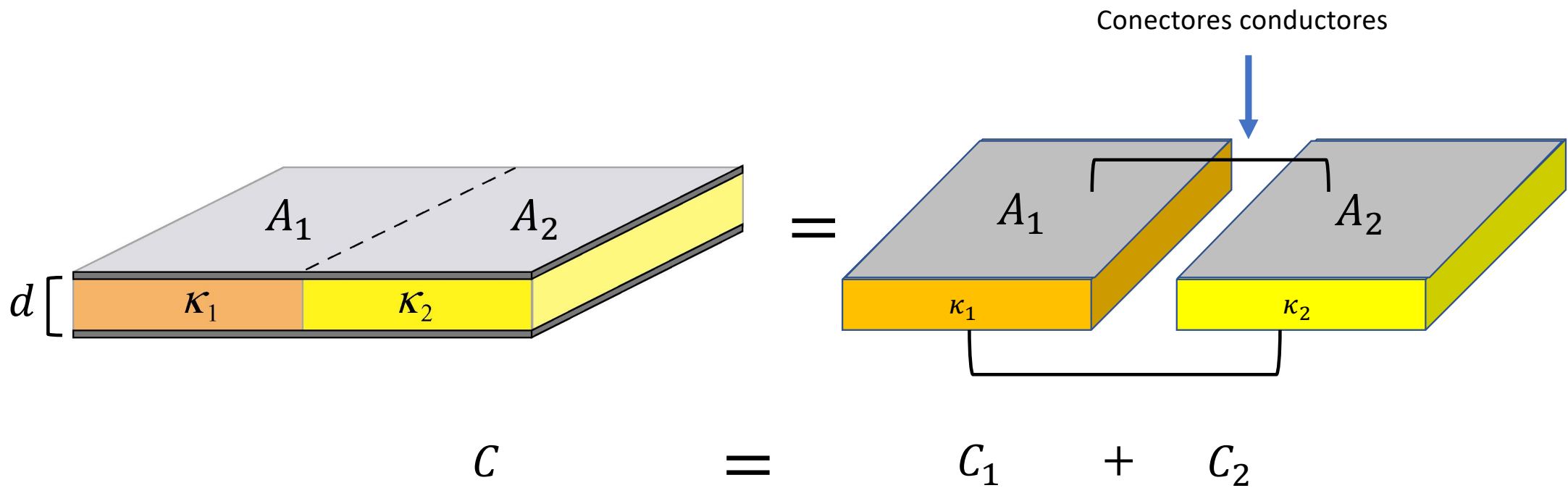
- Reemplazando Q_2 tenemos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + A_2 \kappa_2 \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1}}{\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}}$$

- Entonces

$$C = \frac{1 + A_2 \kappa_2 \frac{1}{A_1 \kappa_1}}{\frac{d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}} = \frac{A_1 \kappa_1 \epsilon_0 + A_2 \kappa_2 \frac{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}{A_1 \kappa_1}}{d} = \frac{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}{d} + \frac{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}{d}$$

Capacitores en paralelo

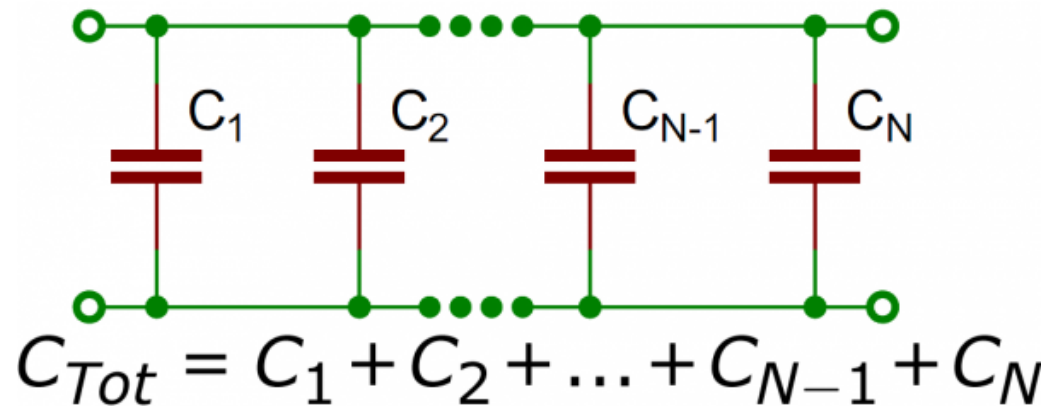


Capacitores en paralelo

- Entonces, en general, la capacidad equivalente C de dos capacitores 'en paralelo' (C_1 y C_2) tenemos:

$$C = C_1 + C_2$$

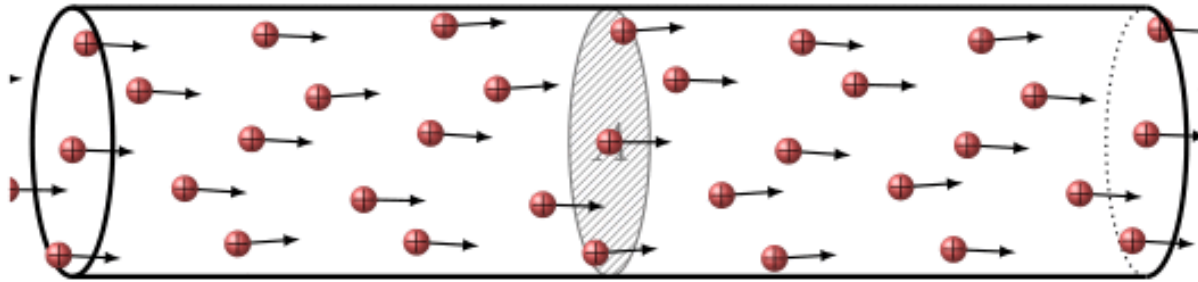
- Extendido a N capacitores



Corrientes estacionarias y circuitos

Corriente eléctrica

- Carga en movimiento



- La corriente I por un cable es la cantidad de carga que atraviesa la sección transversal en un punto fijo por unidad de tiempo.
- Se expresa en Ampères: $A = C/s$
- J es la densidad superficial de corriente $J = \frac{I}{A}$ y se expresa en A/m^2

Densidad de corriente y corriente

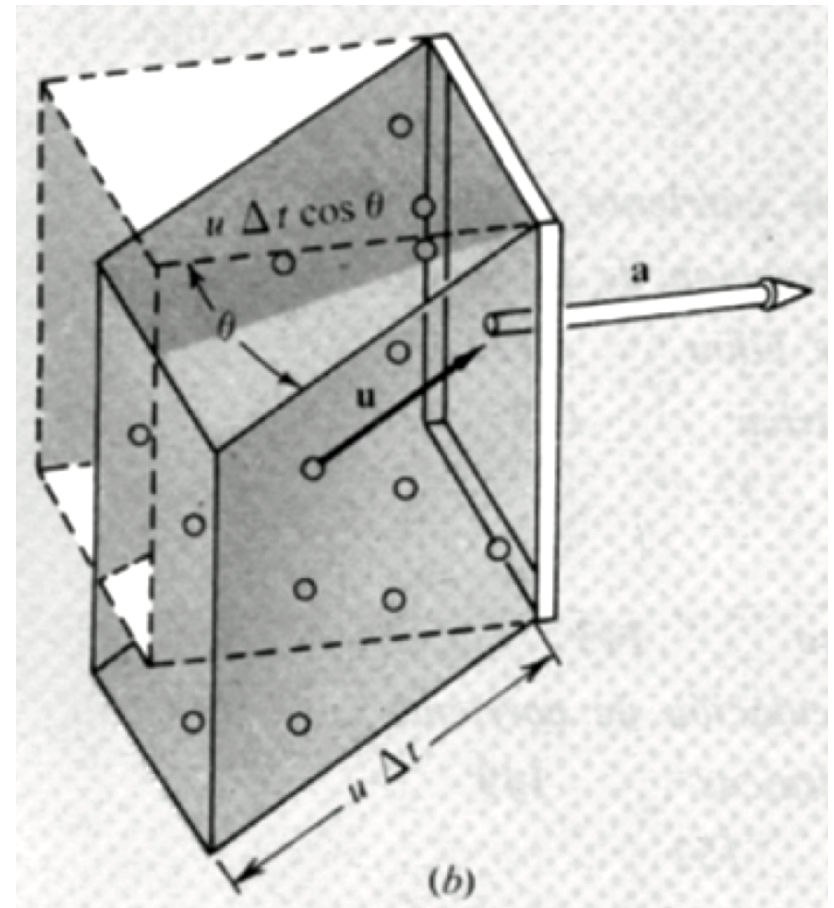
- En realidad importan las velocidades medias en una porción del espacio
- Para un portador de carga k , n_k cantidad de portadores por unidad de volumen

$$\vec{J}_k = n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle$$

- Entonces, si tengo muchas especies 'k'

$$\vec{J} = \sum_k \vec{J}_k$$

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}$$



Corriente estacionaria y conservación de la carga

- Una corriente estacionaria es aquella cuyo campo $\vec{J}$ no depende del tiempo en cada punto del espacio donde ocurre.
- Como vimos hoy, la divergencia de un campo permitía ver si había manantiales o sumideros de campo.
- El campo de densidad de corriente debe cumplir la conservación de la carga. Esta se escribe

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Esto quiere decir que el flujo saliente de cargas va a ir vaciando el diferencial de volumen de ellas, mientras que el flujo entrante contribuye a la acumulación de carga en el lugar.