I. Ondas estacionarias en una cuerda

1. Objetivo

Esta práctica tiene el propósito de estudiar **ondas estacionarias en cuerdas con sus dos extremos fijos**. Se propone medir los modos normales de vibración, determinando experimentalmente sus frecuencias características. En función de estos resultados, se busca determinar la velocidad de las ondas en términos de la tensión y la densidad de masa de la cuerda.

2. Introducción

Una onda mecánica es una perturbación que viaja por un material o una sustancia (esto es el medio de la onda) que produce que las partículas del medio sufran desplazamientos. Cuando estos desplazamientos son perpendiculares o transversales a la dirección de propagación de la onda, decimos que se trata de una *onda transversal*. En cambio, si los movimientos de las partículas del medio son hacia adelante y hacia atrás en la misma línea en que viaja la onda, decimos que se trata de una *onda longitudinal*. Para más información ver el video demostrativo: https://www.youtube.com/watch?v=-_PMqqEnr7E

Consideremos una cuerda de longitud L sujeta rígidamente en ambos extremos. Cuando se la perturba, en ella se produce una onda que se refleja una y otra vez en los extremos de la cuerda formando una onda estacionaria. La onda estacionaria y(x, t) es el resultado de la superposición de dos movimientos ondulatorios armónicos de igual amplitud y frecuencia que se propagan en sentidos opuestos a través de un medio

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t) \qquad (1)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, λ es la longitud de onda y $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular (siendo T es período de la onda). El primer término de la ec. 1 ($2A \sin(kx)$) corresponde a la **amplitud** (que depende de la posición x) y el término $\sin(\omega t)$ representa la **dependencia temporal**.

Para este caso, la onda estacionaria que resulta debe tener un nodo en ambos extremos de la cuerda. Entonces, para cualquier instante de tiempo se debe cumplir $2A \sin(0) = 0$ y $2A \sin(kL) = 0$

$$2A \sin(0) = 0 \text{ y } 2A \sin(kL) = 0 \qquad (2)$$

De esta condición se deduce que ($kL = n\pi$):

$$L = n\, \lambda /2 \text{ con } n = 1, 2, 3, ... \qquad (3)$$

Dos nodos adyacentes están separados media longitud de onda ($\lambda/2$), así que la longitud de la cuerda debe ser un número entero de medias longitudes de onda. De la ec. 3 se tienen los posibles valores de λ:

$$\lambda_n = 2L/ n \quad \text{con } n = 1, 2, 3, ... \qquad (4)$$

<u>Observación</u>: pueden existir ondas en la cuerda si la longitud de onda no cumple la ec. 4; sin embargo, no puede haber un patrón de onda estable con nodos y la **onda resultante no puede ser estacionaria**.

Para cada longitud de onda estacionaria λ_n se tiene una frecuencia de onda estacionaria f_n (sabiendo que $v = \lambda f$ donde v es la velocidad de propagación de la onda en el medio):

$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, ... \qquad (5)$$

Estas frecuencias se llaman armónicos, y el primer armónico f_1 (con n = 1) es la *frecuencia fundamental* que corresponde a la longitud de onda más grande λ_1 = 2L (ver **figura 1**).

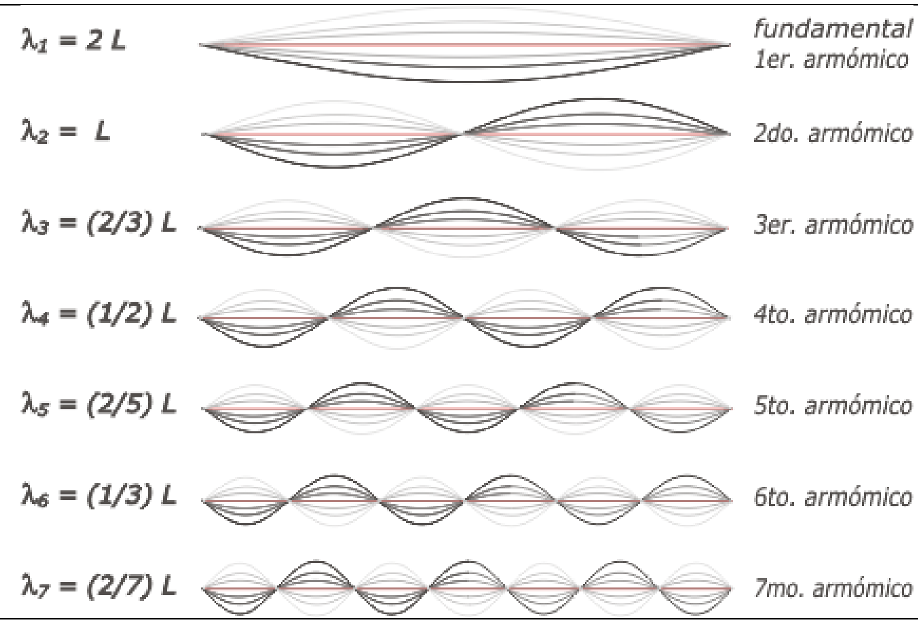

Figura 1. Representación gráfica de los modos de vibración de una cuerda con ambos extremos fijos. Se detallan hasta el 7mo armónico (https://ricuti.com.ar/no_me_salen/ondas/Ap_ond_11.html).

En una cuerda de densidad lineal μ sometida a la tensión T, la **velocidad** de propagación v de una onda viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (6)$$

Donde $\mu = m_c/L$, densidad de masa de la cuerda. Reemplazando la ec. 6 en la ec. 5 se tiene que las frecuencias para las que se observarán ondas estacionarias en una cuerda están dadas por:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (7)$$

3. Actividades

La **figura 2** muestra un esquema del dispositivo experimental utilizado en esta parte de la práctica. Una cuerda se encuentra sujeta en ambos extremos A y B separados una distancia L. La tensión T de la cuerda está determinada por el peso colgado en uno de sus extremos. Un driver mecánico (conectado a un generador de funciones) imprime a la cuerda un movimiento oscilatorio armónico a una frecuencia y amplitud controladas.

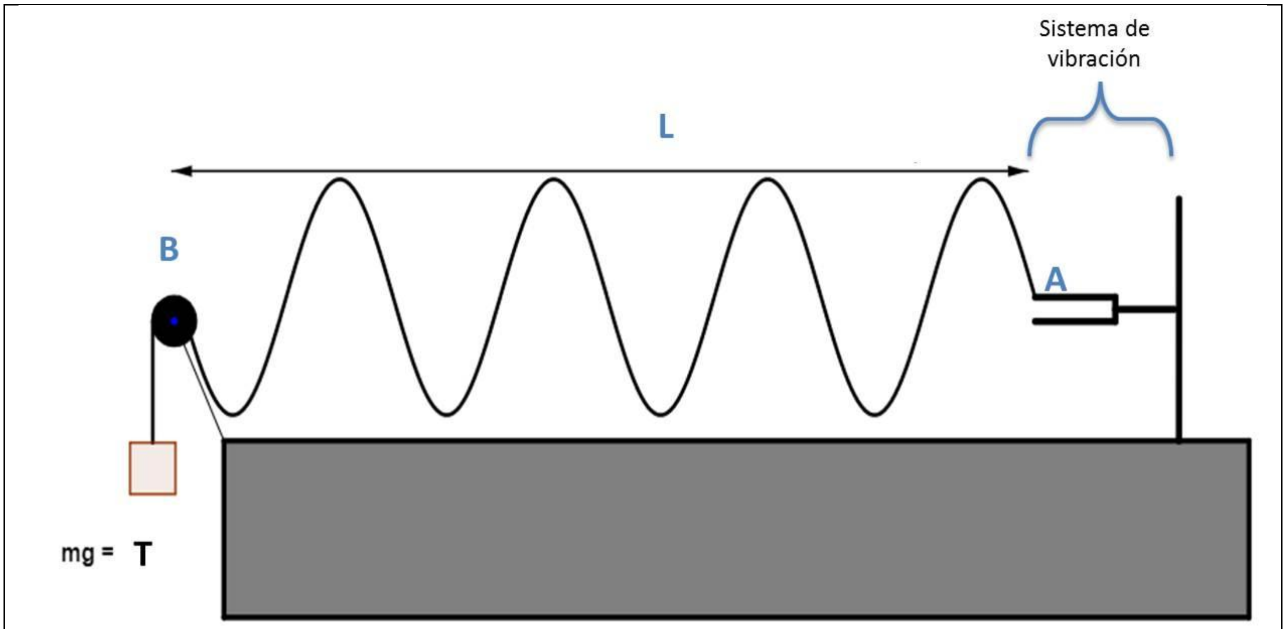

Figura 2. Esquema del dispositivo experimental utilizado para estudiar ondas estacionarias en una cuerda (https://ophysics.com/w8.html).

Parte I

- Para un valor de T y μ fijos, determinar las frecuencias f que correspondan a los **modos normales** de excitación de la cuerda. ¿Cuántos modos normales se pueden ver? Para cada modo normal determinar la longitud de onda λ.
- Graficar la **frecuencia en función de la inversa de la longitud de onda**. ¿Qué se obtiene de la pendiente del ajuste de la curva? ¿Qué se concluye a partir de sus resultados experimentales? ¿Qué tipo de onda es?

Observación: la amplitud de la cuerda tiene que ser máxima para poder determinar de forma correcta los modos normales.

Parte II: Variación de masas

- Para una cuerda dada de largo L, variar las masas m colgadas en uno de los extremos de la cuerda. Para cada valor de m empleado, determinar la velocidad, v, de la onda de la cuerda.
- En cada caso determinar el valor de T y μ y calcular la velocidad de la onda usando $v = \lambda . f$.
- Graficar v en función de $\sqrt{T/\mu}$. ¿Qué conclusión puede obtener en este caso?

II. Ondas estacionarias en sonido

1. Objetivo

Estudiar la frecuencia fundamental de resonancia en una botella para distintas alturas de columna de agua o de volumen de líquido y encontrar un modelo adecuado para describir esta dependencia.

2. Introducción

Para las ondas estacionarias en sonido en un tubo se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (1)$$

Donde c es la velocidad del sonido en el medio y p es la presión de las moléculas de aire que varía con respecto al tiempo y a la posición. La condición de contorno para un tubo semi-abierto es:

$$f_n = \frac{(2n+1)c}{4L} \quad n = 0,1,2,\dots (2)$$

Donde L es la longitud del tubo y n los modos normales de vibración. De esta forma, la frecuencia en el fundamental es: $f_0=c/4L$ (3)

La ecuación de la frecuencia fundamental de un tubo se usa para la construcción de instrumentos de viento simples, como el siku (otros instrumentos requieren modelos más complejos). [2].

En la vida cotidiana se encuentran fenómenos sonoros en los cuales la frecuencia de resonancia depende de las dimensiones del objeto vibrante. Es muy probable que al soplar por el pico de una botella se escuche un sonido. Este es un caso en el que el tono generado depende del volumen, una botella de un litro suena más grave que una botella de medio litro. Si se tuvieran botellas de distintos tamaños se podría comprobar que, en efecto, cuanto más chico es el volumen de la cavidad resonante, mayor es la frecuencia. Pero ¿cómo es esta relación? A partir de la motivación del estudio de un Tubo de Kundt [3], se podría modelar por una relación de proporcionalidad inversa. Si así fuera, la frecuencia del primer armónico estaría dada por $f_0=c/4L$, donde c es la velocidad del sonido y L la longitud del tubo/botella (ver ec. 3). El inconveniente de hacer el experimento usando distintas botellas es que la frecuencia fundamental podría depender de otras variables además del volumen ¿La forma? ¿Las dimensiones del pico? Por eso, se propone medir dos variables, el volumen y la frecuencia, de manera controlada en una misma botella, o sea, variando el volumen de aire en la botella controladamente, llenándola con agua. A medida que la columna de agua tiene mayor altura, el volumen del aire es menor, y por lo tanto, se esperaría frecuencias sonoras más altas.

3. Actividades

i. Estimación de errores

- Descargar la aplicación Spectroid para Android, o el programa Friture [4] para Windows, Linux, o Mac. La aplicación y el programa muestran el espectro de la señal de audio que recibe el micrófono. El espectro es un gráfico que muestra la intensidad correspondiente a cada frecuencia recibida. Para esta práctica, sólo importará la ubicación del máximo de intensidad, ya que corresponde a la frecuencia fundamental de la cavidad resonante.
- Calibrar el sensor (celular en el caso de usar Spectroid ó PC en el caso de Friture), reproduciendo un sonido de frecuencia conocida, para ello usar un generador de tonos [5]. Seleccionar distintas frecuencias en un intervalo, hacer mediciones y obtener una estimación del error.

ii. Medición de la frecuencia de resonancia

- Buscar una botella, preferentemente de vidrio y de pico angosto (ej: vino, cerveza, gaseosa, etc).
- Llenar la botella con distintas cantidades de agua, hacerla sonar (¿Cómo?) y registrar la frecuencia fundamental f0 con Spectroid o Friture, en cada caso.
- Medir la altura de la columna de agua (x), o el volumen del líquido, VL. Cualquiera de las dos variables va a ser una medida indirecta del volumen de aire en la cavidad, V0 ¿Qué relación siguen la variable elegida (x ó VL) y V0?
- Graficar la frecuencia de resonancia, f_0 en función de x o V_L. ¿La dependencia cualitativa es la esperada? Hacer un gráfico de $1/f_0$ en función de x o de V_L (modelo de Tubo de Kundt semiabierto, ec. 3).

Se propone un modelo alternativo, el del Resonador Helmholtz [2,6] (ver **Figura 3**).

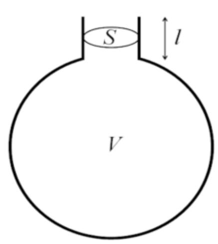

Figura 3: Un resonador de Helmholtz es una cavidad con un pico.

Según este modelo, la frecuencia fundamental para una cavidad con volumen V, que tiene un pico cilíndrico de área transversal S y longitud l viene dado por:

$$f_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{l.(V_0 - V_L)}} \quad (4) \qquad \text{ó} \qquad f_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{l.(L_0 - x)A}} \quad (5)$$

Donde V= V_0-V_L, y V_0 es el volumen del aire y V_L es el volumen del líquido dentro de la botella en la ec (4). Además, V= L.A (cavidad aproximada cilíndrica), donde L es el largo de la cavidad y A es el área de la base. El largo es variable porque depende de la altura de la columna de agua, x. Llamando L_0 al largo inicial de la cavidad, al introducir una columna de agua, la longitud de la cavidad resonante es L(x)= L_0-x (ver ec. 5)

- Realizar un gráfico de $1/f_0^2$ en función de V_L ó x según la variable elegida en el ítem anterior. Para ello utilice la ecuación 4 ó 5, respectivamente, despejando la variable a graficar
- ¿Considera que la botella se puede modelar como un resonador de Helmholtz? Comparar con el modelo de Tubo de Kundt (se puede usar un gráfico de residuos para justificar la elección del modelo).
- Analizar si se puede obtener la velocidad del sonido con los ajustes realizados y comparar con un valor de tabla.
- ¿Qué pasa si en vez de soplar por el pico de la botella medimos la frecuencia al golpearla?
- Usando un objeto duro (una cuchara, una lapicera, etc) medir la "frecuencia de golpe" f_G. Graficar f_G. vs x o V_L y comparar con los resultados obtenidos para el soplido (puede representarse en un mismo gráfico de doble eje). Interpretar el resultado ¿qué está oscilando en cada caso? ¿qué cambia al llenar la botella con agua?

Referencias

[1] Nursulistito, E. "Learning Natural Frecuency and Resonance using Wasted Water Bottle", Conference Paper, 2019.

[2] Fletcher, N. and Rossing, T., "The Physcis of Musical Instruments", Ed: Springer-Verlag (1991). Pag. 13, 54, 142 y 153.

[3] http://materias.df.uba.ar/f2qa2020c2/files/2019/07/Clase-07_ondas-estacionarias-2do-cuatri.pdf

[4] Analizador de espectro para PC: http://friture.org/download.html y para celular: https://play.google.com/store/apps/details?id=org.intoorbit.spectrum&hl=es_AR&gl=US

[5] Generador de tonos: https://www.szynalski.com/tone-generator/

[6] Resonador Helmholtz: https://newt.phys.unsw.edu.au/jw/Helmholtz.html