

Ley de Gauss

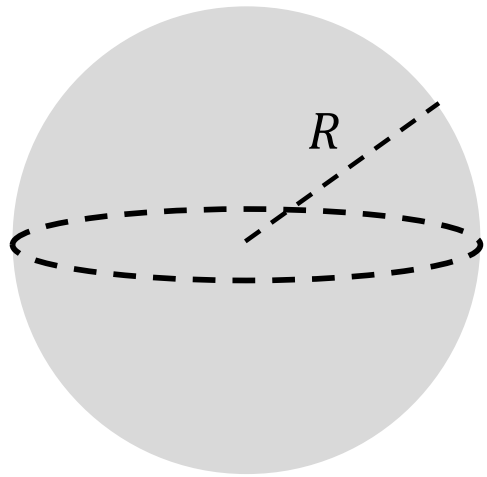


Carl Friederich Gauss
(1777-1855)

*Se verifica que en general, **para toda superficie cerrada** S que encierra un volumen V , El flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de S es proporcional a la carga total encerrada*

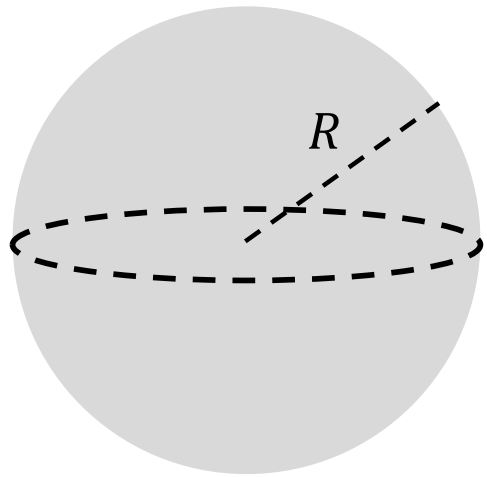
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv$$

Campo de una distribución esférica de carga



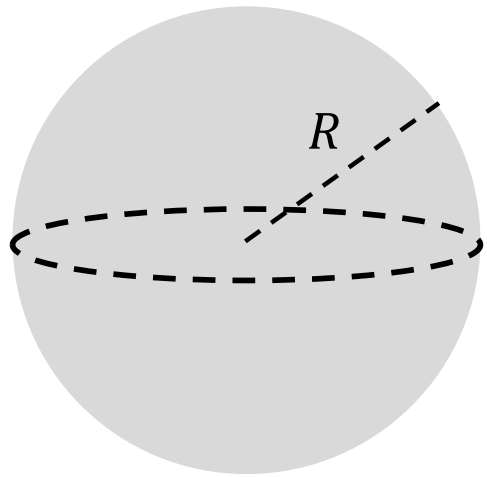
- Supongamos una distribución de carga ρ uniforme, de forma esférica de radio R .
- Calculemos el campo en todo el espacio aprovechando la Ley de Gauss y la simetría del sistema.

Campo de una distribución esférica de carga



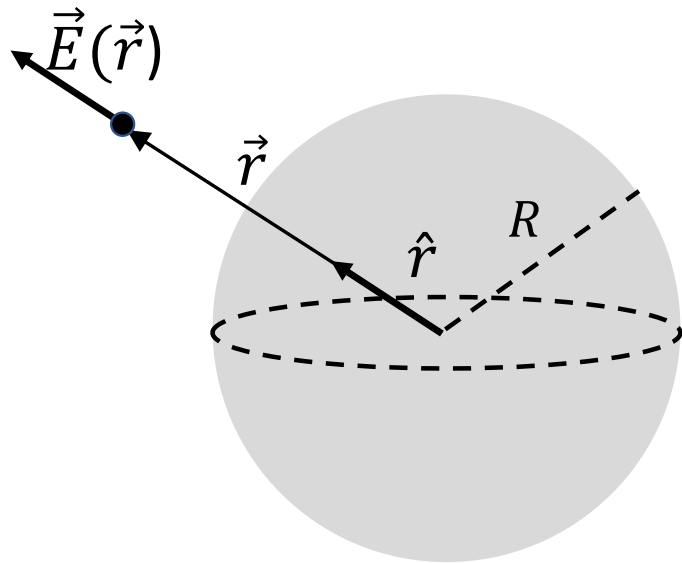
- Si colocamos nuestro SC en el centro de la esfera, el sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).

Campo de una distribución esférica de carga



- Si colocamos nuestro SC en el centro de la esfera, el sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).
- El campo debe ser radial y depender sólo de la distancia r .

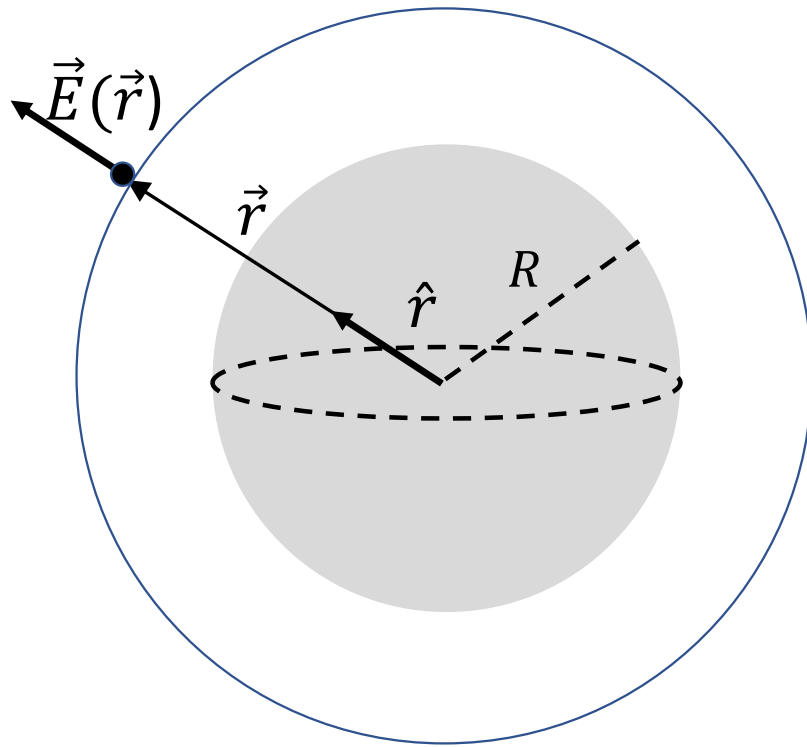
Campo de una distribución esférica de carga



- Si colocamos nuestro SC en el centro de la esfera, el sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).
- El campo en un punto cualquiera $\vec{r}$ debe ser radial y depender sólo de la distancia $r = |\vec{r}|$.

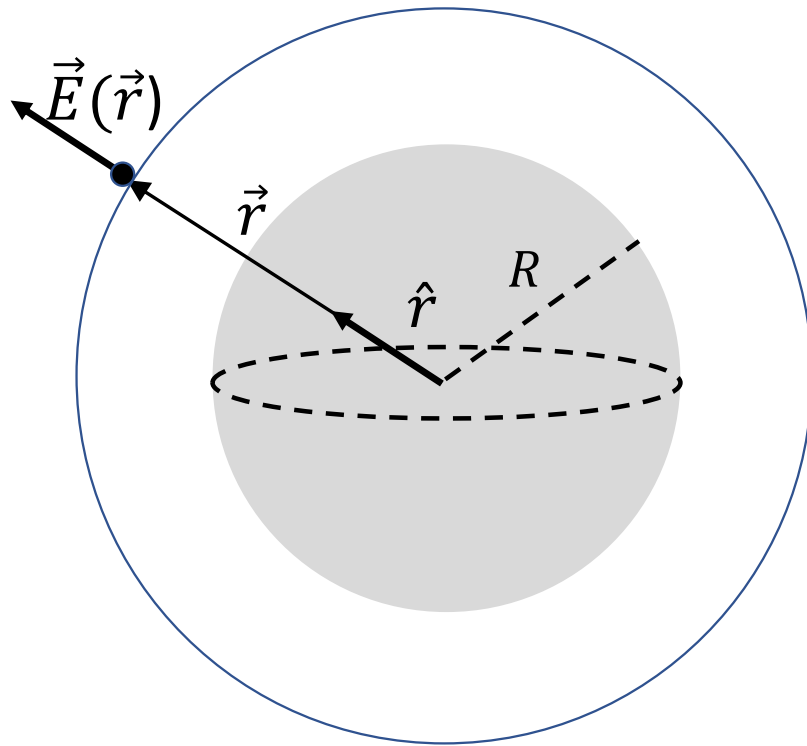
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Sobre cualquier esfera de radio r centrada en el origen el módulo de E vale siempre lo mismo.

Campo de una distribución esférica de carga

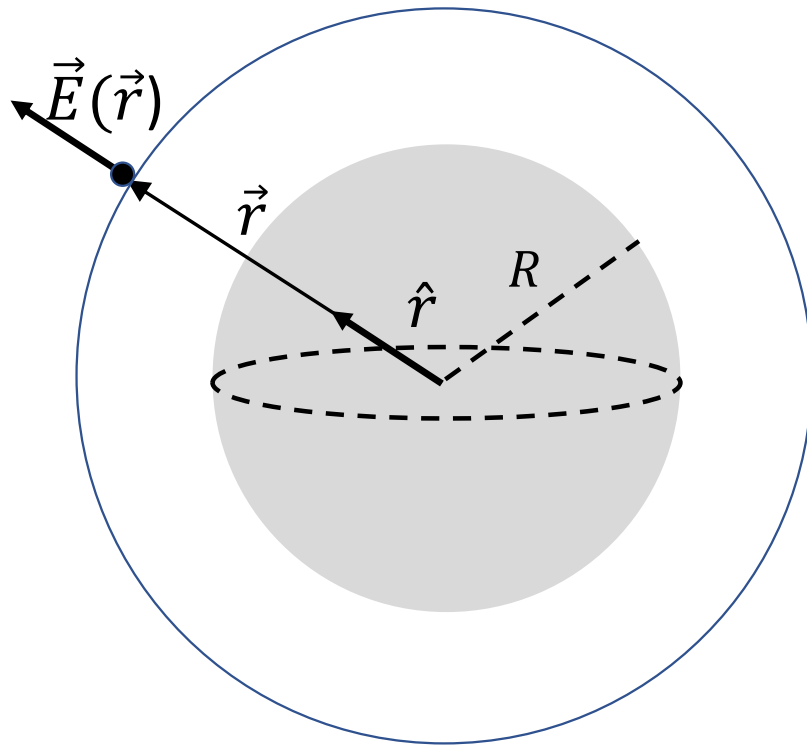


- Sobre cualquier esfera de radio r centrada en el origen el módulo de E vale siempre lo mismo.

- Si $r > R$ el flujo es:

$$\Phi = \int_{S(r)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = E(r) \int_{S(r)} \hat{r} \cdot \hat{r} ds = 4\pi r^2 E(r)$$

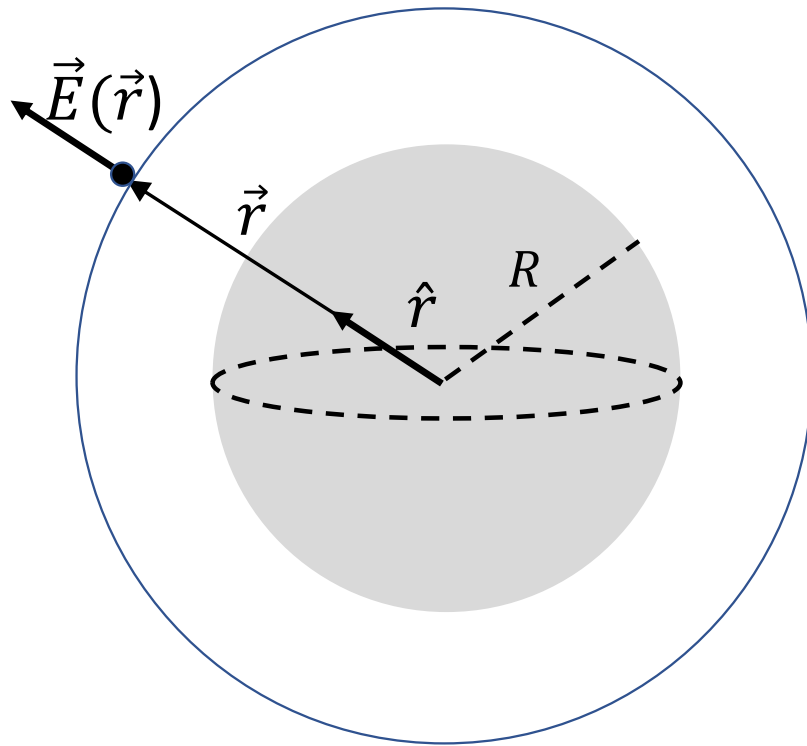
Campo de una distribución esférica de carga



- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{\text{carga encerrada por } S(r)}{\epsilon_0}$$

Campo de una distribución esférica de carga



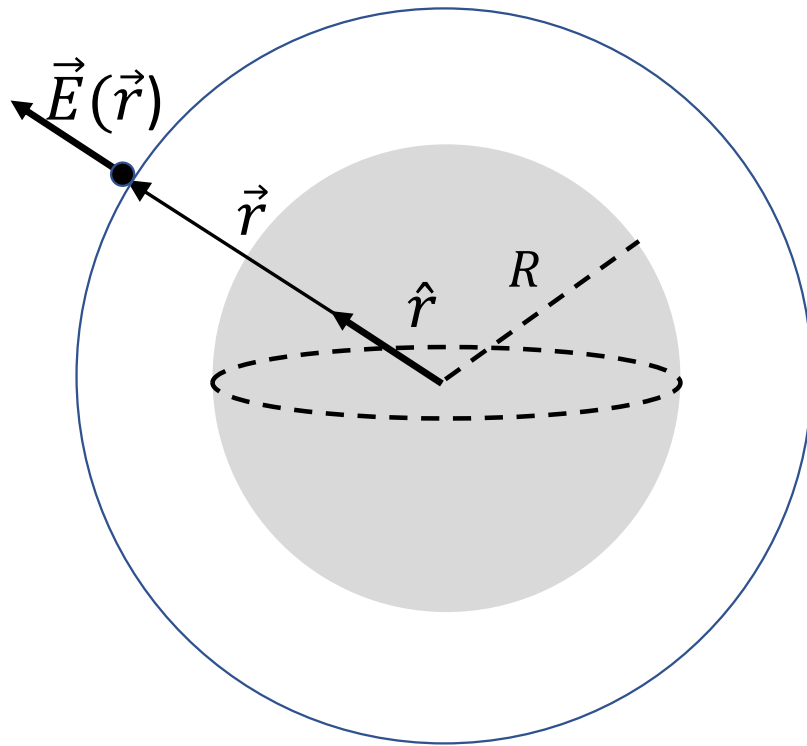
- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{\text{carga encerrada por } S(r)}{\epsilon_0}$$

- Como la densidad es uniforme:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Campo de una distribución esférica de carga



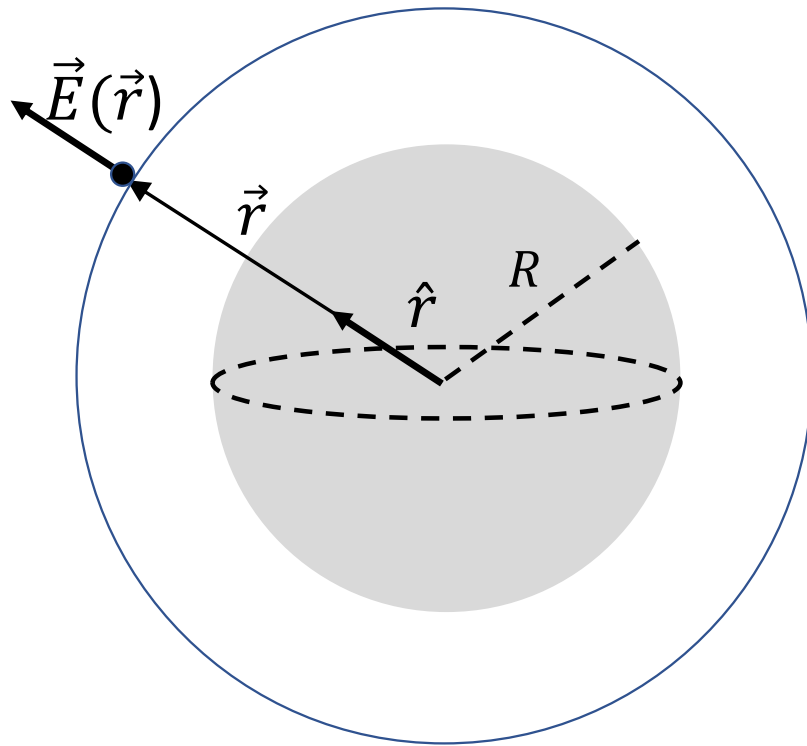
- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{\text{carga encerrada por } S(r)}{\epsilon_0}$$

- Como la densidad es uniforme:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\text{Carga total}}{\epsilon_0}$$

Campo de una distribución esférica de carga



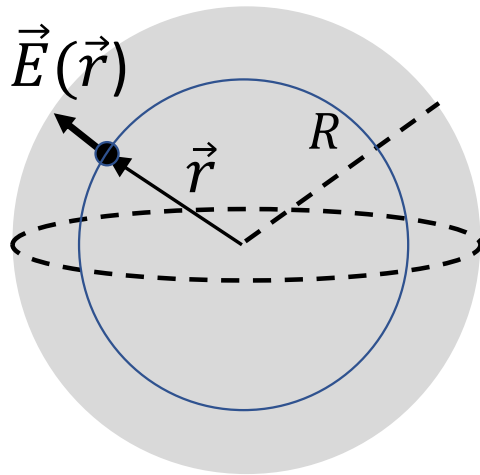
- Entonces, para $r > R$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{Carga total}}{r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{Carga total}}{r^2} \hat{r}$$

Es como si toda la carga estuviese en el origen

Campo de una distribución esférica de carga

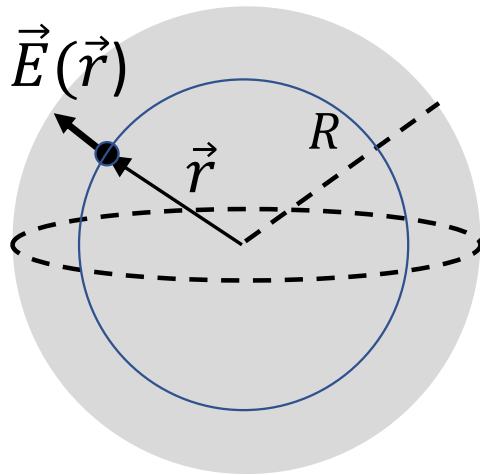


- Para $r > R$ aplicamos un razonamiento similar.
- Por ley de Gauss:
$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\text{carga encerrada por } S(r)}{\epsilon_0}$$
- Esta vez, la carga encerrada es menor a la total y queda:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Campo de una distribución esférica de carga

- Para $r > R$ entonces:



$$E(r) = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r$$

- Lo cual nos dice que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r \hat{r}$$

Crece linealmente con la distancia

Pregunta

- ¿Cuánto vale $\vec{E}(R)$?
- Graficar $E(r)$ vs r

Momentos de una distribución de carga

El potencial lejos de una distribución

- Volvamos al caso de un disco uniformemente cargado. El potencial a lo largo del eje de simetría daba:

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + a^2} - |y| \right]$$

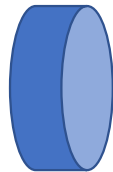
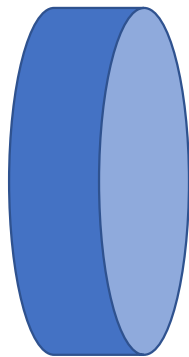
- Nos interesa saber a qué se parece el potencial a distancias grandes. Para $|y| \gg a$ podemos aproximar por serie de Taylor el término:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + a^2} - y &= y \left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1 \right] \\ &= y \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{y^2} \right) \dots - 1 \right] \approx \frac{a^2}{2y} \end{aligned}$$

El potencial lejos de una distribución

- Reemplazando la aproximación, tenemos

$$\varphi(0,y,0) \approx \frac{a^2\sigma}{4\epsilon_0 y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y} \text{ para } y \gg a$$



$$q = \sigma\pi a^2$$



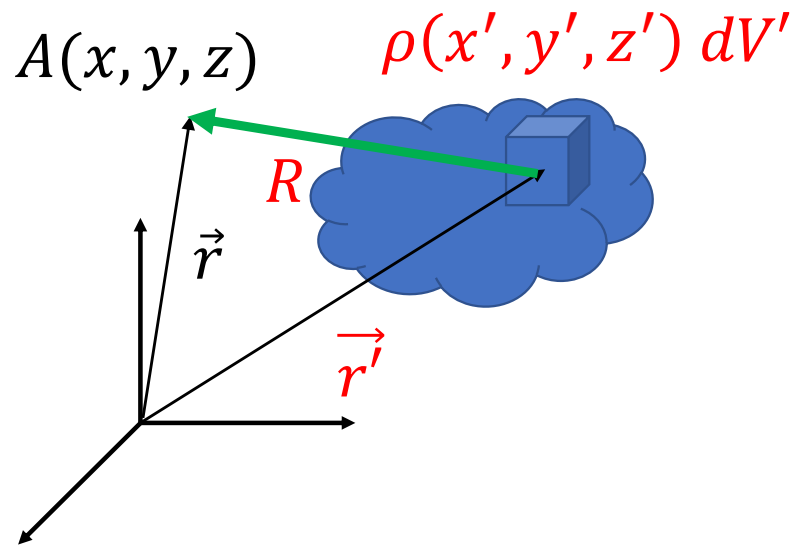
De lejos sólo se ve
una carga puntual

Momentos de una distribución de carga

- Un átomo o molécula consta de cargas en disposiciones complejas en volúmenes del orden de 10^{-24} cm.
- ¿Qué aspectos de la estructura de la carga son los más importantes cuando vemos el potencial/campo a grandes distancias de las distribuciones de carga?

Momentos de una distribución de carga

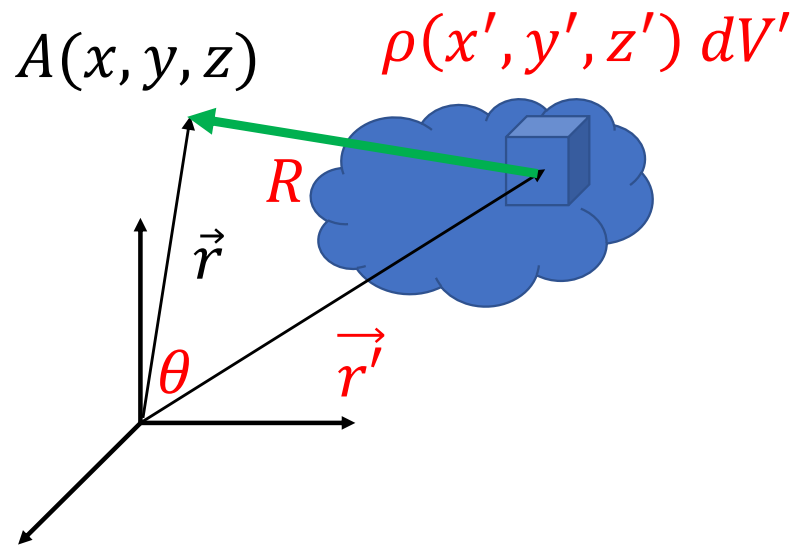
- Supongamos una distribución de cargas acotada $\rho(x', y', z')$ un punto A exterior a ρ .



$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dV'}{R}$$

- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

Momentos de una distribución de carga



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

- Supongamos una distribución de cargas acotada $\rho(x', y', z')$ un punto A exterior a ρ .

$$\varphi_A(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dV'}{R}$$

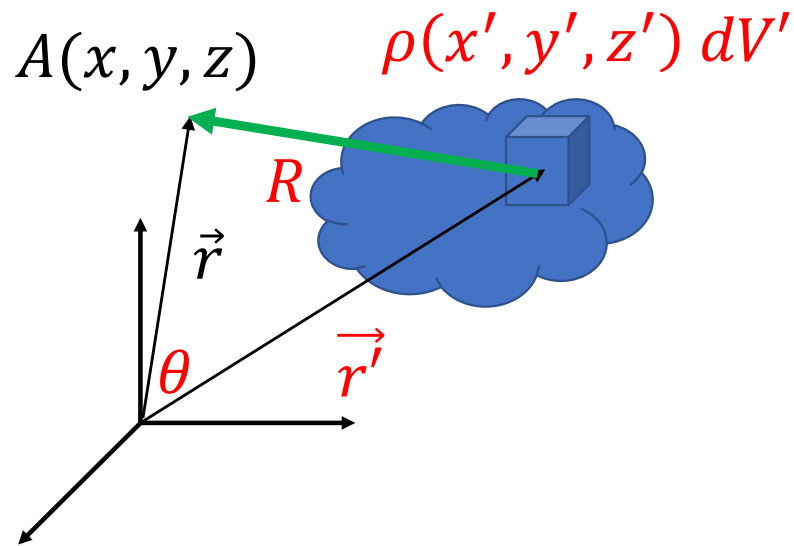
- Expresamos R en función de las distancias r y r' desde el origen del sistema de coordenadas. Por el teorema del coseno

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{1/2}$$

Momentos de una distribución de carga

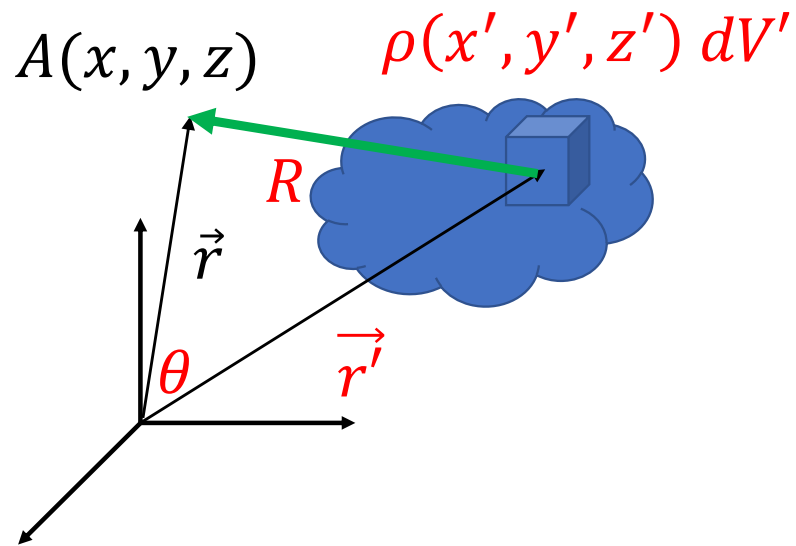
- La idea es ver qué pasa cuando $r \gg r'$.
Veamos un poco el factor $1/R$:

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2}$$



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

Momentos de una distribución de carga



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

- La idea es ver qué pasa cuando $r \gg r'$.
Veamos un poco el factor $1/R$:

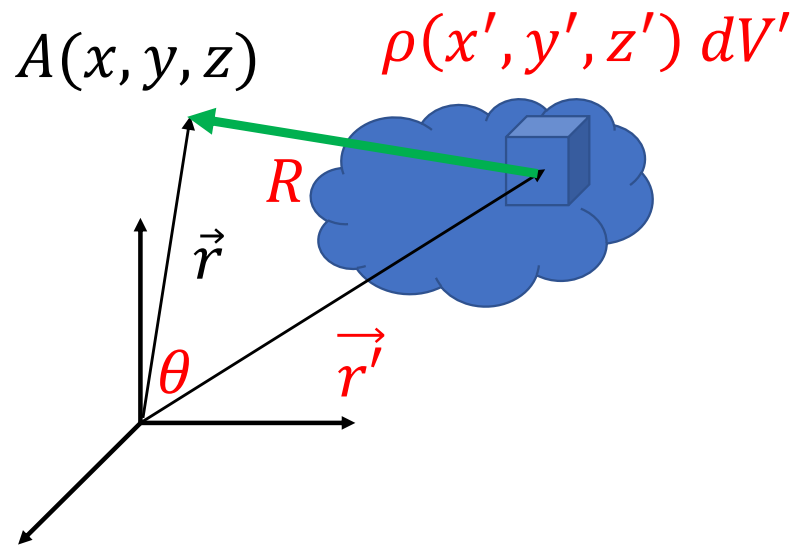
$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2}$$

- Podemos hacer el desarrollo en Taylor de $1/R$ para $r'/r \ll 1$. Tomando el desarrollo

$$(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 \dots$$

para $\delta \ll 1$

Momentos de una distribución de carga



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

- Tomando esta expansión el factor $1/R$ queda:

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \left(\begin{array}{c} \text{términos de} \\ \text{grado superior} \end{array} \right) \right]$$

más grande >>>>>>>>> más chico

- Entonces, reemplazando en $\varphi_A(x, y, z)$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{1}{r} \int \rho dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta \rho dv'}_{K_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{1}{r^3} \int r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho dv'}_{K_2} + \dots$$

Momentos de una distribución de carga

- Entonces $\varphi_A(x, y, z)$ lejos de la distribución puede escribirse como una serie de términos de importancia decreciente (fijarse el exponente de $1/r$)

$$\begin{aligned}\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho \, dv'}_{K_0} &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{\int r' \cos \theta \, \rho \, dv'}_{K_1} \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho \, dv'}_{K_2} + \dots\end{aligned}$$

- La clave es calcular los coeficientes K_0 , K_1 , K_2 , etc. Cada término se denomina momento.

Momentos de una distribución de carga

- Entonces $\varphi_A(x, y, z)$ lejos de la distribución puede escribirse como una serie de términos de importancia decreciente (fijarse el exponente de $1/r$)

$$\varphi_A = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho \, dv'}_{K_0} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta \, \rho \, dv'}_{K_1} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho \, dv'}_{K_2} + \dots$$

- La clave es calcular los coeficientes K_0, K_1, K_2 , etc. Cada término se denomina momento.

Momentos de una distribución de carga

- ¿Hace falta calcular todos los K_i ?
- No! El comportamiento del potencial a grandes distancias de la fuente estará determinado por el **primer término no nulo** de la serie:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right]$$

Los coeficientes K_0 y K_1

- $K_0 = \int \rho \, dv'$ es simplemente la carga total de la distribución (da cero para moléculas y átomos neutros)
- ¿Cuánto vale K_0 para en cada una de estas distribuciones ?

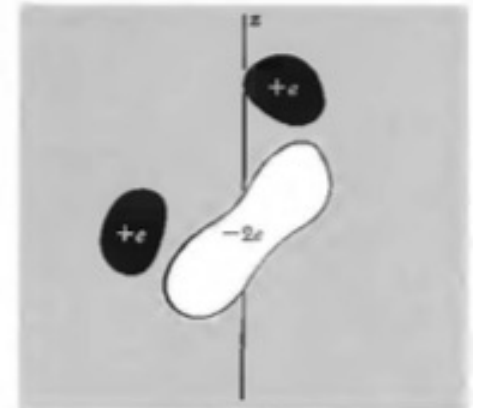
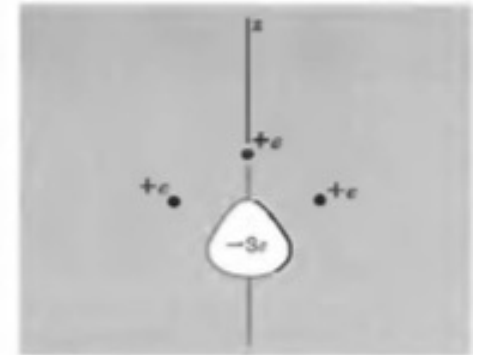
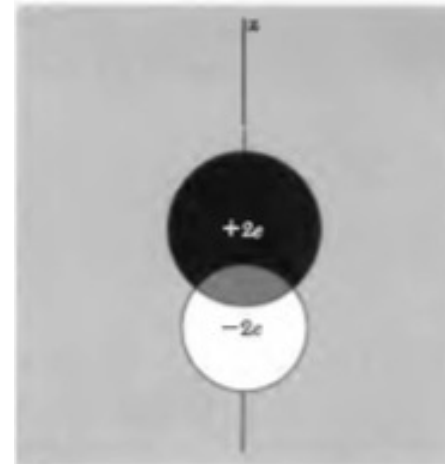


FIGURE 10.4
Some charge distributions with $K_0 = 0$, $K_1 \neq 0$. That is, each has net charge zero, but nonzero dipole moment.

Los coeficientes K_0 y K_1

- Si $K_0 = 0$, calcularemos $K_1 = \int r' \cos \theta \rho dv'$

- Para simplificar esta expresión consideremos el vector

$$\vec{p} = \int \vec{r'} \rho(x', y', z') dv' \quad \text{Momento dipolar}$$

- Usando $\vec{p}$, tenemos: $\hat{r} \cdot \vec{p} = \hat{r} \cdot \int \vec{r'} \rho(x', y', z') dv' = \int \hat{r} \cdot \vec{r'} \rho(x', y', z') dv' = \int r' \cos \theta \rho(x', y', z') dv' = K_1$

- Por lo tanto: $K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p}$

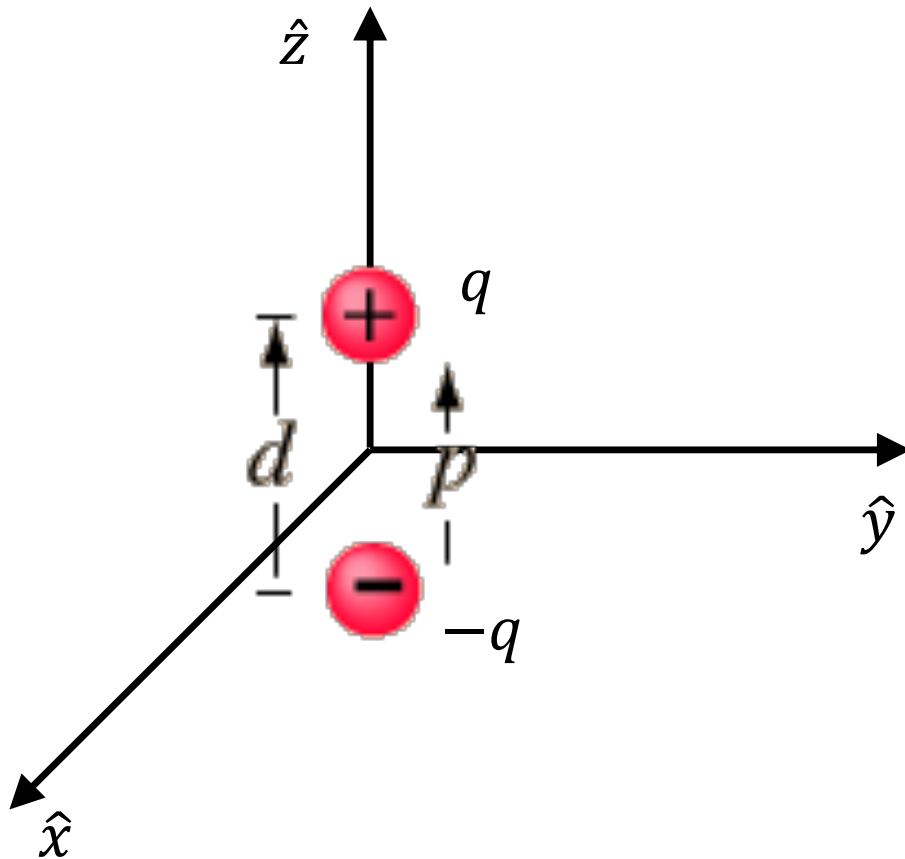
Los coeficientes K_0 y K_1

- Resumiendo, para un punto A en dirección $\hat{r}$ y a una distancia r de una distribución acotada $\rho(x', y', z')$, el potencial viene dado por:

$$\varphi_A = \frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots$$

- Donde $Q = K_0 = \int \rho \, dv'$ y $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(x', y', z') \, dv'$

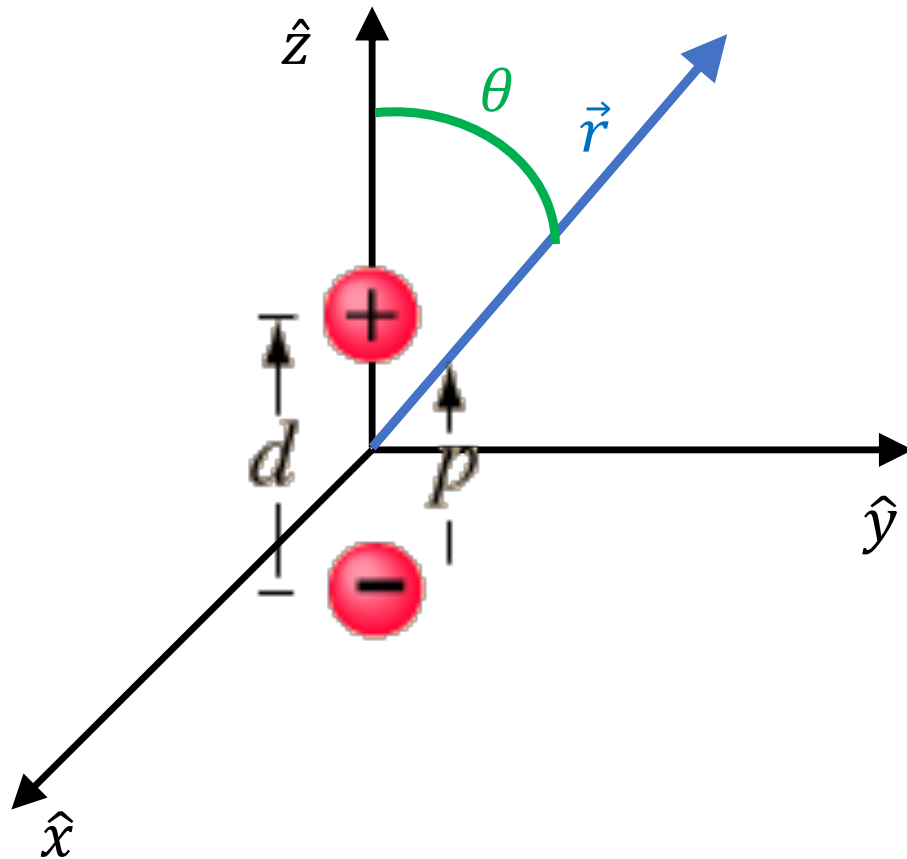
Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Dos cargas puntuales $\pm q$ en $z = \mp \frac{d}{2}$
- $K_0 = 0$
- Veamos K_1 . Para cargas puntuales

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i q_i$$

Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Centro del SC equidistante de las cargas:

$$\vec{p} = \frac{d}{2} q \hat{z} + \left(-\frac{d}{2}\right) (-q) \hat{z} = qd \hat{z}$$

- Por lo tanto

$$K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p} = qd \cos \theta$$

- Y entonces, lejos del dipolo

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}$$

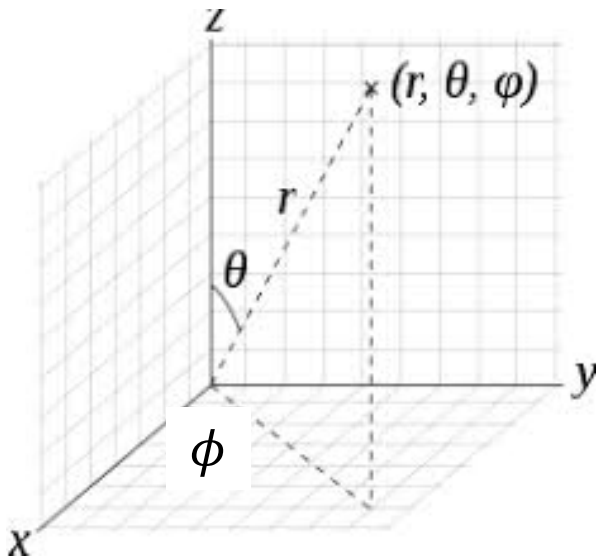
Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

- Calculemos el campo $\vec{E}$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

- Podemos hacer el cálculo del campo en esféricas.

- El gradiente en esféricas es:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\varphi}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} \hat{\theta}$$



Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

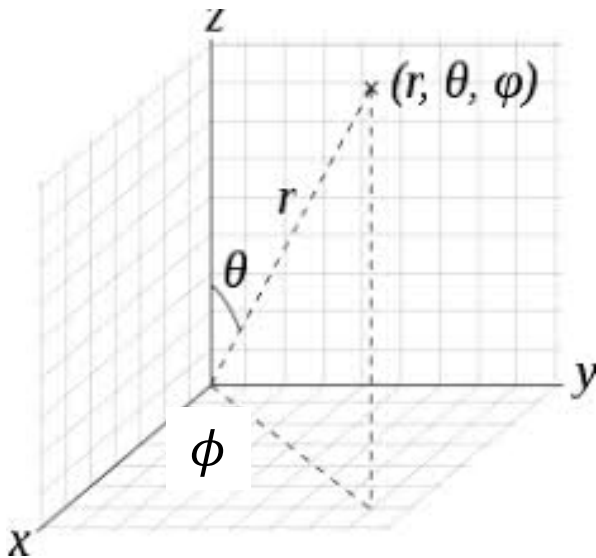
- Usando

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

- El campo en esféricas es:

$$\vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}$$

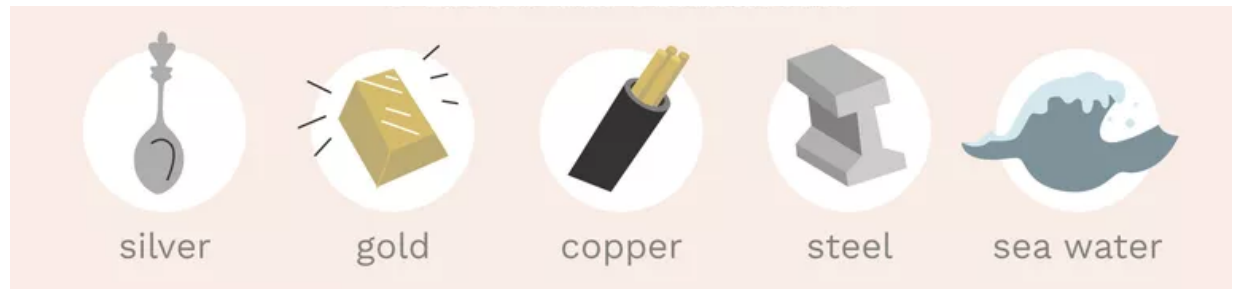
- Poloidal, decae como r^{-3}



Conductores y Dielectricos

Tipos de materiales eléctricos

- Conductores: Alta movilidad de portadores de carga (electrones y protones). Las cargas sobre ellos se pueden mover libremente.



- Aislantes: baja movilidad de portadores de carga. Las cargas no se mueven a través de ellos

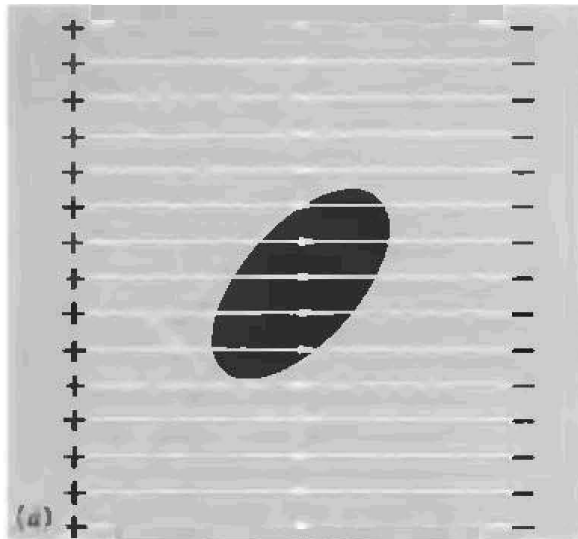


Conductores en electrostática

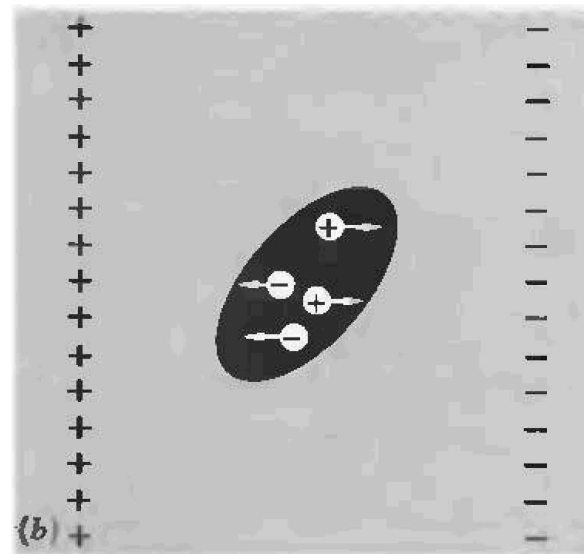
- Las cargas pueden reacomodarse libremente en un conductor.
- Este reacomodamiento se realiza de acuerdo a ciertas reglas.
- En electrostática, vamos a considerar las propiedades de los conductores una vez que se haya alcanzado el estado estacionario (es decir, cuando las cargas ya se hayan acomodado).

Aislantes y conductores en campo externo

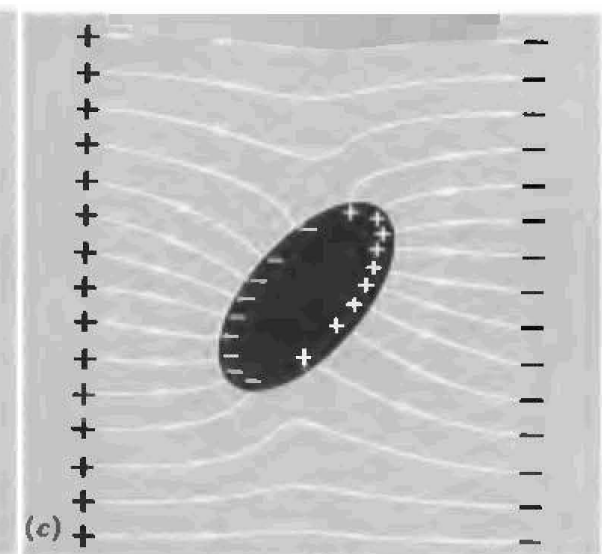
Aislante: el campo en el interior es prácticamente el del exterior



Conductor: las cargas se van a la superficie y dejan campo nulo en el interior



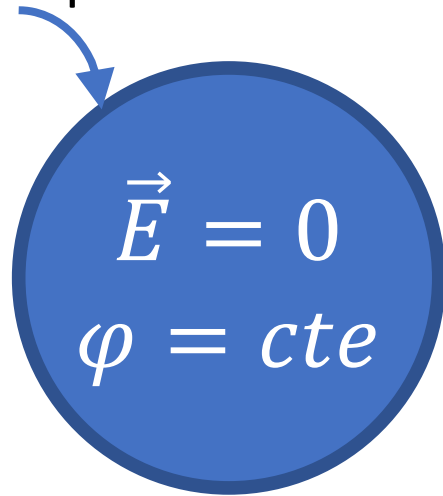
Transitorio



Estacionario

Propiedades de los conductores

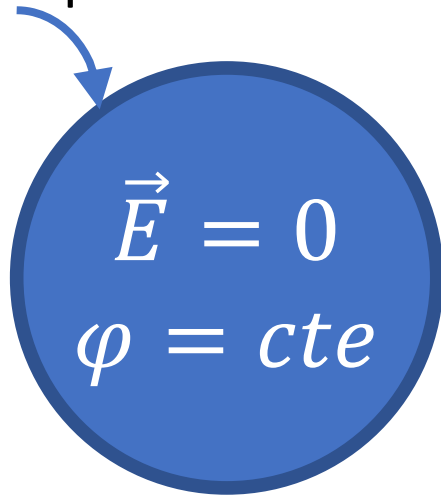
Cargas en la superficie



- La idea de que todas las cargas van hacia la superficie y que en el interior el campo es nulo es la correcta si se tiene en cuenta que no existe otro tipo fuerza que mueva las cargas.
- Las cargas se mueven hasta llegar al borde del conductor del que no pueden salir

Propiedades de los conductores

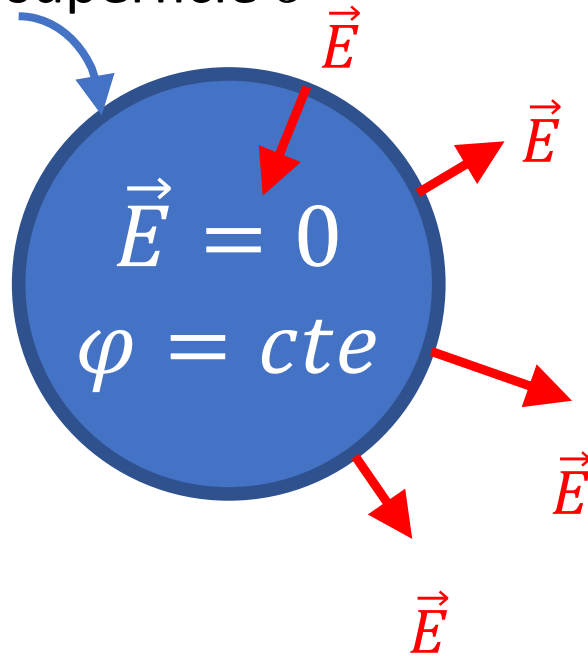
Cargas en la superficie σ



- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el potencial ahí es constante al igual que en su superficie.

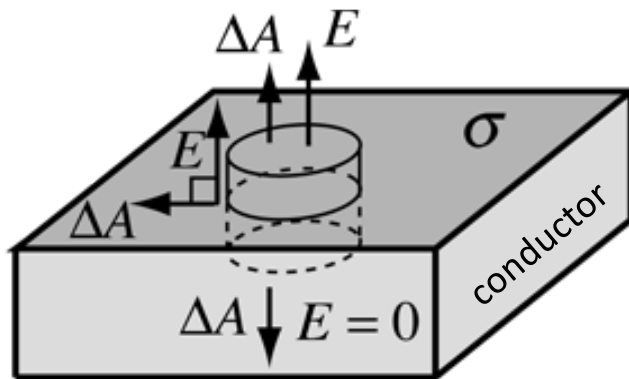
Propiedades de los conductores

Cargas en la superficie σ



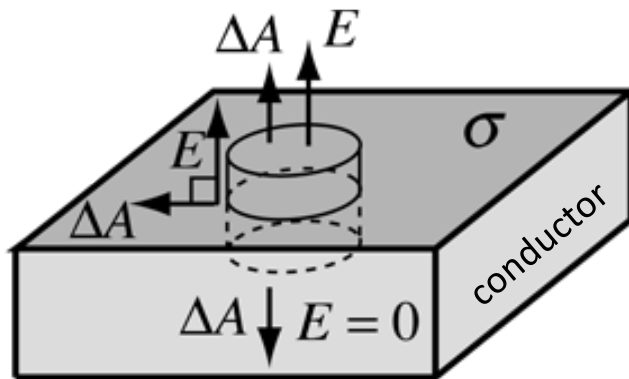
- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el **potencial ahí es constante al igual que en su superficie.**
- Como la **superficie es equipotencial**, el **campo en esa superficie sólo puede ser normal a ella.**

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



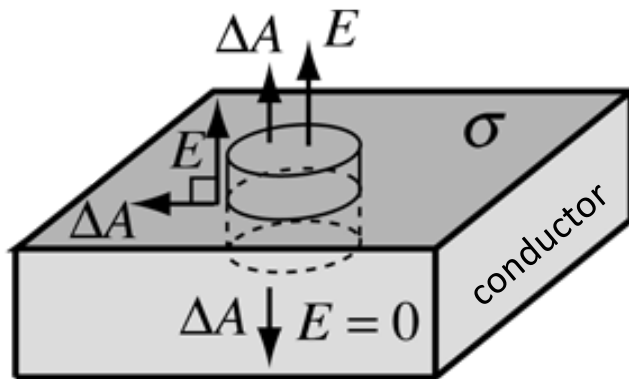
- El salto de un campo eléctrico nulo en el interior de un conductor a uno no nulo y normal en su superficie se debe a la presencia de la carga acumulada ahí.

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El salto de un campo eléctrico nulo en el interior de un conductor a uno no nulo y normal en su superficie se debe a la presencia de la carga acumulada ahí.
- Apliquemos la Ley de Gauss en un cilindro alineado con la normal a la superficie de un conductor donde hay una carga superficial de densidad σ (C/m²)

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El único flujo que sobrevive es el que se da a través de la tapa externa de área ΔA

$$\int_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\text{carga encerrada}}{\epsilon_0}$$

$$E \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$