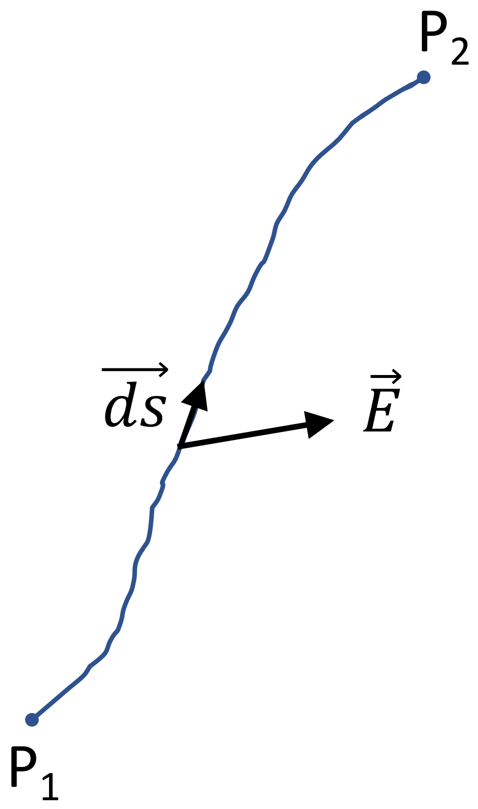
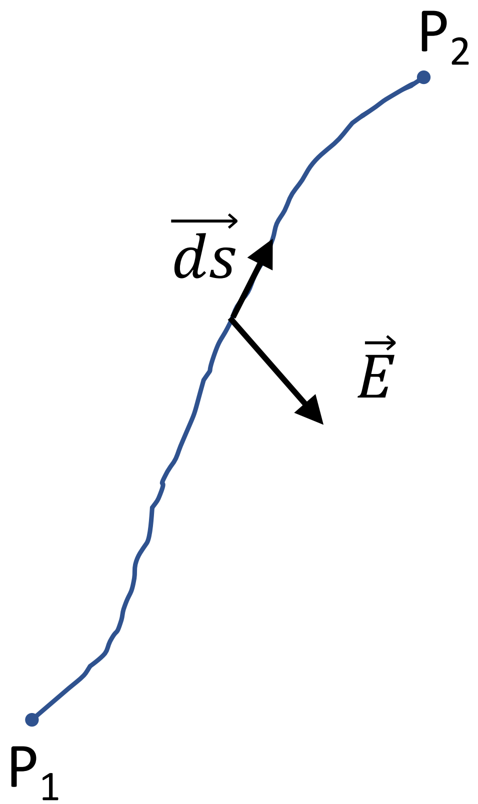
Potencial electrostático

Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

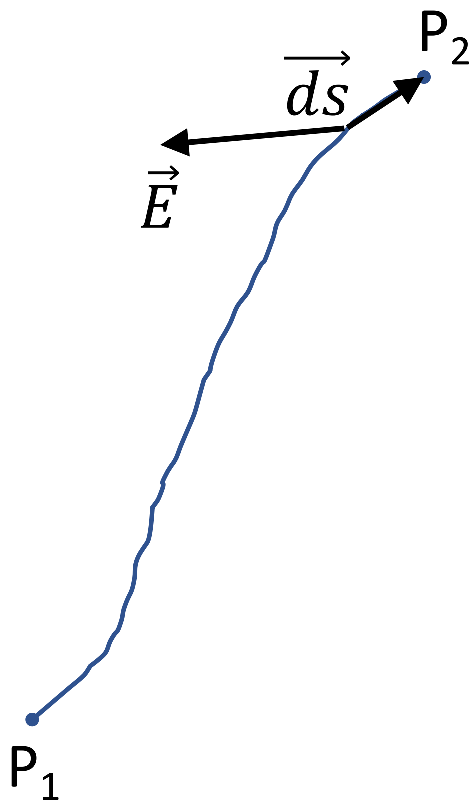
Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

- Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo $\vec{E}$ entre dos puntos P_1 y P_2.

Integral de línea del campo

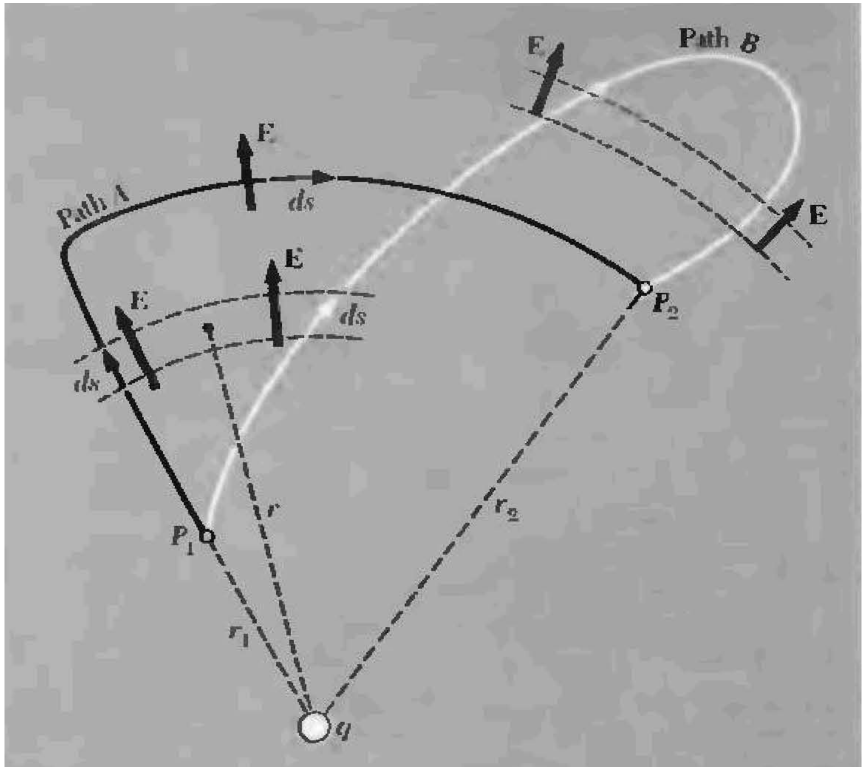


- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

- Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo $\vec{E}$ entre dos puntos P_1 y P_2.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

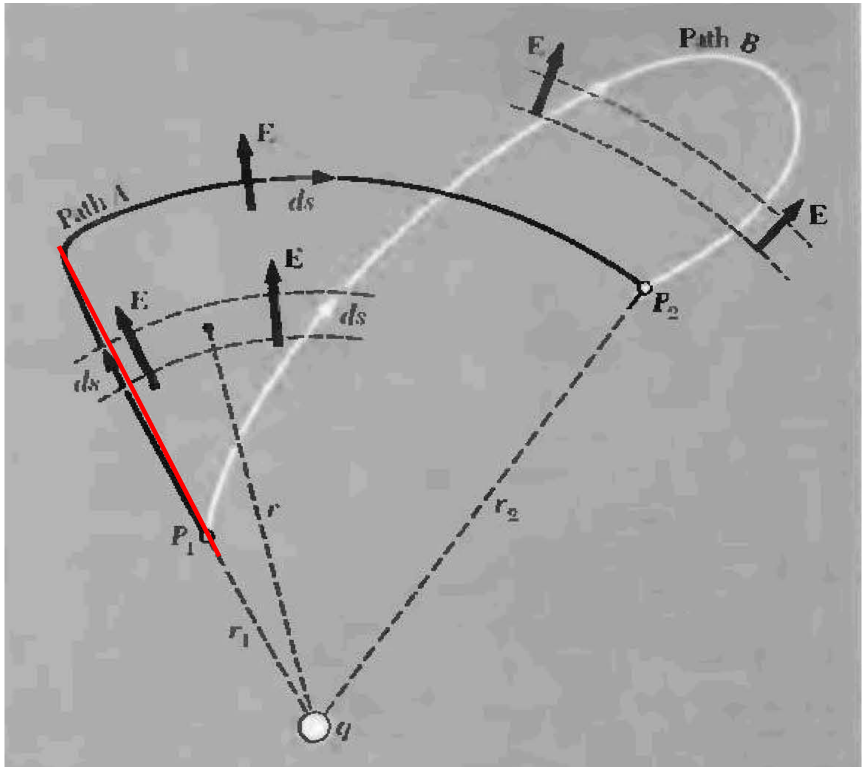
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da:

- $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} =$

Camino A

Diferencia de potencial en carga puntual



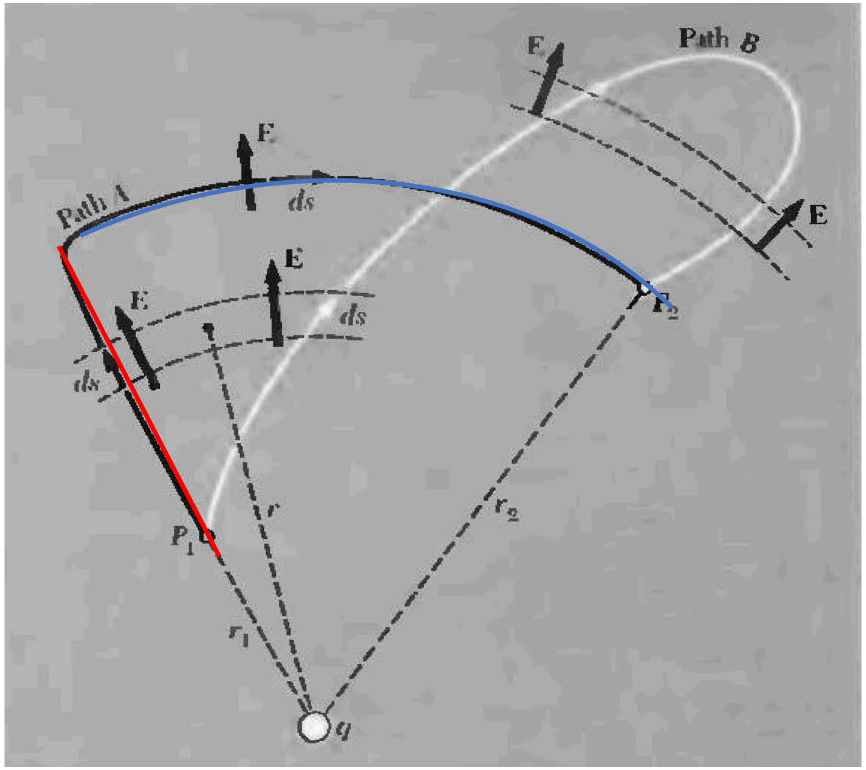
- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da:

- $\underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}}_{\text{Camino A}} = \underbrace{\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}}_{\text{Camino radial}} +$

Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

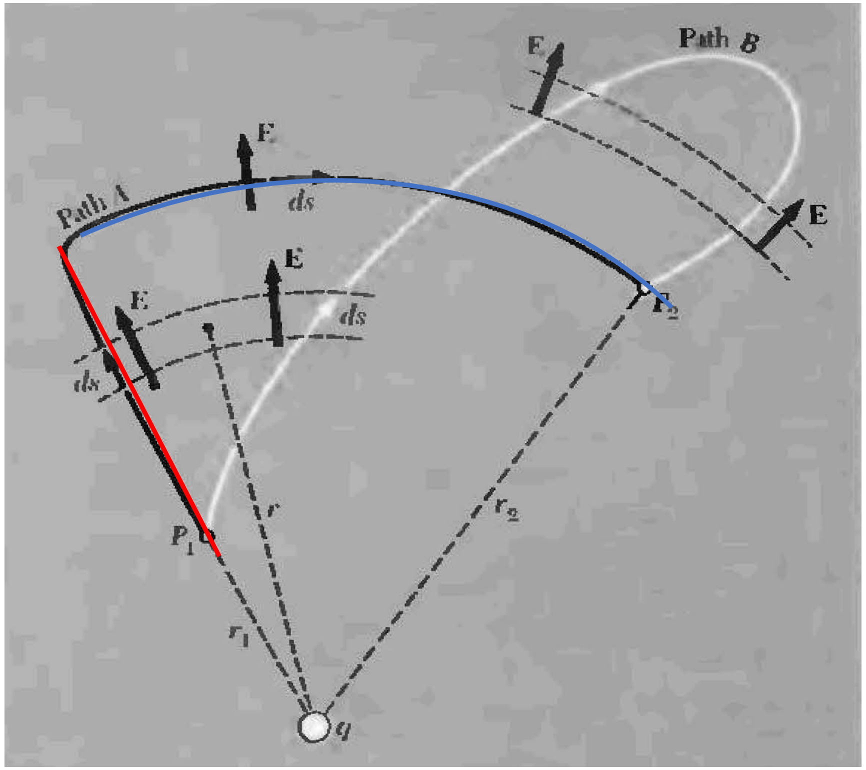
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da:

- $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} + \int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$

Camino A — Camino radial — Arco

Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da:

Son perpendiculares!

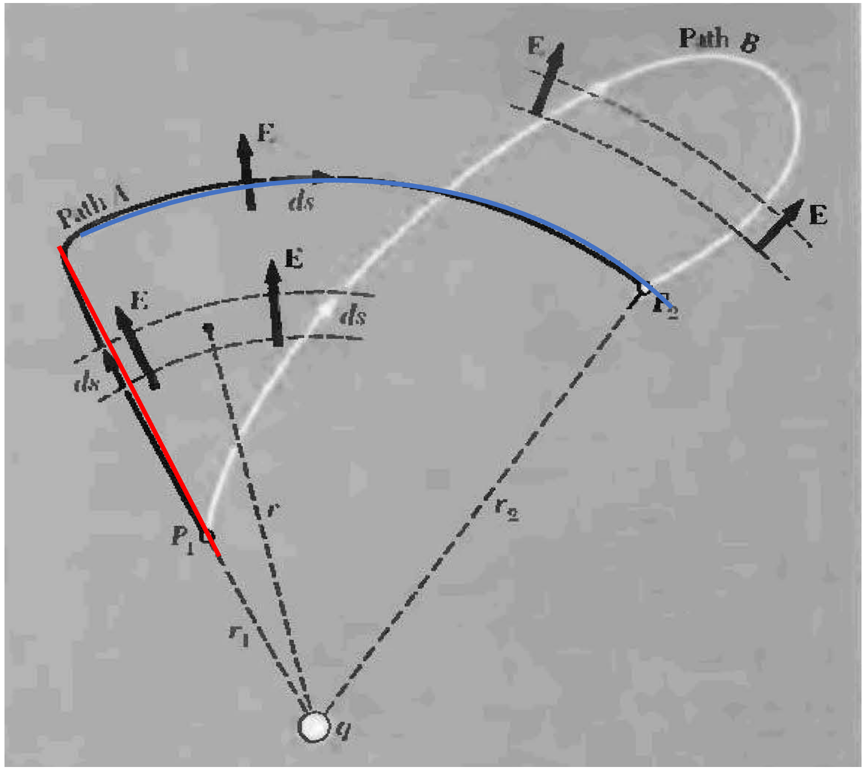
- $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} + \cancel{\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}}$

Camino A

Camino radial

Arco

Diferencia de potencial en carga puntual

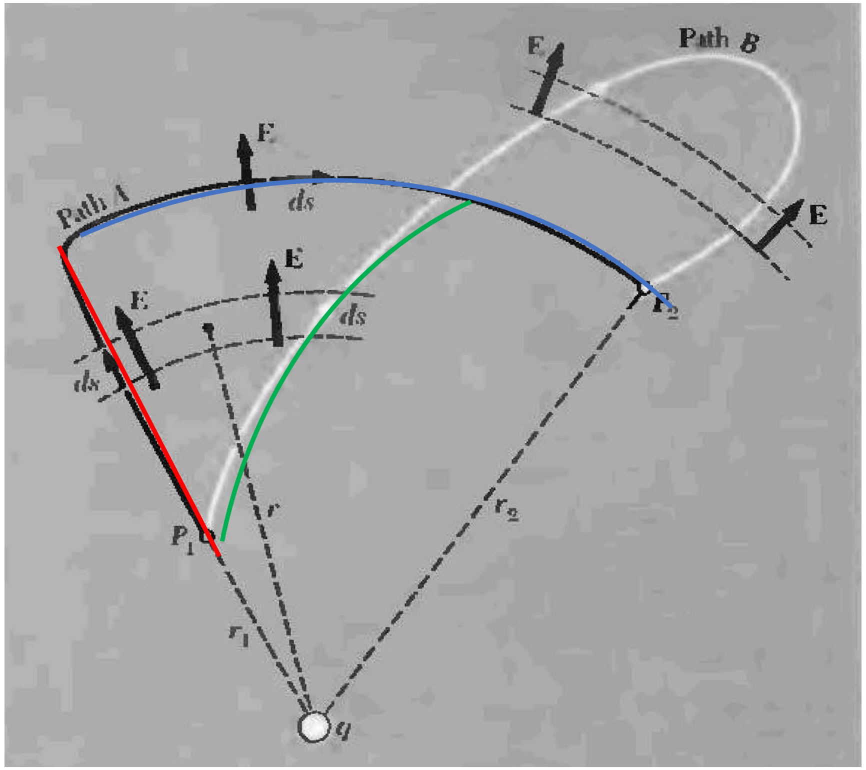


- Por el Camino A (camino radial desde r_1 a r_2 + un arco a r_2) la integral entre P_1 y P_2 da $\overrightarrow{ds} = dr\,\hat{r}$:

$$\underset{\text{Camino A}}{\int_{P_1}^{P_2}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}\, dr$$

$$\underset{\text{Camino A}}{\int_{P_1}^{P_2}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Diferencia de potencial en carga puntual

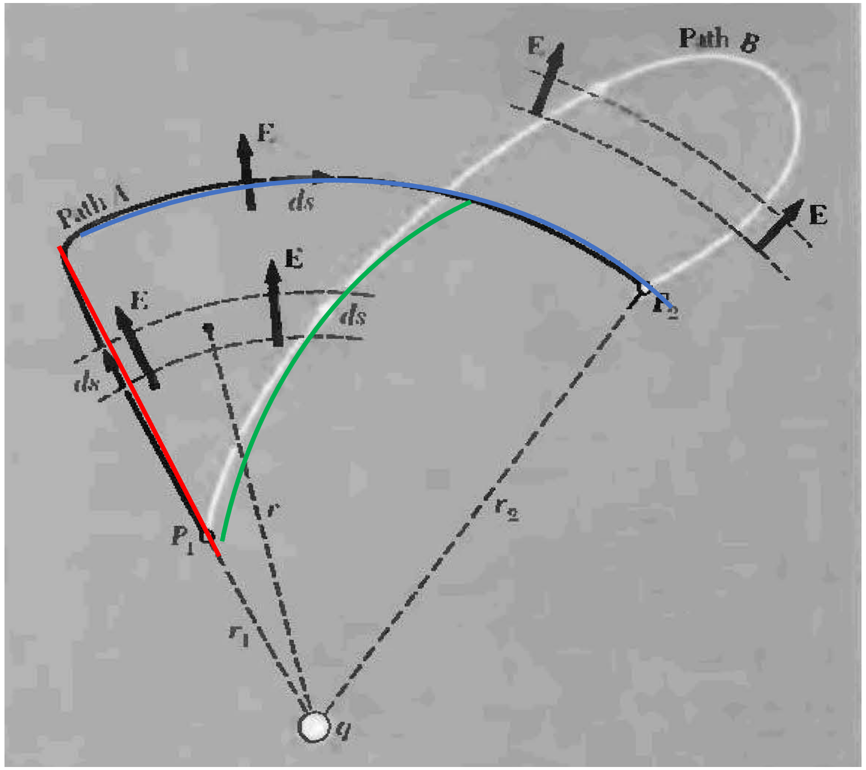


- Al ser $\vec{E}$ radial, la integral por el tramo verde del Camino B vale lo mismo que la integral del camino A.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Camino B
Tramo verde

Diferencia de potencial en carga puntual



- Al ser $\vec{E}$ radial, la integral por el tramo verde del Camino B vale lo mismo que la integral del camino A.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Camino B
Tramo verde

- Mientras que el lazo blanco no contribuye.

Diferencia de potencial en carga puntual

- Como el camino B no tiene nada especial, **la integral no depende del camino y para P_1 y P_2 fijos siempre vale:**

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

- **La diferencia de potencial entre P_1 y P_2 se define como**:

$$\phi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

- En electrostática no depende del camino
- Solo depende del punto inicial y el final

Función potencial para una carga puntual

- La diferencia de potencial entre dos puntos es para este caso:

$$\phi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

- Se puede definir una función potencial $\phi(r)$ si coloco un potencial de referencia común para todo el sistema. Podemos hacerlo en $r_1 = \infty$ (muy lejos de la distribución) con lo cual:

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

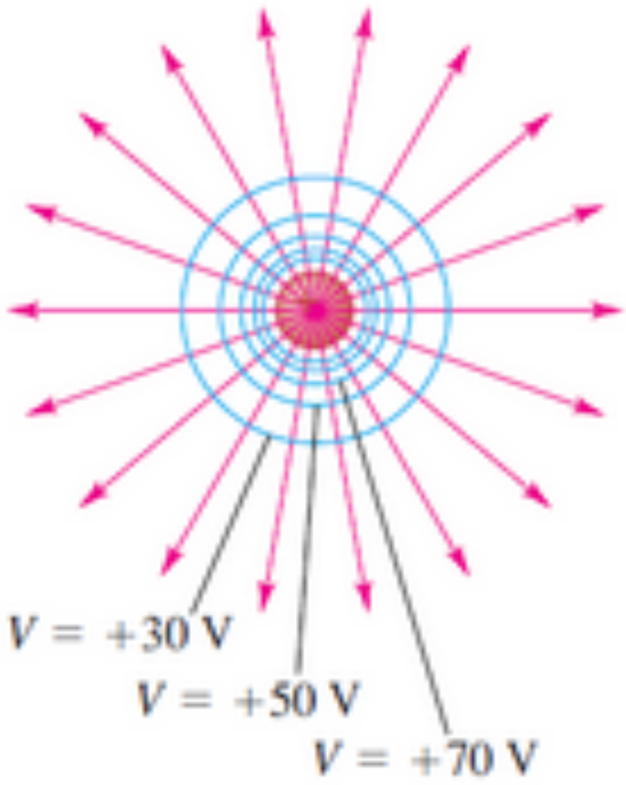
Función potencial de una carga puntual con potencial cero en el infinito

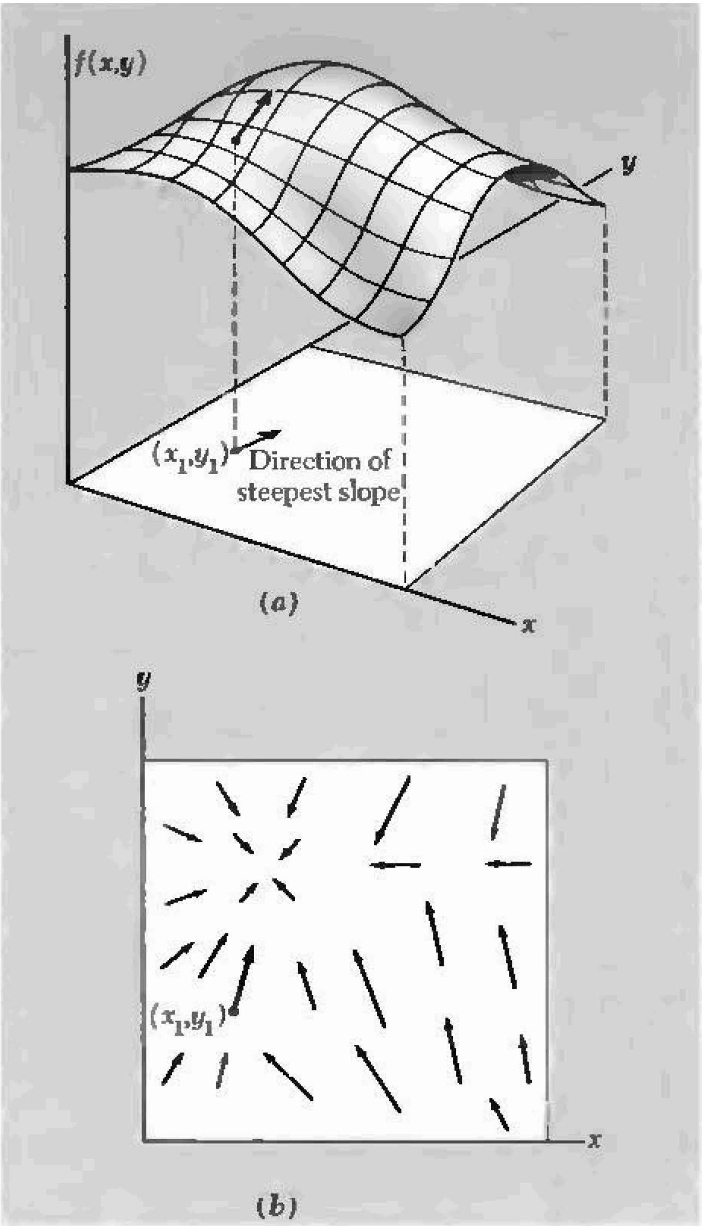
Pregunta

- Se llama equipotencial al conjunto de puntos del espacio que tienen el mismo valor de la función potencial.

- ¿Qué forma tiene una equipotencial para el caso que acabamos de ver?

(a) A single positive charge





Gradiente del potencial

- Dada una función $f(x, y, z)$ derivable, el vector gradiente $\vec{\nabla} f$ nos da la dirección de mayor crecimiento de la función f en el punto (x, y, z).

- En cartesianas

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Gradiente del potencial y campo eléctrico

- La variación del potencial en un punto (x, y, z) viene dada por

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

- Por otro lado, sabemos que:

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

donde $\overrightarrow{ds}$ es el diferencial de camino

$$\overrightarrow{ds} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

- Entonces esto implica que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Gradiente del potencial y campo eléctrico

- Por otro lado, si $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

- Entonces por el teorema del Gradiente tenemos que para cualquier camino C entre puntos $\overrightarrow{P_1}$ and $\overrightarrow{P_2}$ la integral de camino es siempre la misma y depende de los valores de φ en los extremos:

$$\int_{\overrightarrow{P_1}}^{\overrightarrow{P_2}} -\vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \varphi\left(\overrightarrow{P_2}\right) - \varphi\left(\overrightarrow{P_1}\right)$$

C

Potencial de una distribución de carga

Diferencia de potencial para N cargas

- De manera análoga, para un sistema de N cargas $q_1 \ldots q_N$ y por el principio de superposición.

$$\phi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = -\int_{P_1}^{P_2} \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N\right) \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{ds} - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{ds} - \cdots - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_N \cdot \overrightarrow{ds}$$

- Centrándonos en cada carga:

$$\phi_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \left[\frac{1}{r_{2i}} - \frac{1}{r_{1i}}\right]$$

r_{1i}: distancia de q_i a P_1
r_{2i}: distancia de q_i a P_2

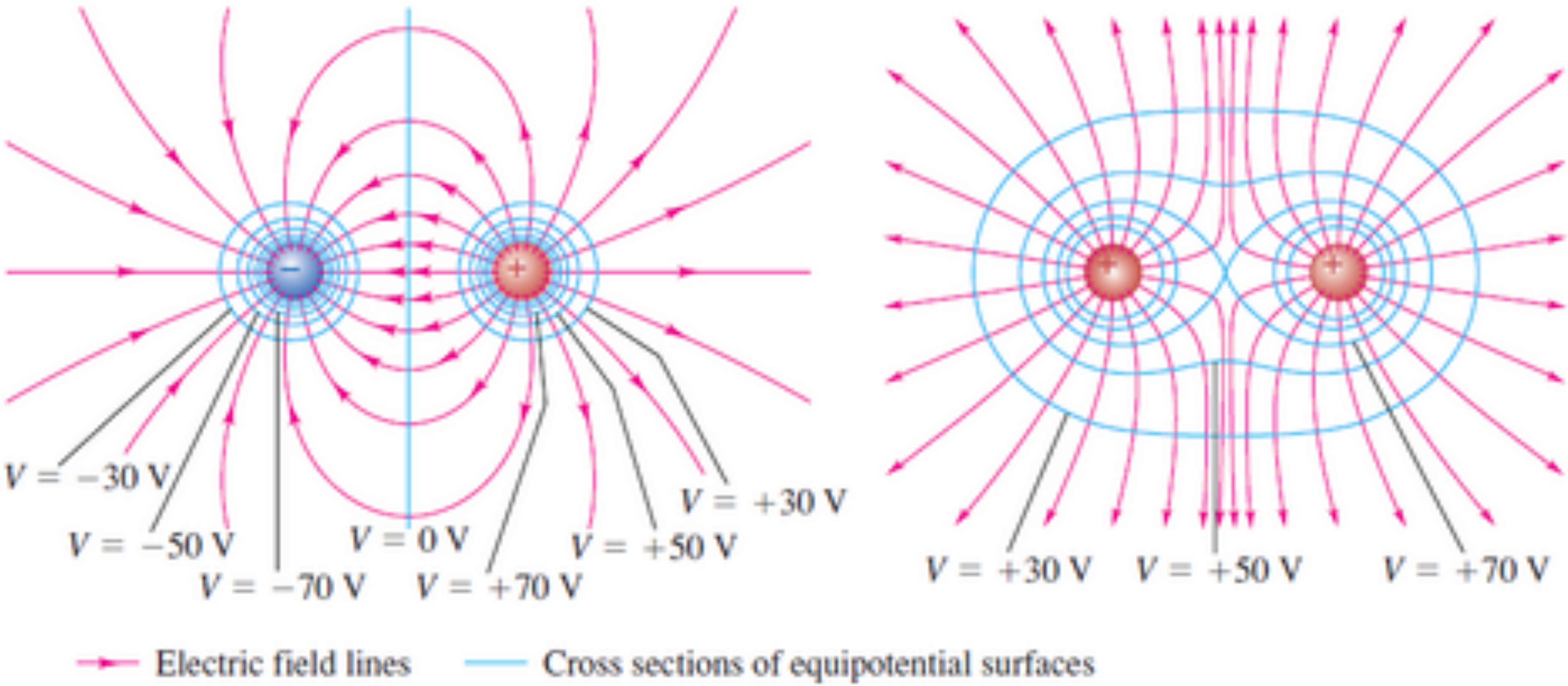
Función potencial para N cargas

- Si la distribución es acotada en el espacio puedo poner como punto de potencial cero el infinito y entonces

$$\phi(r_1, \dots, r_N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

r_i: distancia desde cada q_i al punto de evaluación del potencial

(b) An electric dipole (c) Two equal positive charges



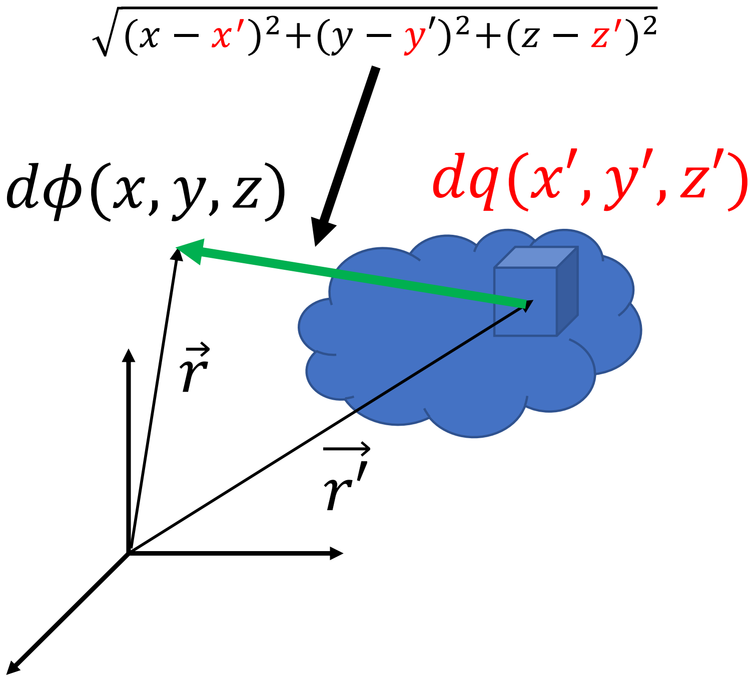
Potencial de una distribución de carga

- Por estar el campo electrostático y el potencial relacionados por un gradiente, que es un operador lineal, el principio de superposición vale también para la función potencial siempre y cuando tengan el mismo potencial de referencia.

- Si la distribución de cargas es acotada en el espacio, es conveniente poner el potencial de referencia muy lejos ($r=\infty$) y con valor cero.

- Eso hacemos cuando calculamos el potencial de una carga al traer otra desde el infinito

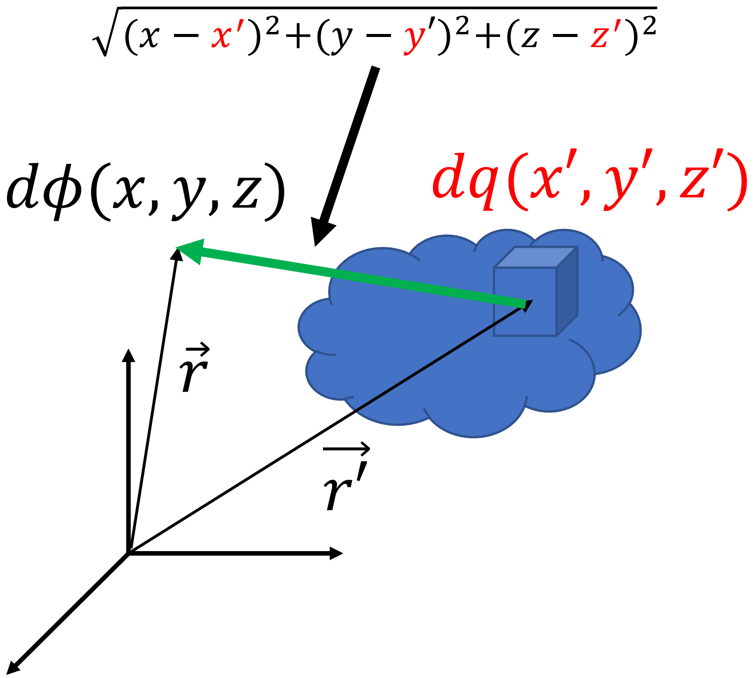
Potencial de una distribución de carga



- La contribución de un pedacito de carga $\rho(x',y',z')dx'dy'dz'$ al potencial en x,y,z es:

$$d\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

Potencial de una distribución de carga



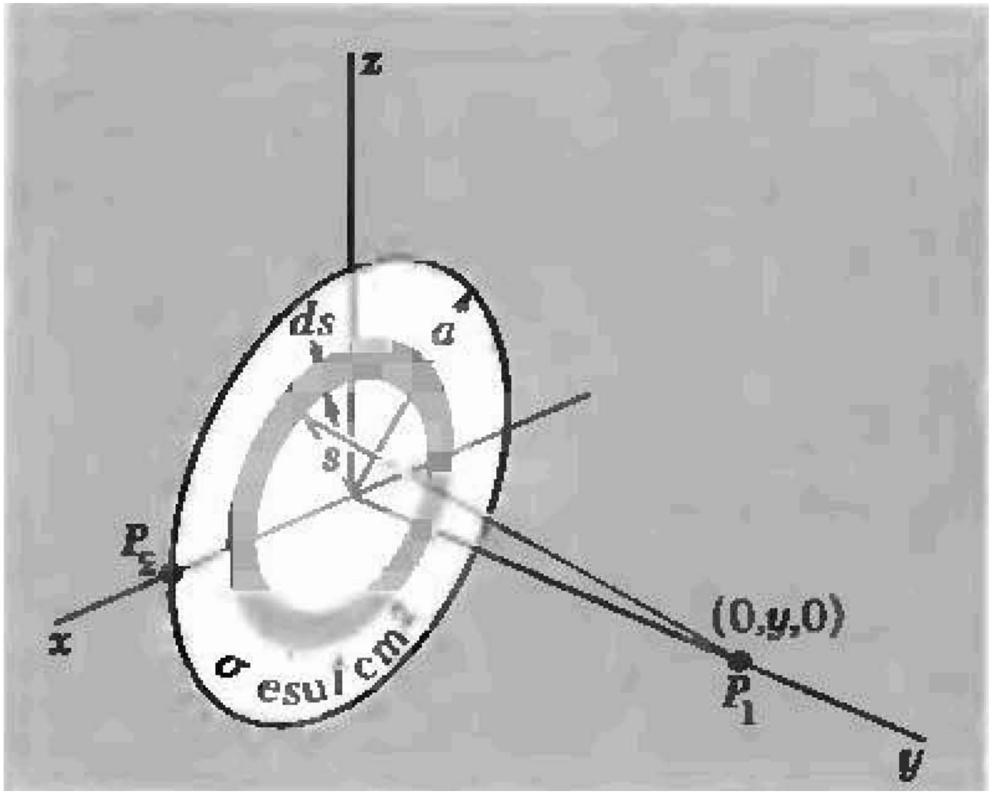
- La contribución de un pedacito de carga $\rho(x',y',z')dx'dy'dz'$ al potencial en x,y,z es:

$$d\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

- Integrando sobre todo el volumen de la carga y tomando el potencial cero en el infinito:

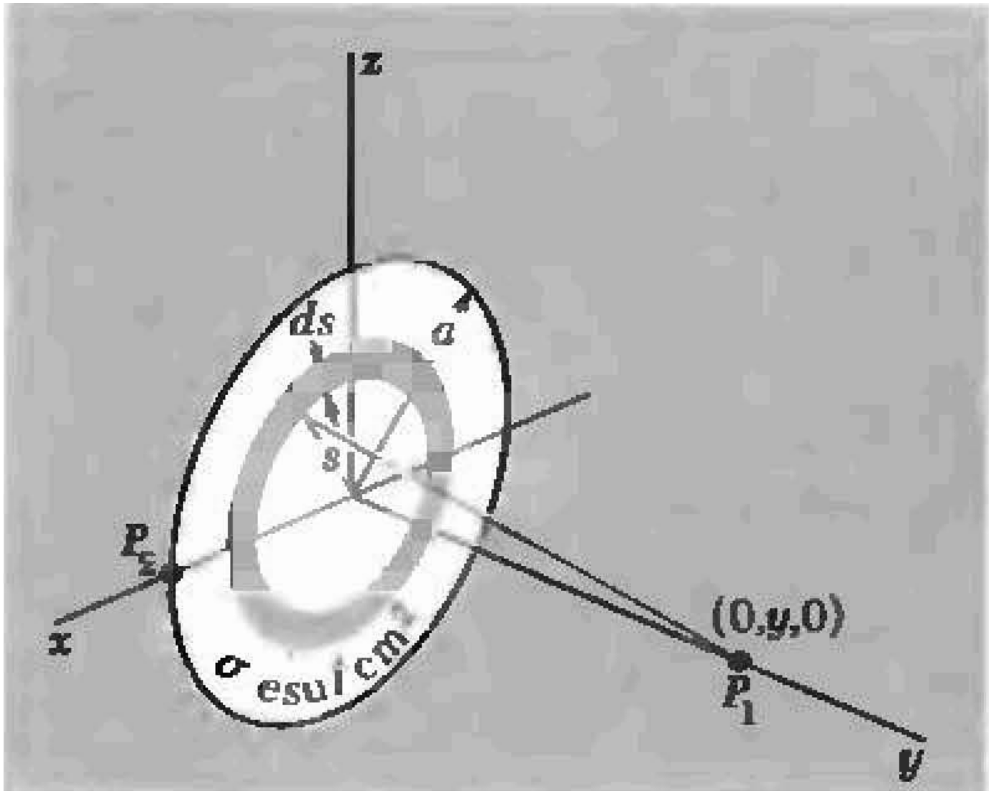
$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(x',y',z')dx'dy'dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- Distribución acotada ✓
  - Radio a
  - Grosor despreciable
  - $\sigma = constante\ (\frac{C}{m^2})$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- Distribución acotada ✓
  - Radio *a*
  - Grosor despreciable
  - $\sigma = constante\ (\frac{C}{m^2})$

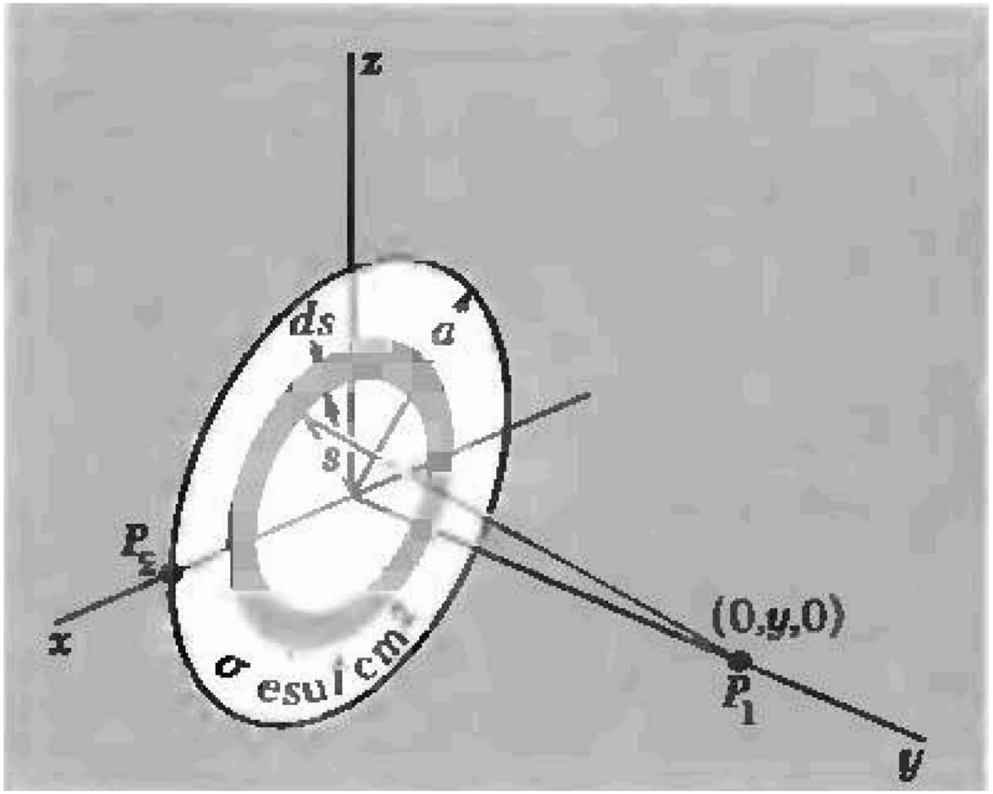
- Calculemos el potencial en el punto P_1 sobre el eje de simetría *y*.

$$dq = \sigma\, dA$$

$$dA = 2\pi s\, ds$$

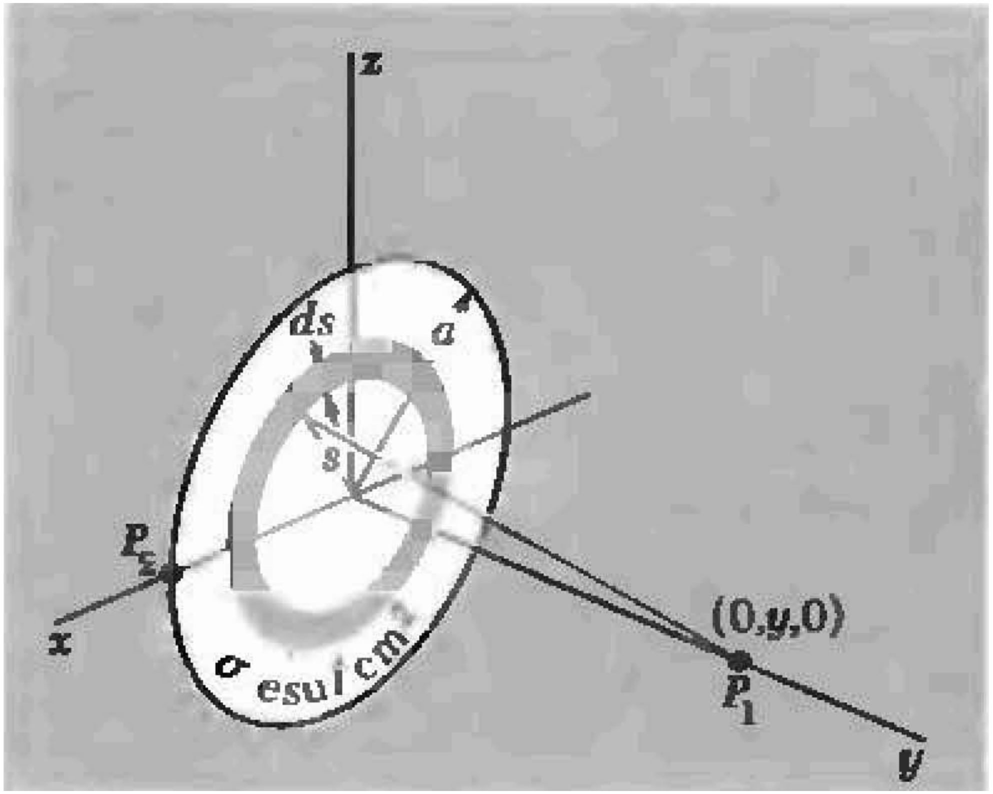
(dA área de un anillo de radio s y ancho ds).

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La distancia del anillo al P_1 $(0, y, 0)$ es:
$$\sqrt{y^2 + s^2}$$
- Poniendo el cero de potencial en el infinito
$$\phi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente

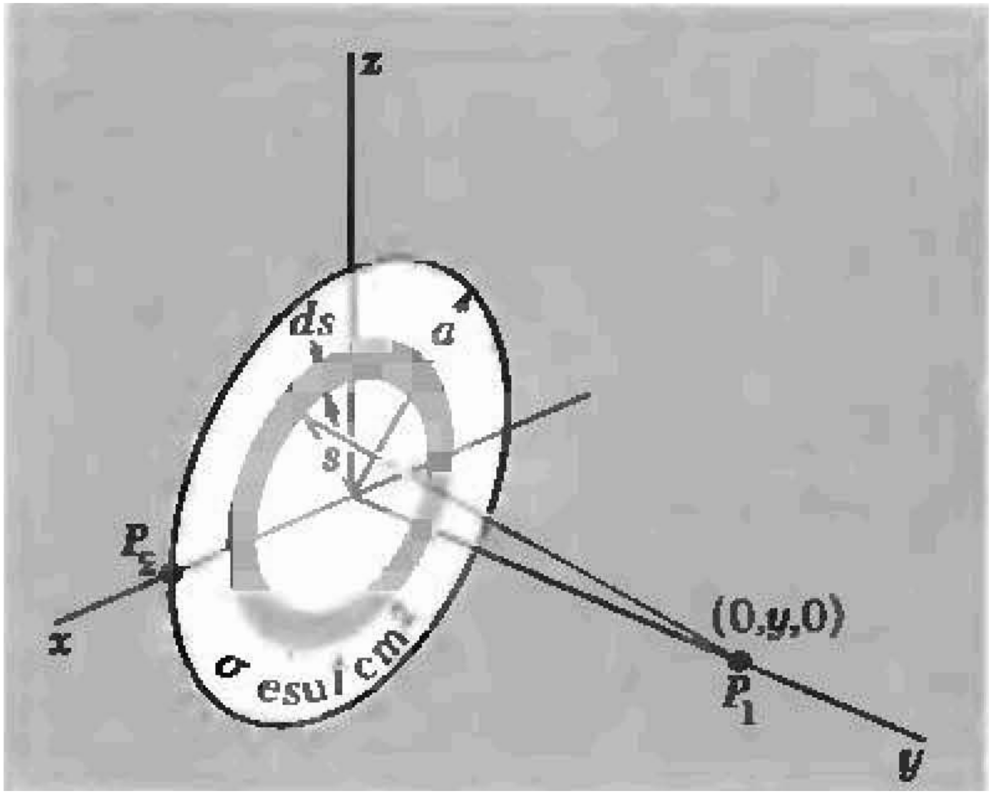


- La distancia del anillo al P_1 $(0, y, 0)$ es: $\sqrt{y^2 + s^2}$
- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\sigma\, 2\pi s\, ds}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La integral queda

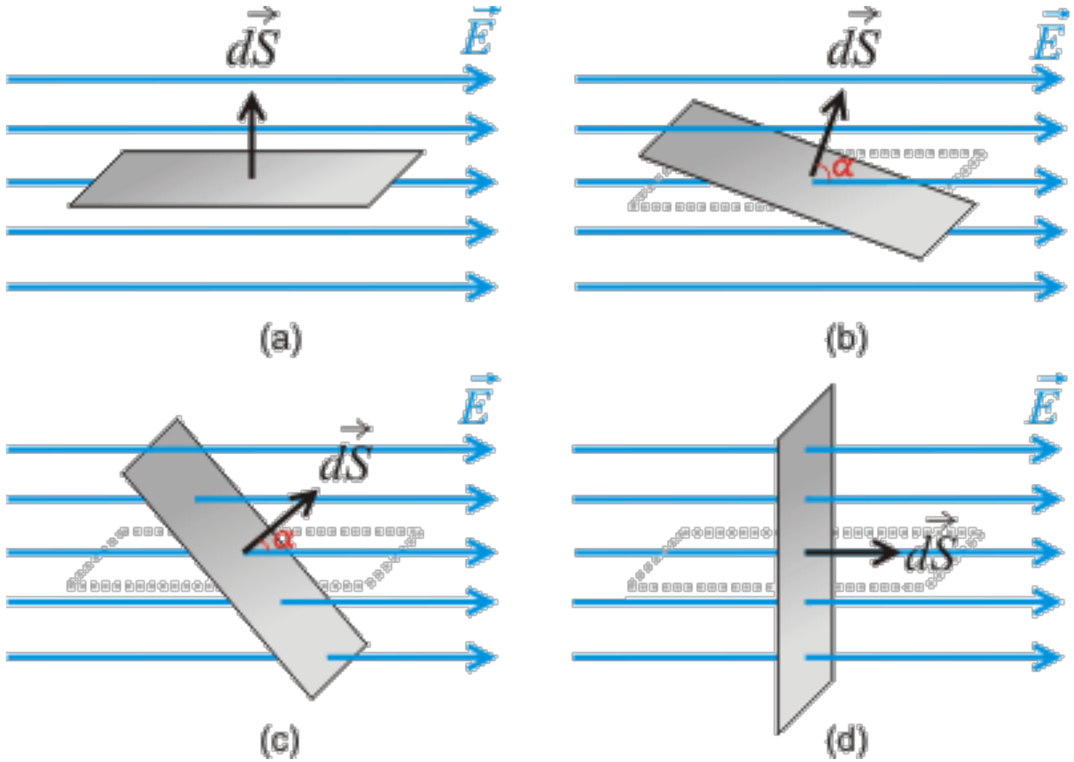
$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{s\,ds}{\sqrt{y^2 + s^2}} =$$

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + a^2} - |y|\right]$$

El problema es simétrico respecto a y = 0

Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el producto de un campo por el área transversal que atraviesa

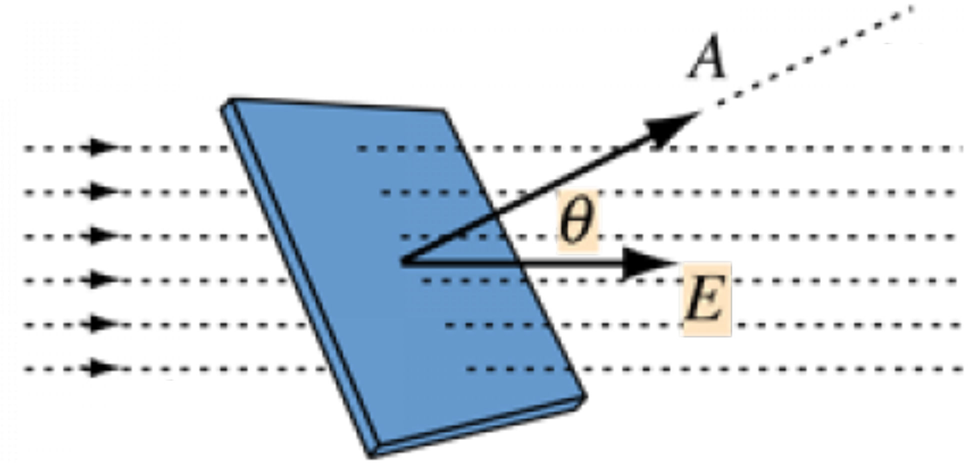


Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el producto de un campo por el área transversal que atraviesa

Superficie plana de área A, $\vec{E}$ uniforme

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\ \cos\theta$$



Flujo de campo eléctrico

- Superficie compuestas de facetas de área $\overrightarrow{A_i}$ atravesadas por campos $\overrightarrow{E_i}$.

$$\Phi = \sum_{todos\ los\ i} \overrightarrow{E_i} \cdot \overrightarrow{A_i} = \sum_{todos\ los\ i} E_i A_i \cos\theta_i$$

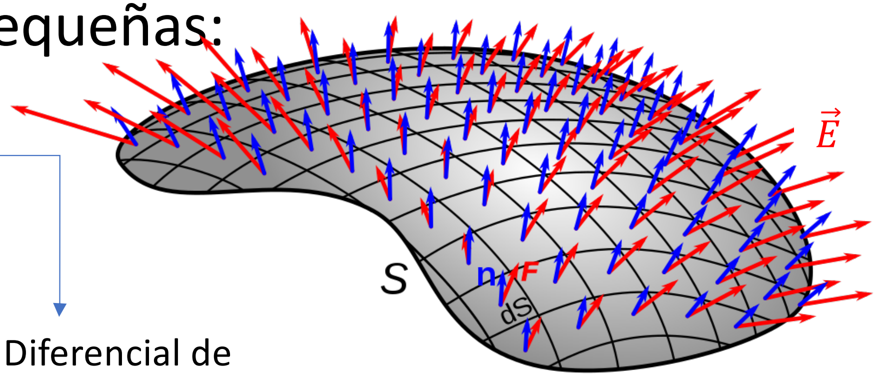
- Si las facetas son infinitesimalmente pequeñas:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, ds$$

Campo en la faceta infinitesimal

Normal a la faceta infinitesimal

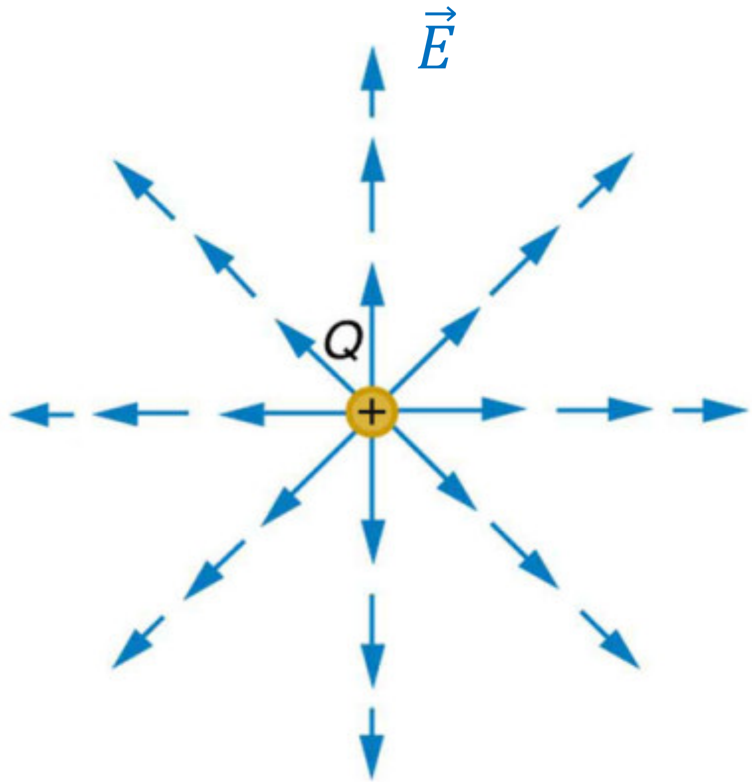
Diferencial de área



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- En coordenadas esféricas, el campo generado a una distancia r es siempre radial y vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

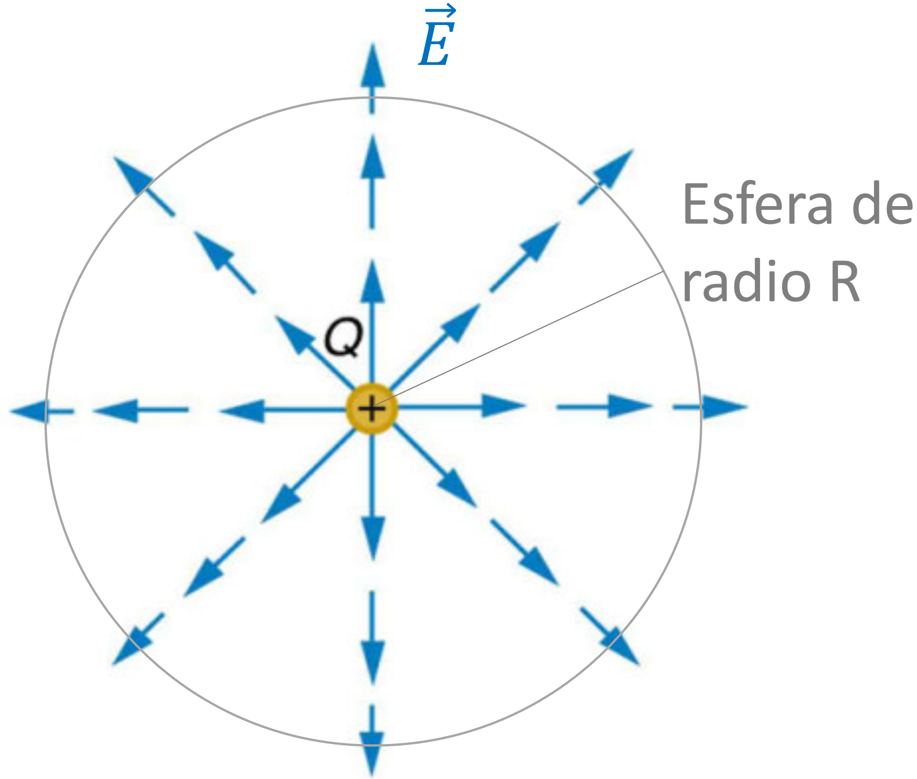


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- El flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio R vale:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Superficie de la esfera

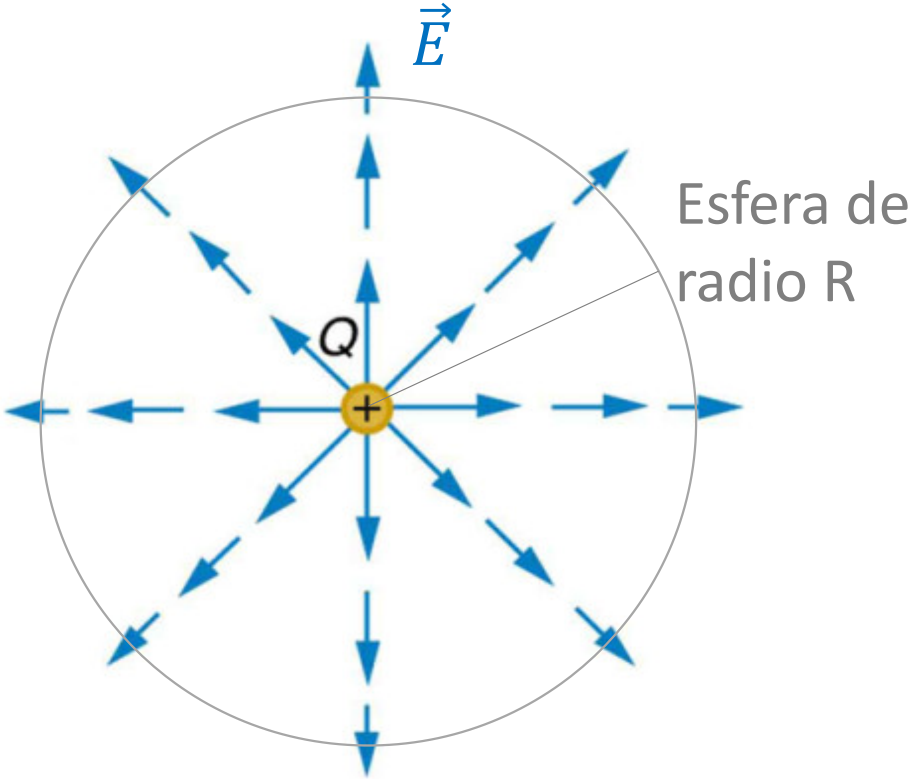


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- Sobre la esfera, $\vec{E}$ apunta siempre radialmente y vale lo mismo

$$\Phi = \oiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot\overrightarrow{ds}$$

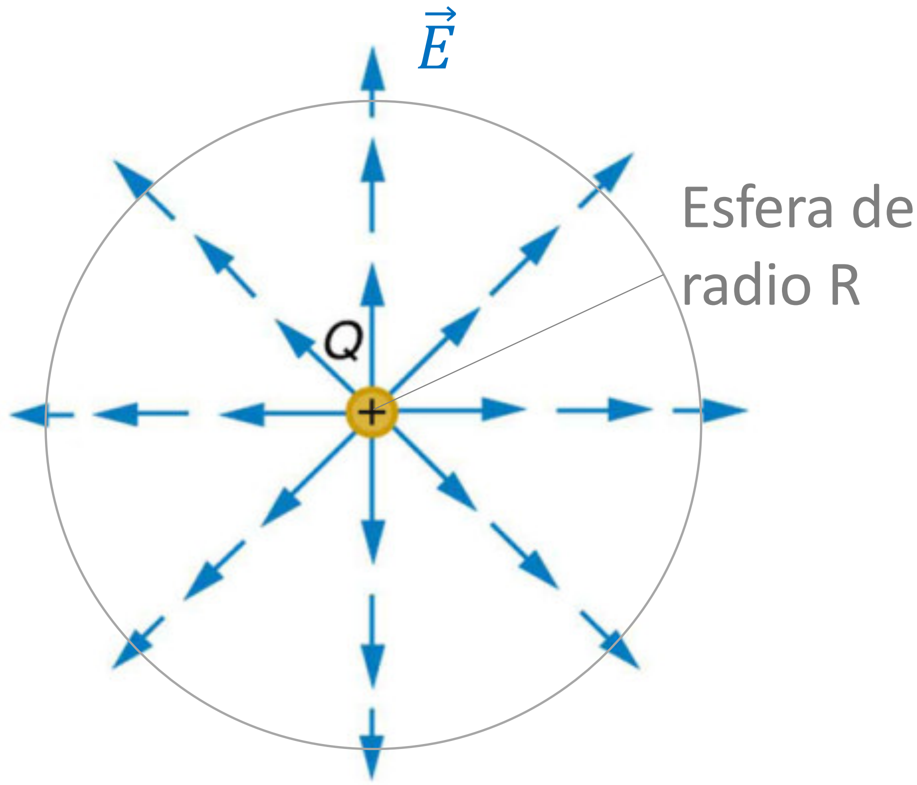
Superficie de la esfera



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- El diferencial de área en la esfera apunta radialmente y vale $R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

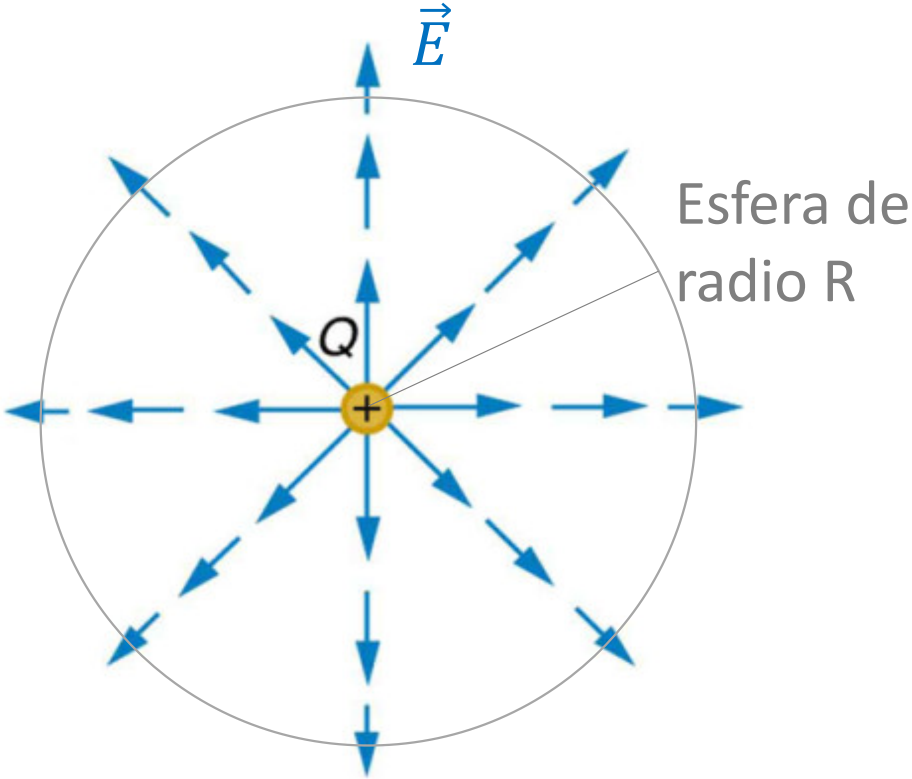
$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{QR^2}{R^2}\,\hat{r}\cdot\hat{r}$$



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- El diferencial de área en la esfera apunta radialmente y vale $R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cancel{R^2}}{\cancel{R^2}} \hat{r} \cdot \hat{r}$$



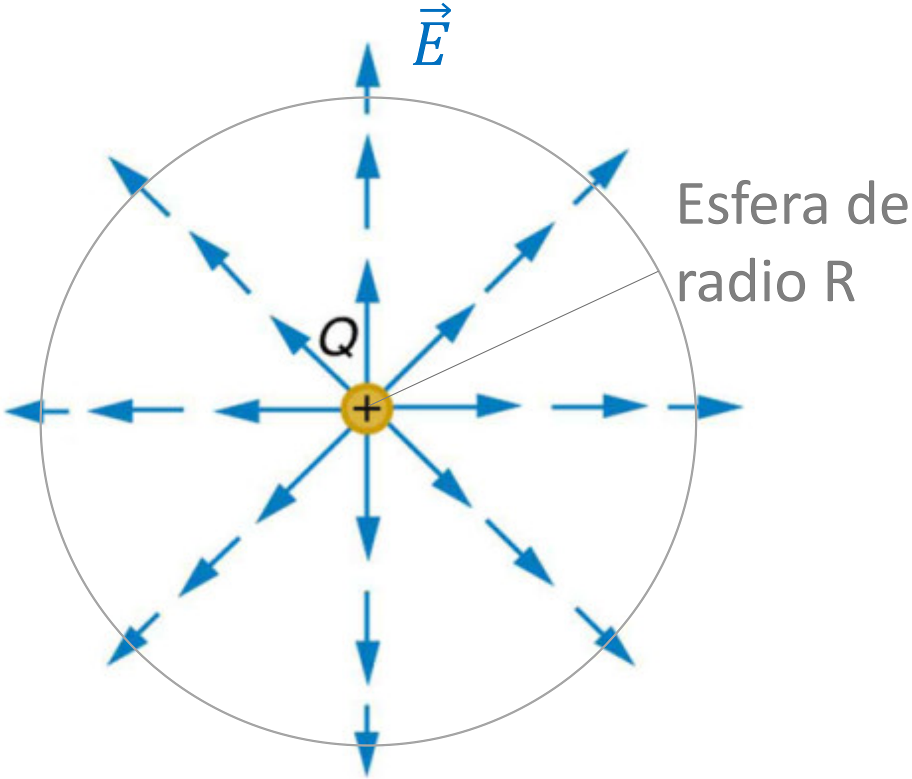
Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- El diferencial de área en la esfera apunta radialmente y vale $R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}} \hat{r}\cdot\hat{r}$$

- Entonces, como $\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- La primera integral da 2, mientras que la segunda vale 2π, entonces

$$\Phi = \frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0} Q \, \cancel{4\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Vemos que el resultado no depende del radio de la esfera, o sea que es <u>el mismo para cualquier valor de R</u>.

Ley de Gauss

Se verifica que en general, ***para toda superficie cerrada*** *S que encierra un volumen V, El flujo del campo eléctrico* $\vec{E}$ *a través de S es proporcional a la carga total encerrada*

Carl Friederich Gauss
(1777-1855)

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \, dv$$