Potencial vector y el campo lejano de una espira

Potencial vector $\vec{A}$

- Como vimos en la última clase, una de las propiedades del campo magnético $\vec{B}$ es su divergencia nula

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Ya que la **divergencia de un rotor siempre es nula**, esto quiere decir que $\vec{B}$ se puede escribir como el rotor de otro vector $\vec{A}$ que llamaremos **potencial vector**:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- Entonces, la ley de Ampère en el vacío para $\vec{A}$ queda:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Pregunta

- Demostrar en cartesianas que para todo $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

y

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

donde $\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\,\hat{x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\,\hat{y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\,\hat{z}$

Potencial vector $\vec{A}$

- Entonces

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$$

- Sin perder generalidad, es posible pedir

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

- Con lo cual $\vec{A}$ deberá cumplir la ecuación de Poisson vectorial

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

donde $\vec{\nabla}^2\vec{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\,\hat{x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\,\hat{y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\,\hat{z}$

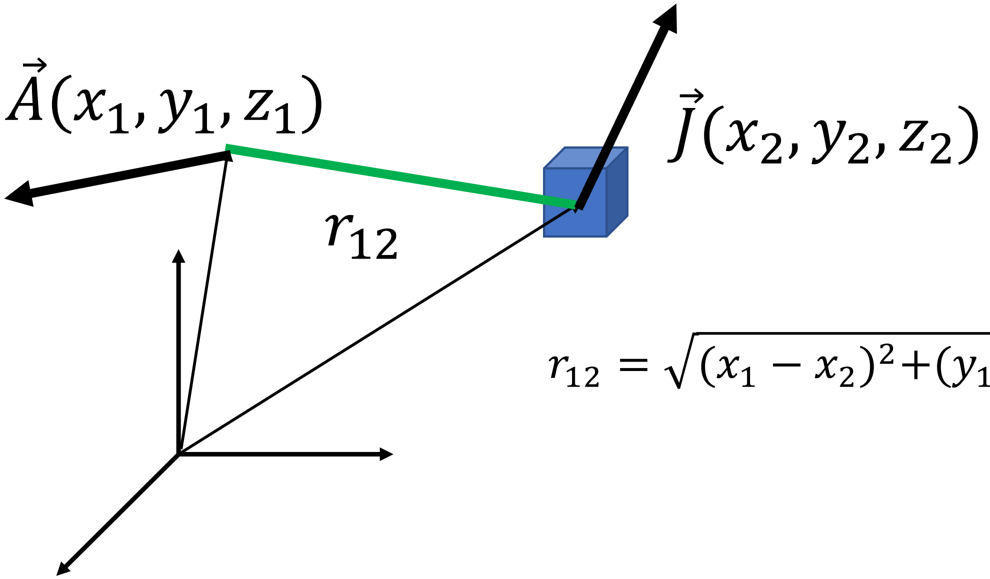
Solución de Poisson para un hilo de corriente $\vec{J}$

- Si hacemos memoria, ya resolvimos esta ecuación para el potencial de un campo electrostático de una distribución de cargas acotada:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(x',y',z')dx'dy'dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

- Integrábamos sobre las variables en rojo, las distribución.
- Escribamos entonces la solución para $\vec{A}$ en el punto (x_1,y_1,z_1). Por suerte esta solución cumplirá también con $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

Solución de Poisson para un hilo de corriente $\vec{J}$



$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

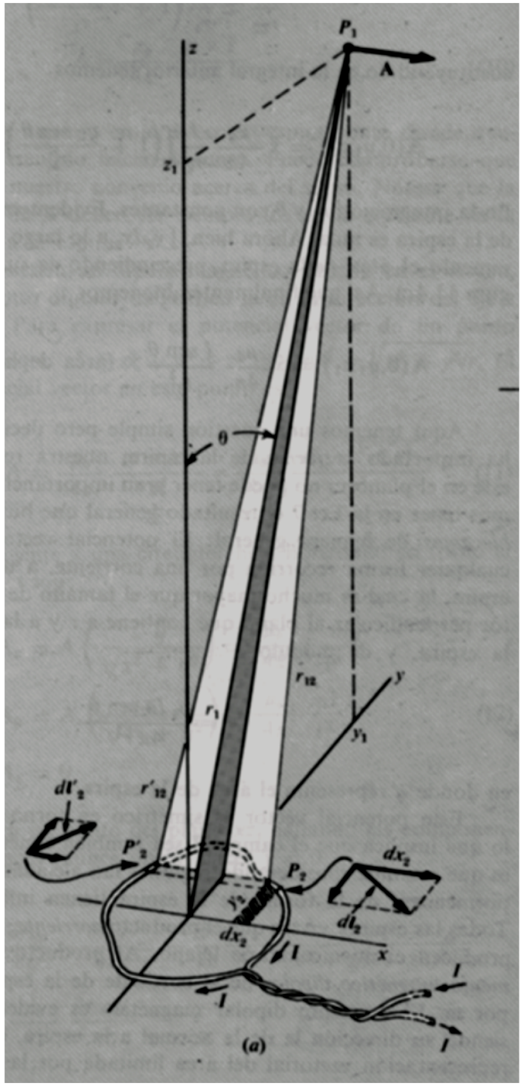
$$\boxed{\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{*} \frac{\mathbf{J}(x_2, y_2, z_2)\, dv_2}{r_{12}}}$$

*La integral es sobre la distribución de corriente

Campo lejano de una espira

- Supongamos una espira conductora situada en el plano xy envolviendo el origen.
- Una corriente estacionaria I circula a lo largo de la espira.
- Vimos que cerca de la espira no era facil calcular el campo.
- Intentemos ver cuánto vale en un punto lejano sobre el plano yz

$$P_1 = (0, y_1, z_1)$$



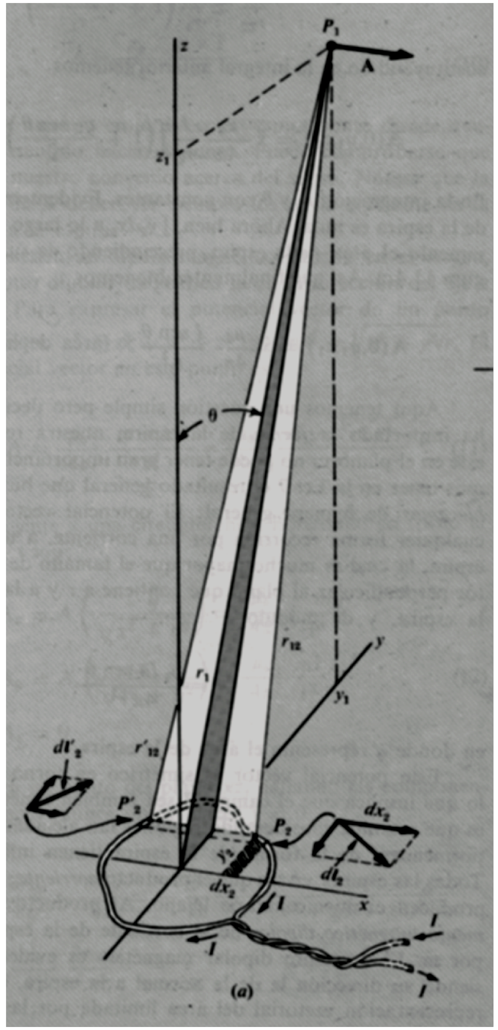
Campo lejano de una espira

- Tomemos la expresión para $\vec{A}$

$$\mathbf{A}(x_1,y_1,z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(x_2,y_2,z_2)\; dv_2}{r_{12}}$$

- Evaluandolo en el punto $P_1 = (0, y_1, z_1)$ e integrando en la sección transversal del cable

$$\mathbf{A}(0,y_1,z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{Espira}} \frac{dl_2}{r_{12}}$$



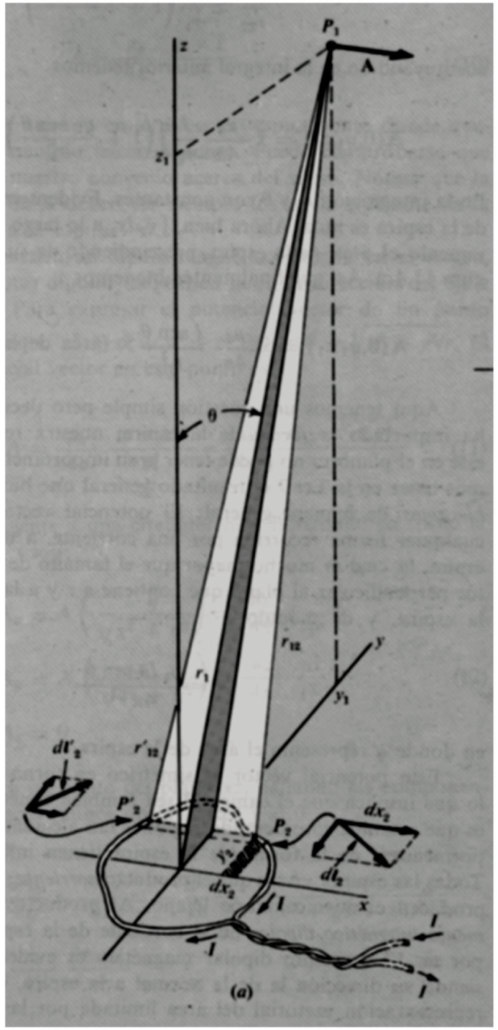
Campo lejano de una espira

- Ahora para grandes distancias, aproximemos el cociente:

$$\frac{1}{r_{12}}$$

- Tenemos que integrar sobre la espira. En primer orden, r_{12} depende más de la coordenada y_2 de $\overrightarrow{dl}_2$ que de x_2, es decir que

$$r_{12} = r_{12}'$$



Campo lejano de una espira

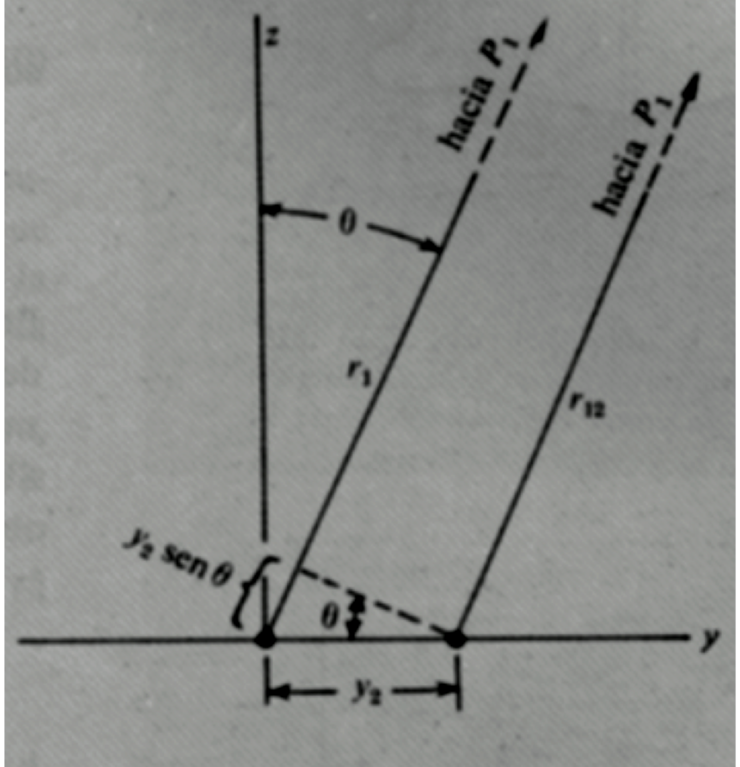
- Entonces en primer orden de la relación:

$$\frac{dimensión\ de\ la\ espira}{distancia\ a\ P_1}$$

- Podemos aproximar

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \operatorname{sen} \theta$$

- Donde r_1 es la distancia desde el centro



(b)

Campo de la corriente de una espira

- Entonces, para

$$\frac{y_2 \sin\theta}{r_1} \ll 1$$

- Se tiene

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1}\left[1 + \frac{y_2 \sin\theta}{r_1}\right]$$

- Entonces el potencial vector a grandes distancias r_1 da

$$\mathbf{A}(0,y_1,z_1) = \hat{\mathbf{x}}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I}{r_1}\int\left(1 + \frac{y_2\,\mathrm{sen}\,\theta}{r_1}\right)dx_2$$

Campo de la corriente de una espira

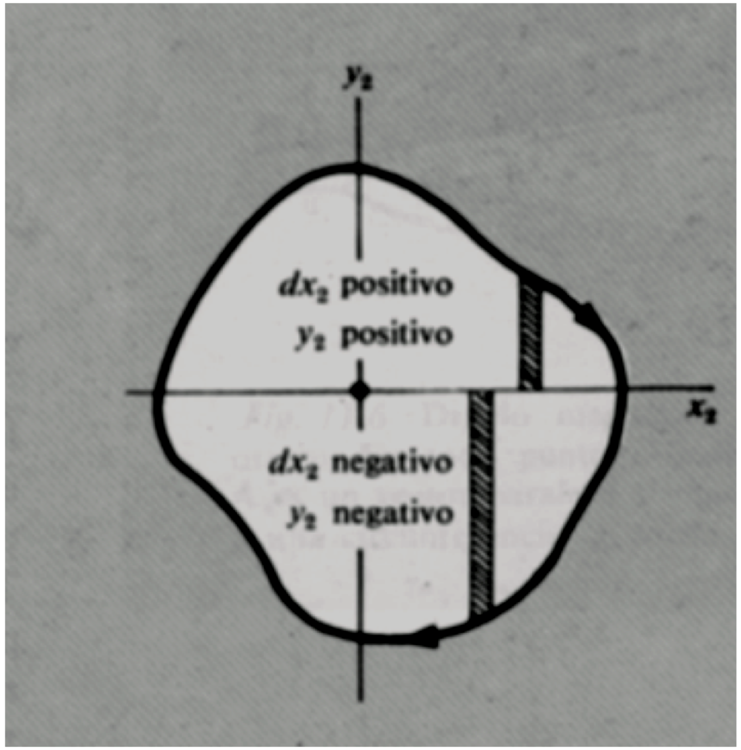
- La integral

$$a = \int_{\text{Espira}} y_2 \, dx_2$$

es el área de la espira

- Así

$$\mathbf{A}(0,y_1,z_1) = \hat{\mathbf{x}}\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I \operatorname{sen} \theta}{r_1^{\,2}} \times (\text{área de la espira})$$



Campo de la corriente de una espira

- Pero la dirección $\hat{x}$ es la dirección del producto vectorial

$$\vec{\mu}\times\hat{r} = Ia\ \sin\theta\,\hat{x}$$

- Entonces:

$$A = \frac{\mu_0\, Ia \text{ sen } \theta}{4\pi\, r^2}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{\vec{\boldsymbol{\mu}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Campo de la corriente de una espira

$$B_x = (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu\ x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mu\ xz}{r^5}$$

$$B_y = (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-\mu\ y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mu\ yz}{r^5}$$

Campo de la corriente de una espira

$$B_z = (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\mu\left[\frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\right]$$

$$= \qquad \frac{\mu\ (3z^2 - r^2)}{r^5}$$

Campo de la corriente de una espira

En el plano xz, $y = 0$, $\operatorname{sen}\theta = x/r$, y $\cos\theta = z/r$. Las componentes del campo en cualquier punto de este plano vienen dadas por:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{r^3}$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu (3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

Nuevamente, tenemos un campo poloidal (no tiene componente en $\hat{\phi}$)

Campo de la corriente de una espira

- En coordenadas esféricas

$$B_r = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3} \cos\theta$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sin\theta$$

$$B_\phi = 0$$

El campo lejano de una espira plana es dipolar

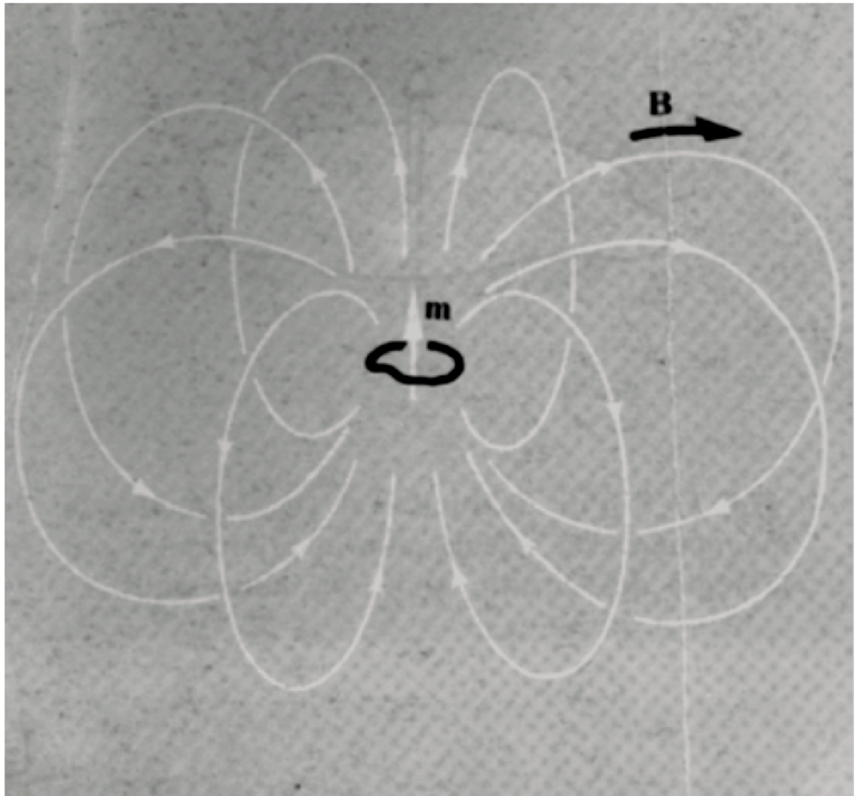


Fig. 11.7 Algunas líneas de campo magnético en el campo de un dipolo magnético, es decir, una pequeña espira recorrida por una corriente.