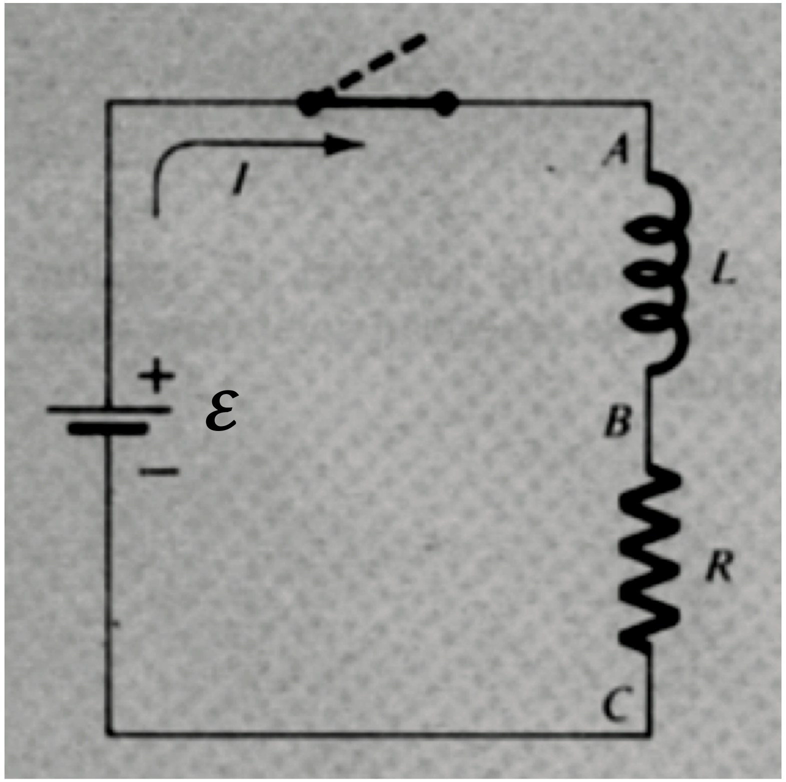
Regímenes transitorios

- Circuito RL
- Circuito RC
- Circuito RLC

Circuito RL

- Supongamos el siguiente circuito que consta de una autoinductancia L y una resistencia R en serie.
- La resistencia R puede ser la de todo el circuito, no importa donde la ubique.
- L puede representar la autoinductancia de la bobina más la del circuito. No tiene resistencia.
- Un switch permite prender o apagar la corriente I.
- La batería tiene una FEM de valor $\boldsymbol{\mathcal{E}}$



Circuito RL

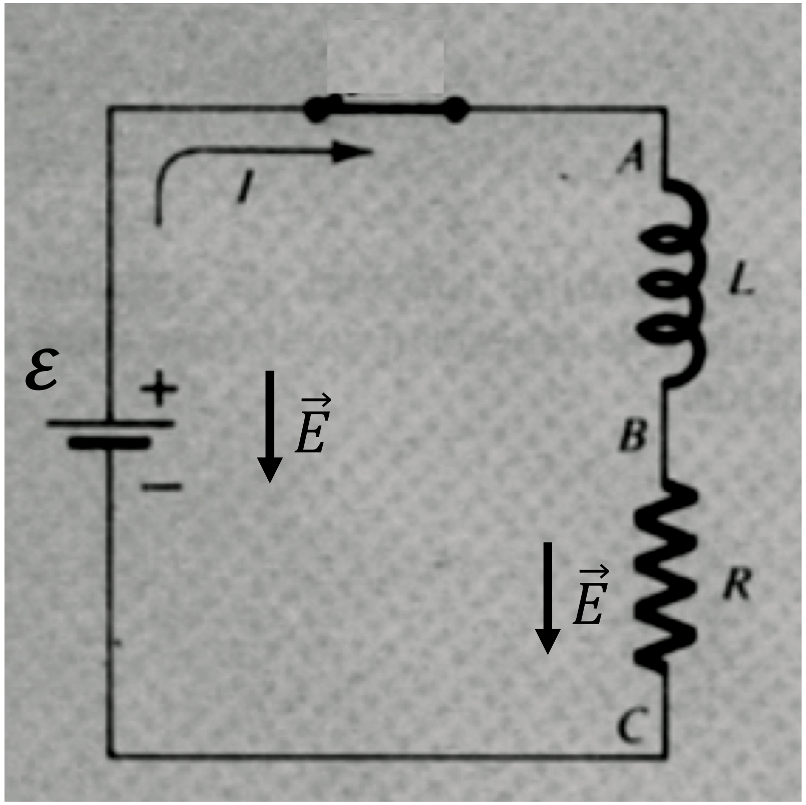
- Cerramos el switch.
- Si la corriente varía de la manera $\frac{dI}{dt}$ se inducirá una $FEM_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$.

- Entonces, la ley de Faraday queda:

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -L\frac{dI}{dt}$$

- Recorriendo el circuito en el sentido de la corriente tenemos:

$$-\boldsymbol{\varepsilon} + IR \ = -L\frac{dI}{dt}$$



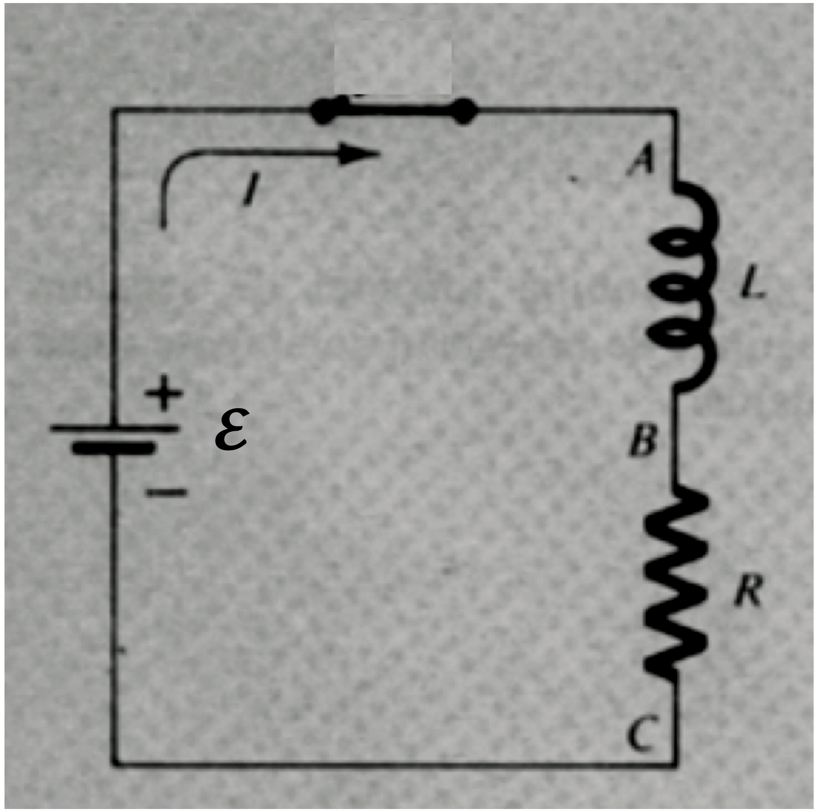
Circuito RL

- Formalmente esto es como una ley de Kirchhoff pero con los signos cambiados y ahora con un término dependiente de L.
- Multiplicando por -1 tenemos

$$\mathcal{E} - IR = L\frac{dI}{dt}$$

o bien

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$



Circuito RL

- La ecuación diferencial ordinaria de primer orden inhomogénea

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + b$$

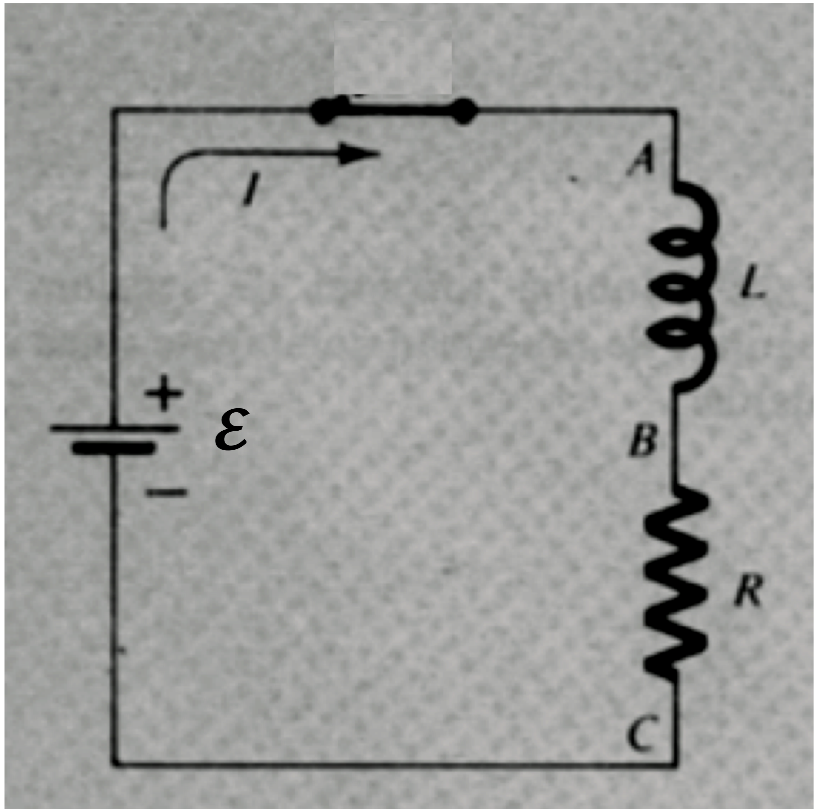
tiene como solución la suma de la solución general de la homogénea

$$\frac{dy_h}{dx} = ay_h$$

más una solución de la inhomogénea

$$y = y_h + y_i$$

donde $y_i = -\frac{b}{a}$



Circuito RL

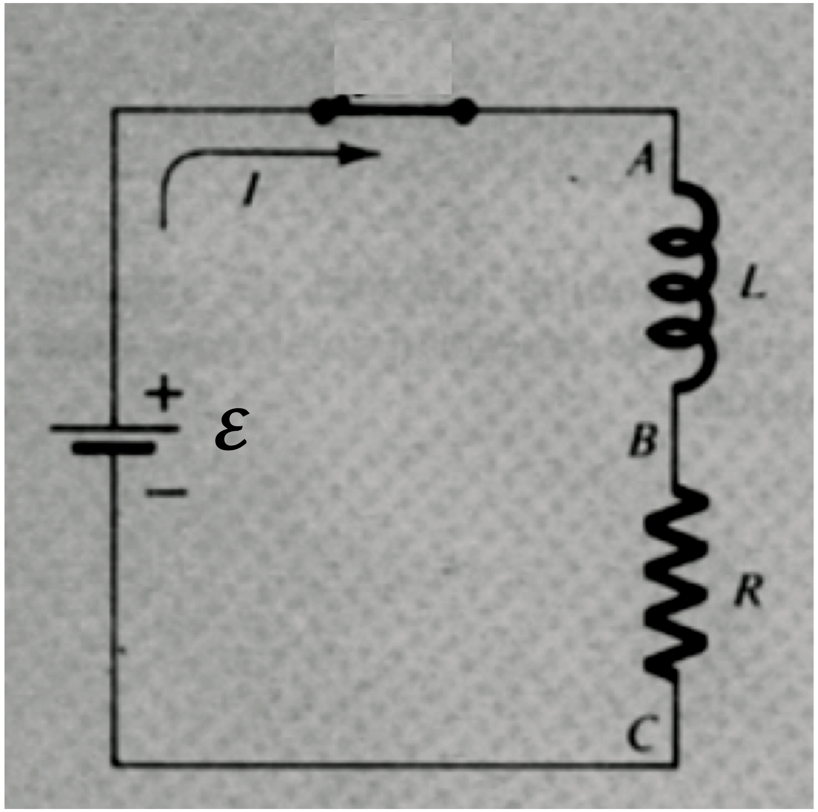
- En nuestro caso: $I = y, t = x, a = -\frac{R}{L}, b = \frac{\mathcal{E}}{L}$

La homogénea es

$$\frac{dI_h}{dt} = -\frac{R}{L} I_h$$

entonces

$$I_h = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$



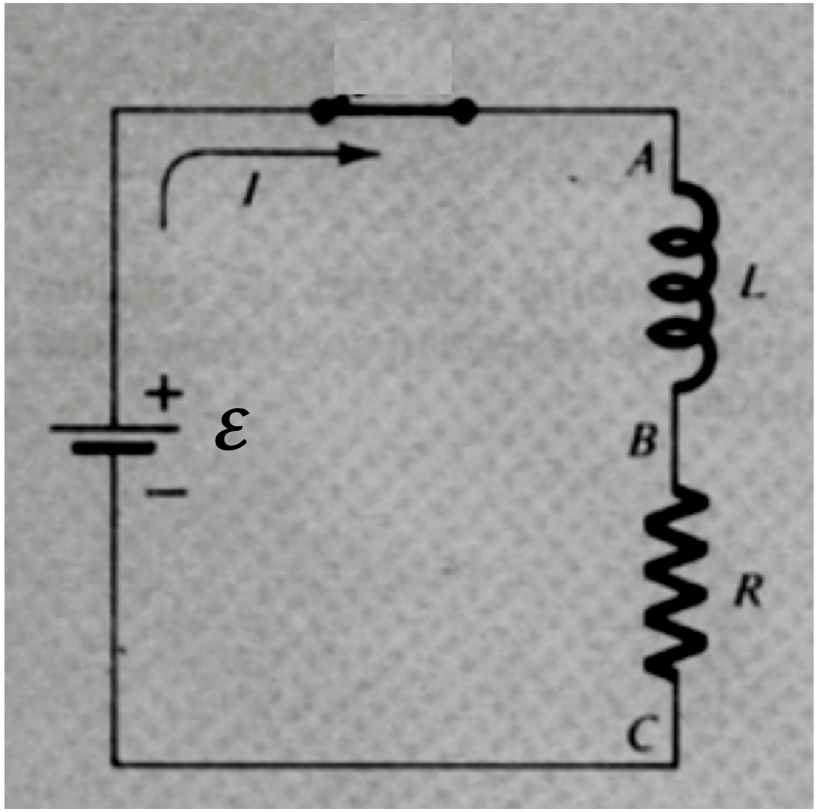
Circuito RL

- Por otro lado, una particular de la inhomogénea puede ser una constante:

$$I_i = -\frac{\frac{\varepsilon}{L}}{-\frac{R}{L}} = \frac{\varepsilon}{R}$$

entonces

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\varepsilon}{R}$$



Circuito RL

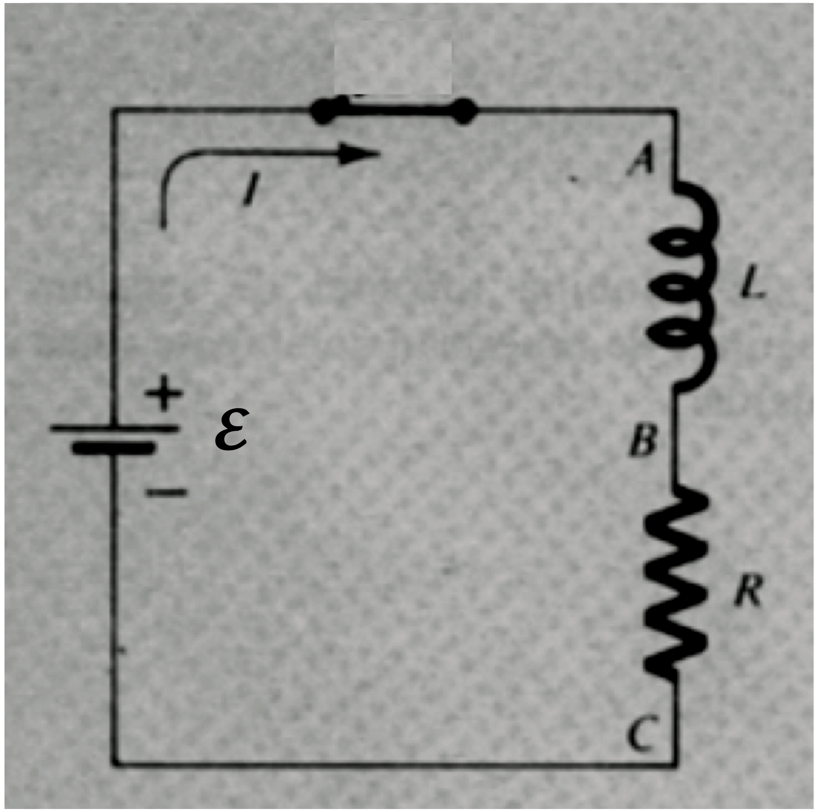
- Apliquemos las condiciones iniciales para despejar C
- En $t = 0$ cerramos el switch y todavía no hay corriente

$$I(0) = 0 = C + \frac{\mathcal{E}}{R}$$

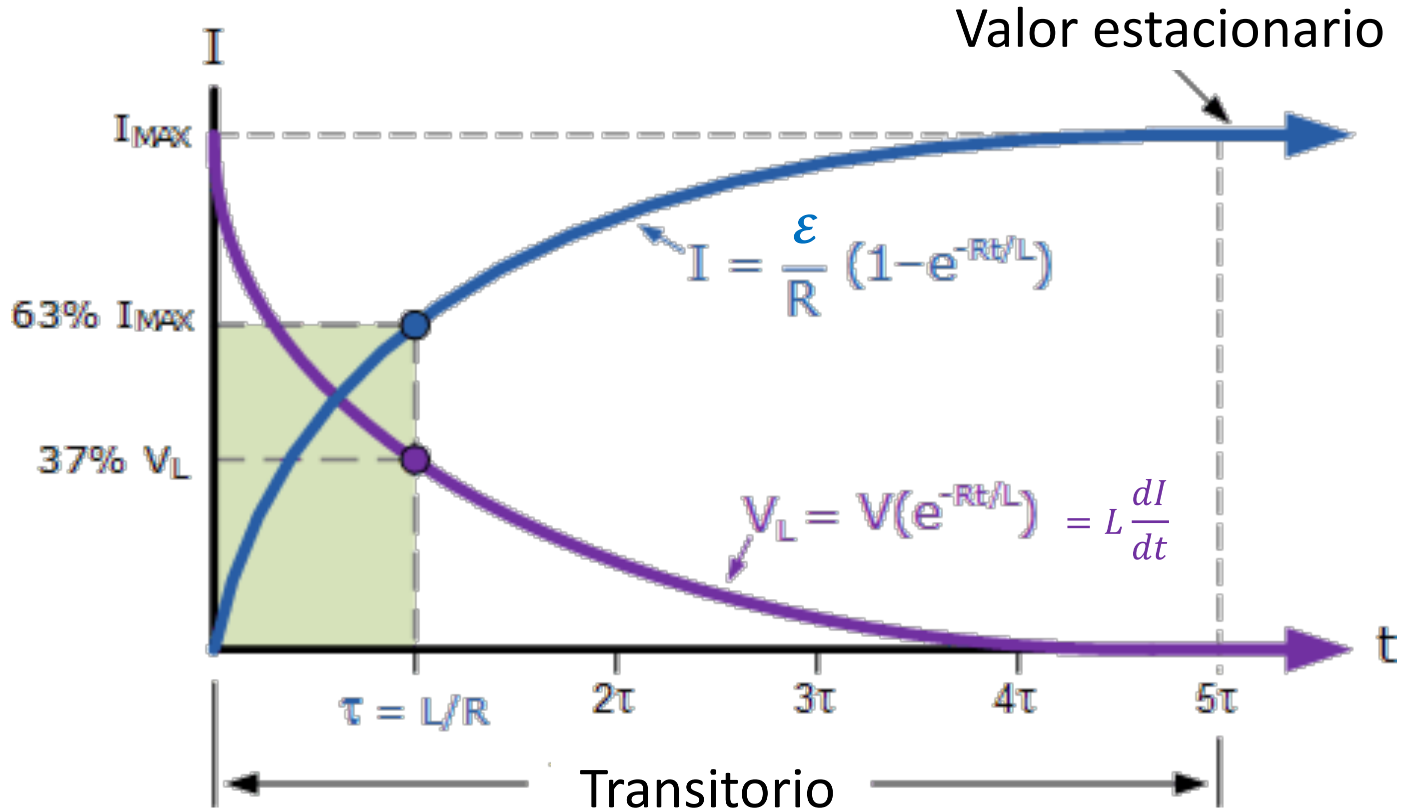
$$C = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

- Entonces la solución final es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$



Circuito RL



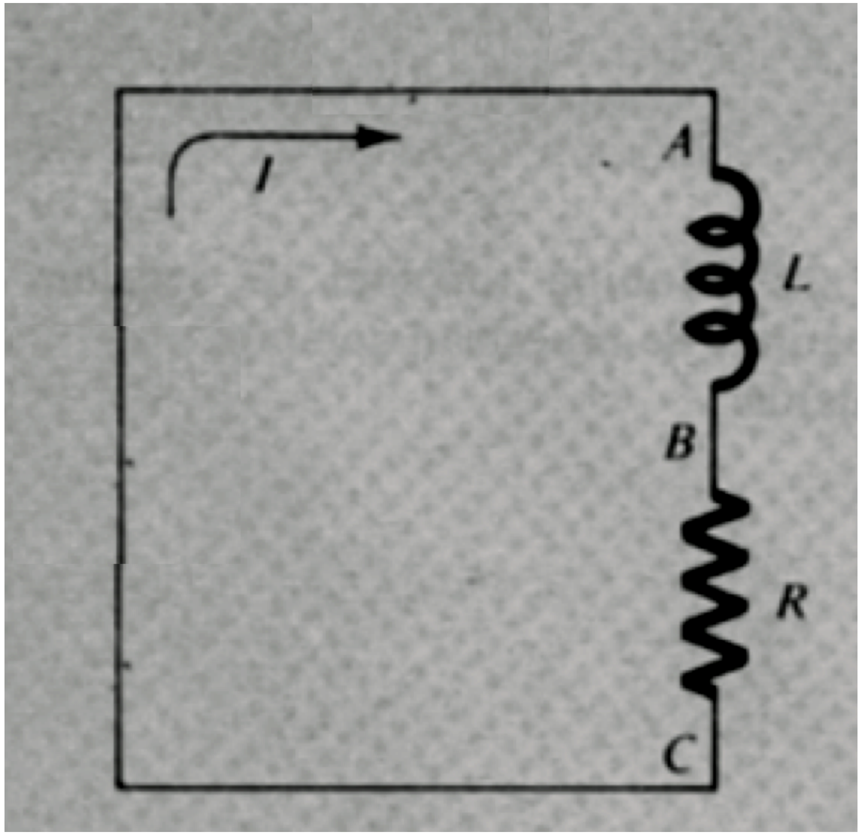
Valor estacionario
I
I_{MAX}
63% I_{MAX}
37% V_L
$I = \frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L})$
$V_L = V(e^{-Rt/L}) = L\frac{dI}{dt}$
t
$\tau = L/R$
2τ
3τ
4τ
5τ
Transitorio

Circuito RL

- Tras cerrar el switch, el circuito demora en alcanzar el valor estacionario de la corriente $\frac{\mathcal{E}}{R}$
- Esta demora viene dada por $\frac{L}{R}$, cuanto más grande es este cociente, más se demora.
- Esto es porque la bobina se opone via ley de Faraday a que circule la corriente que la induce.
- Esta oposición también se puede ver como una FEM inducida que se opone a $\mathcal{E}$ a medida que el flujo crece en la bobina a una tasa $L\frac{dI}{dt}$ almacenando energía.

Descarga de un circuito RL

- ¿Qué ocurre si abrimos el switch una vez que circula la corriente estacionaria?
- ¡Tenemos que tener mucho cuidado porque $\frac{dI}{dt}$ sería infinito y podríamos tener un arco en el switch!
- Entonces, conviene quitar la batería cortocircuitando la combinación RL manteniendo cerrado el switch.



Descarga de un circuito RL

- Sin la fuente, la ley de Faraday queda

$$-IR = L\frac{dI}{dt}$$

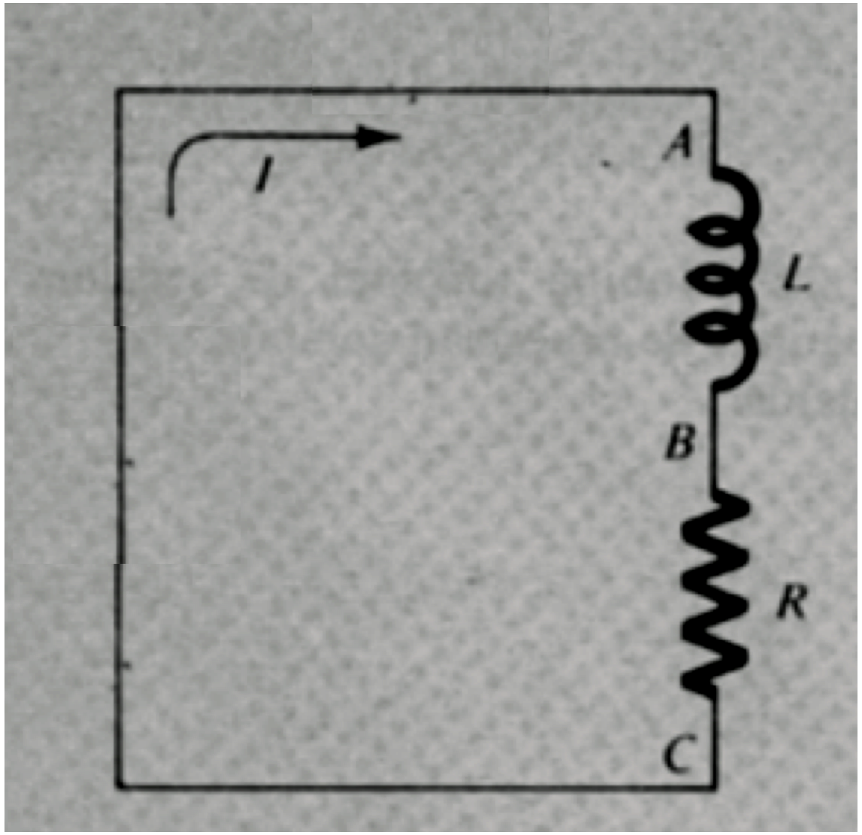
- A la solución ya la conocemos

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

y si empezamos a descargar en un $t = t_1$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}$$

donde $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$



Descarga de un circuito RL

- Sin la fuente, la ley de Faraday queda

$$-IR \ = L\frac{dI}{dt}$$

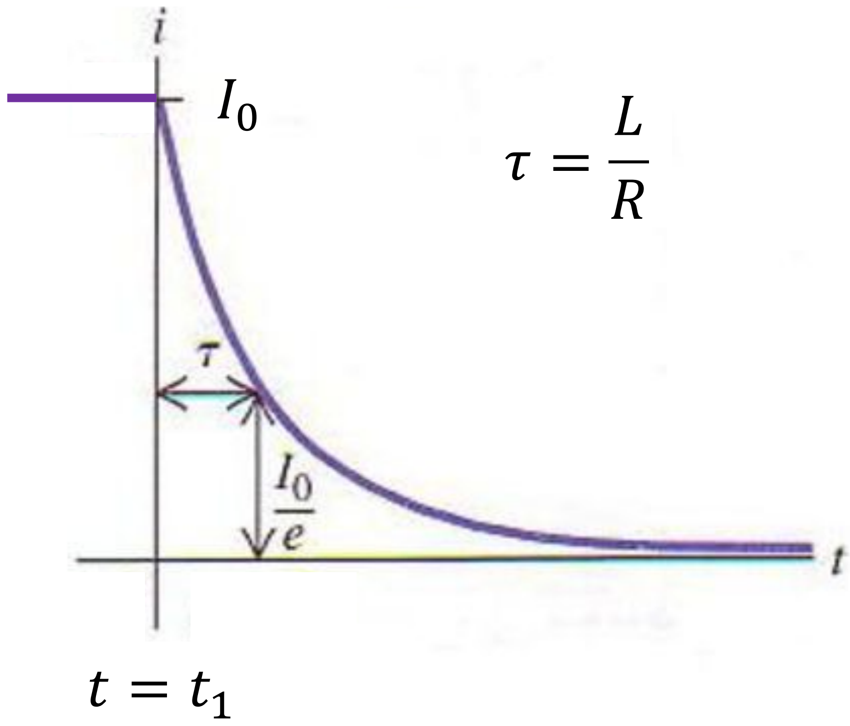
- A la solución ya la conocemos

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

y si empezamos a descargar en un $t = t_1$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}$$

donde $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$



Almacenamiento de energía en una bobina

- Durante la descarga del circuito, la resistencia R disipa energía.

- Recordemos que la energía disipada por unidad de tiempo es

$$P = VI = I^2R$$

- Entonces, la energía disipada a partir del instante t_1

$$U = \int_{t_1}^{\infty} I^2R \; dt = I_0^2R \int_{t_1}^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}(t-t_1)} \, dt$$

reemplazando $x = t - t_1$con $dx = dt$

Almacenamiento de energía en una bobina

- Reemplazando $x = \frac{2R}{L}(t - t_1)$ con $dx = \frac{2R}{L}dt$

$$U = I_0^2 R \frac{L}{2R} \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \frac{1}{2} L I_0^2$$

…ya que $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

- Entonces, en general se puede escribir

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

- Es natural considerarla como la energía almacenada en el campo magnético del inductor.

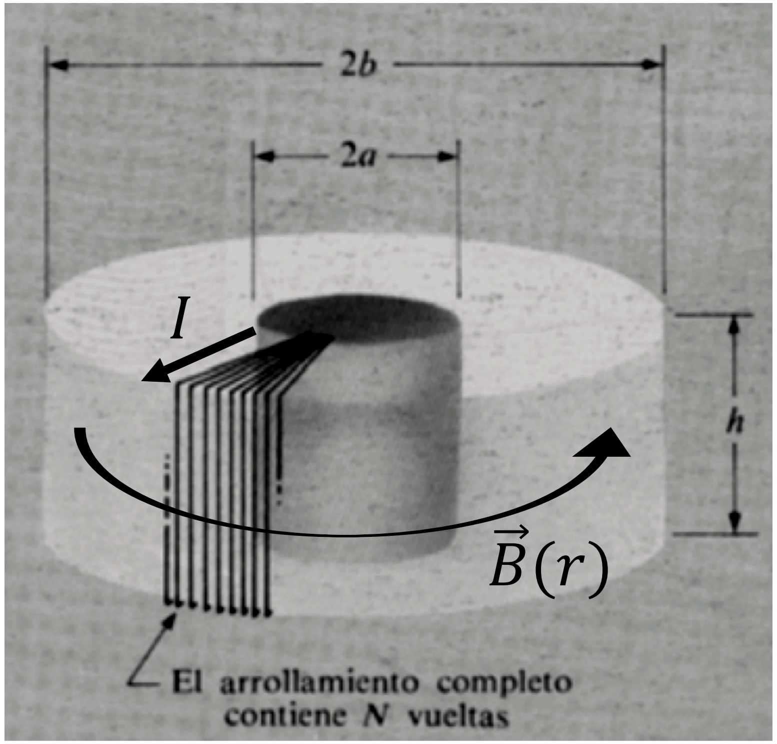
Almacenamiento de energía en una bobina

- Veamos para el caso de una bobina toroidal, la autoinductancia nos daba:

$$L = \frac{h\mu_0 N^2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Por otro lado, el campo magnético a una distancia r

$$B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$



Almacenamiento de energía en una bobina

- Integremos B^2 en todo el volumen del toroide:

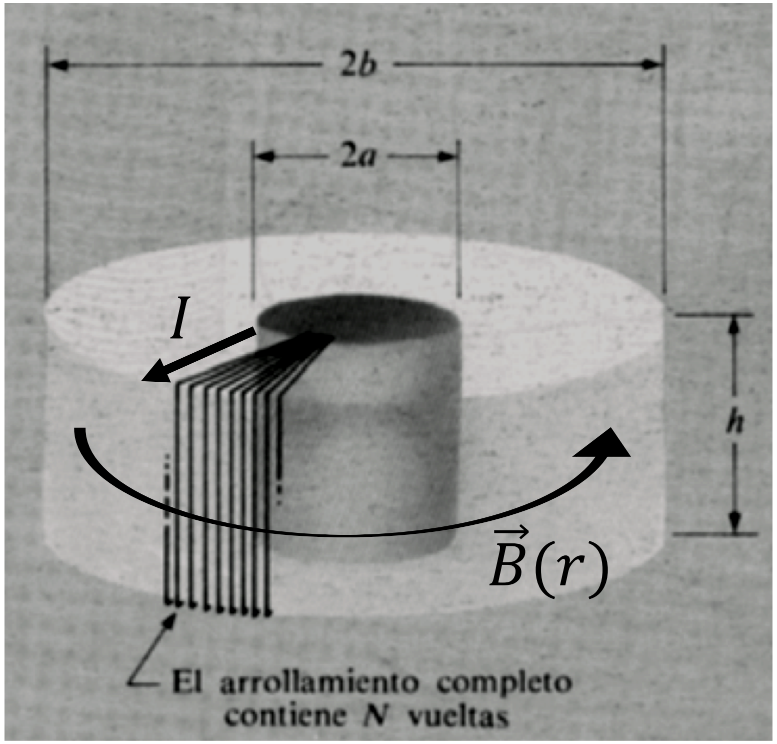
$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,dv = \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{NI}{r}\right)^2 2\pi r h\,dr = \frac{\mu_0}{4\pi}\,N^2 h I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Vemos inmediatamente que:

$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,dv = \tfrac{1}{2}LI^2$$

- Entonces:

$$\boxed{U = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\substack{\text{Todo}\\ \text{el campo}}} B^2\,dv}$$



Densidad de energía magnética

- Entonces, la cantidad de energía magnética por unidad de volumen es:

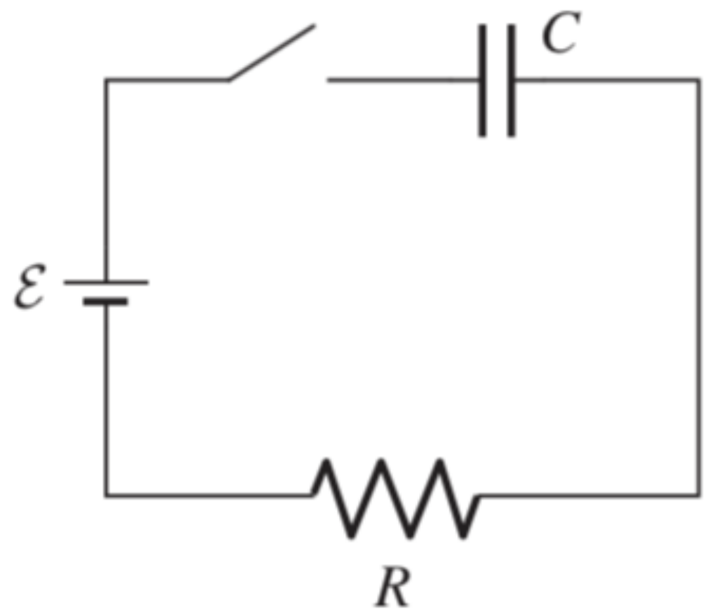
$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- Y la energía almacenada en un volumen V

$$\iiint_V u \, dv = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dv$$

Circuito RC

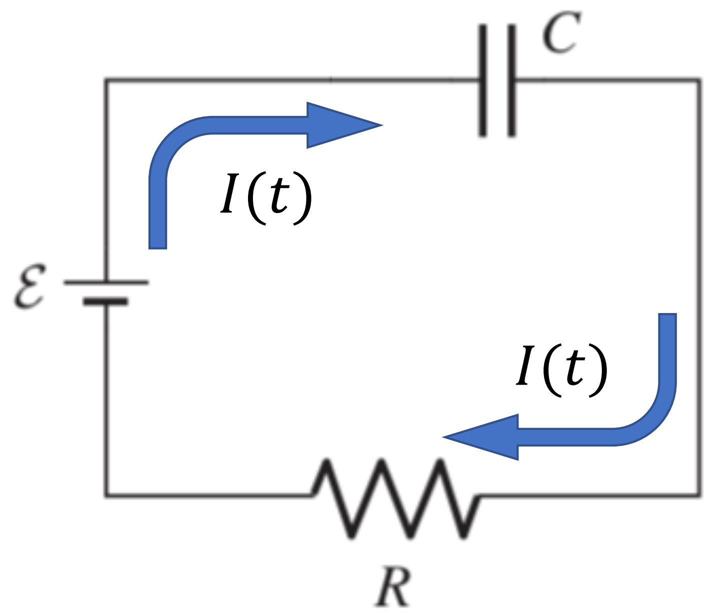
- Supongamos que colocamos una fuente de FEM = $\mathcal{E}$ conectada en serie a un capacitor C descargado y una resistencia R.
- El circuito está abierto de manera que no circula corriente.
- Estudiemos la respuesta del circuito en régimen transitorio desde que se cierra el switch y hasta que alcance un estado estacionario.



Circuito RC

- Al cerrarse el switch, una corriente $I(t)$ fluirá en el sentido de la flecha comenzando a cargar el capacitor.
- Del otro lado, una cantidad igual y opuesta de carga comenzará a acumularse dando lugar a una corriente $I(t)$ en el tramo que incluye a R.
- Por conservación de la carga, la carga en el capacitor y la corriente se relacionan como:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$



Circuito RC

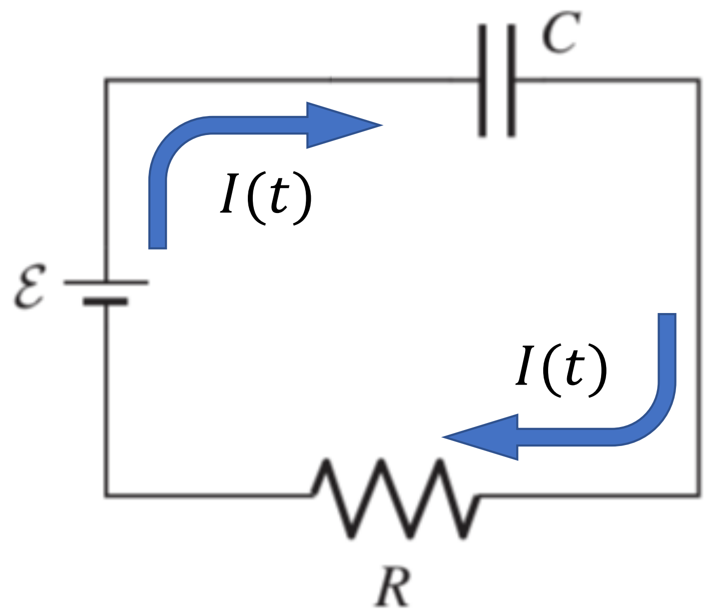
- Como no hay bobina, las leyes de Kirchhoff y de Faraday coinciden y entonces en el sentido de la corriente escribo:

$$\varepsilon - V_c - I(t)R = 0$$

donde

$$V_c = \frac{Q(t)}{C}$$

con la carga $Q(t)$ variando a medida que el capacitor se carga.



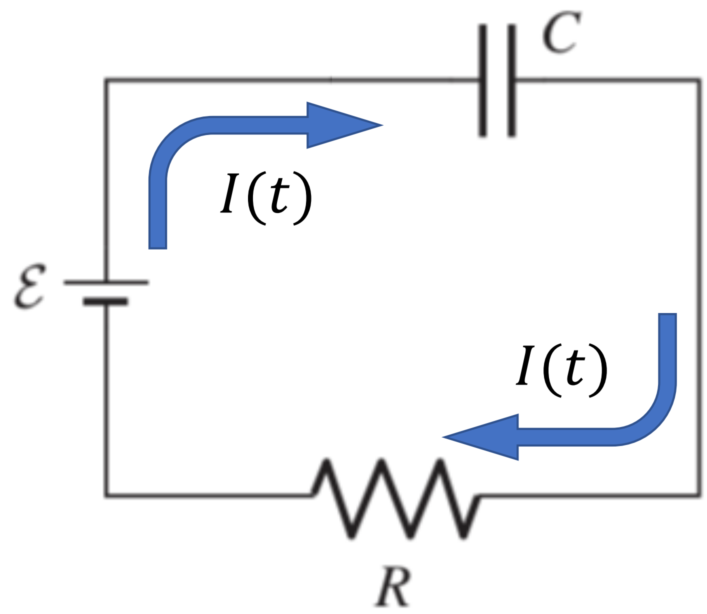
Circuito RC

- En términos de la carga, la ecuación anterior resulta:

$$\varepsilon - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt}$$

- Tenemos el mismo tipo de ecuación que resolvimos para el circuito RL

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + b$$



Conservación de la carga y signos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

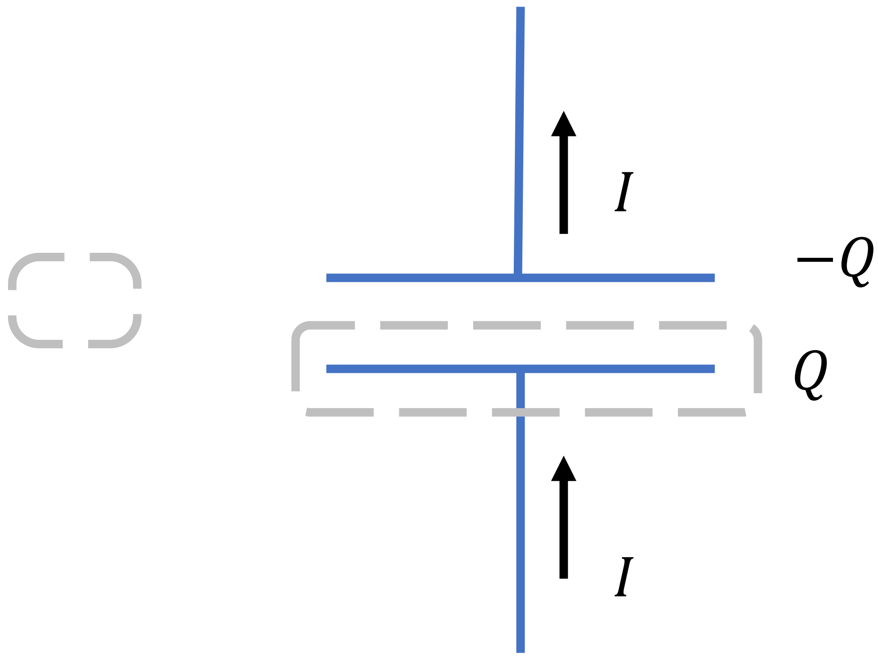
$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dv=-\iiint\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv$$

- Flujo entrante a la superficie cerrada

$$-I=-\frac{\partial}{\partial t}\iiint\rho\,dv$$

$$I=\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{dQ}{dt}$$

$Q(t)$ es la carga en la placa



Circuito RC

- Ahora tenemos: $Q = y, t = x, a = -\frac{1}{RC}$,

y $b = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}}{R}$

- Entonces, la solución homogénea es:

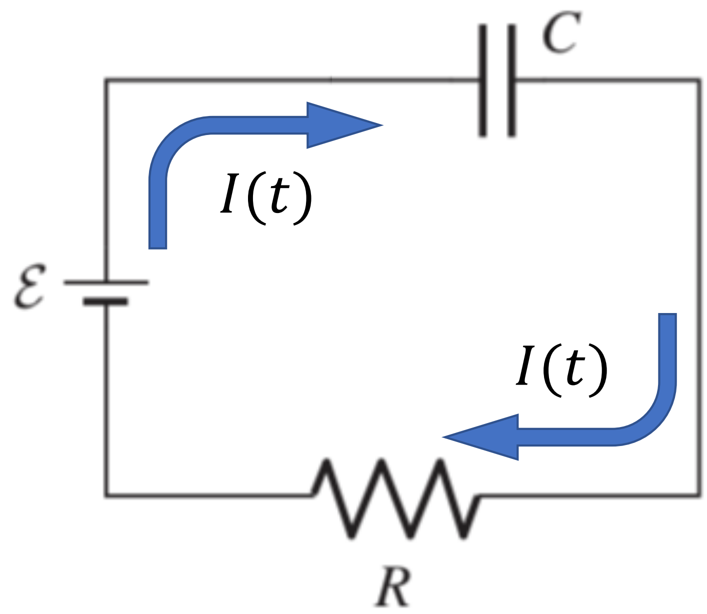
$$Q_h = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

- A la cual le sumamos la solución particular de la inhomogénea que es

$$Q_i = \boldsymbol{\mathcal{E}}C$$

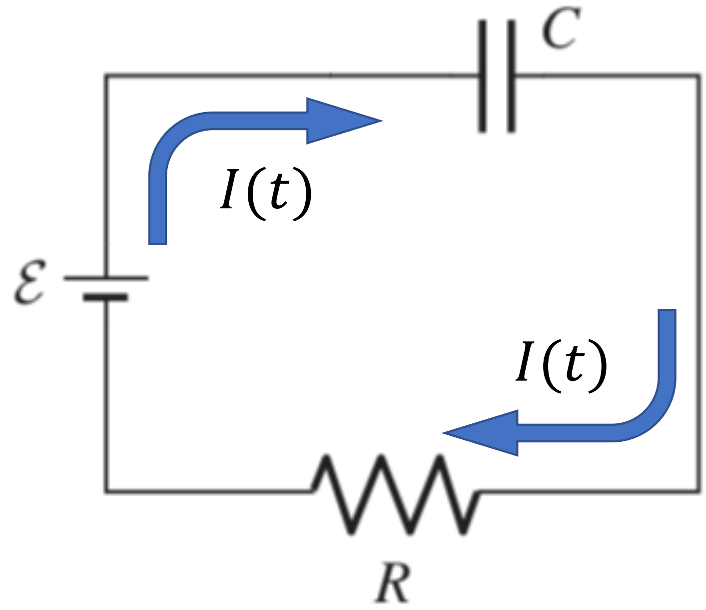
- Entonces

$$Q(t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}C + Ke^{-\frac{t}{RC}}$$



Circuito RC

- Apliquemos ahora la condición inicial…



Pregunta

¿Cuál es la condición inicial para la carga en el capacitor?

Circuito RC

- Apliquemos ahora la condición inicial

$$Q(0) = 0$$

el capacitor está inicialmente descargado

- Entonces:

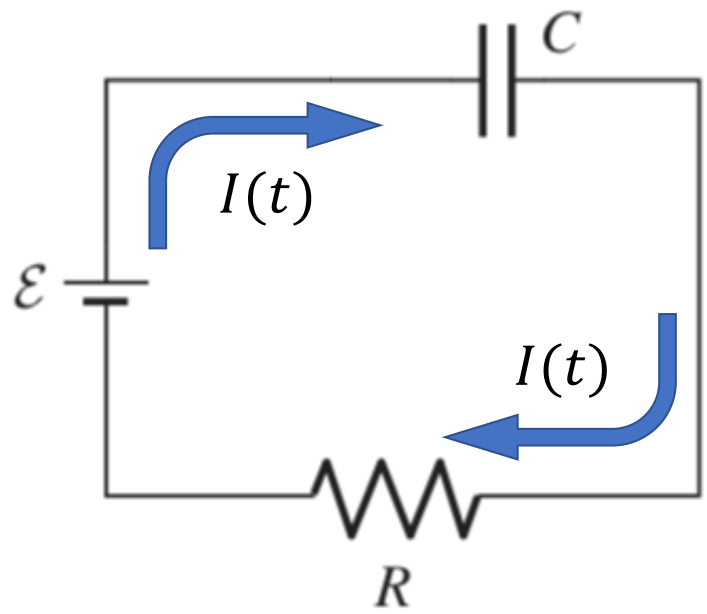
$$\boldsymbol{\mathcal{E}}C = -\ K$$
$$K = -\boldsymbol{\mathcal{E}}C$$

- Con lo cual la solución final es:

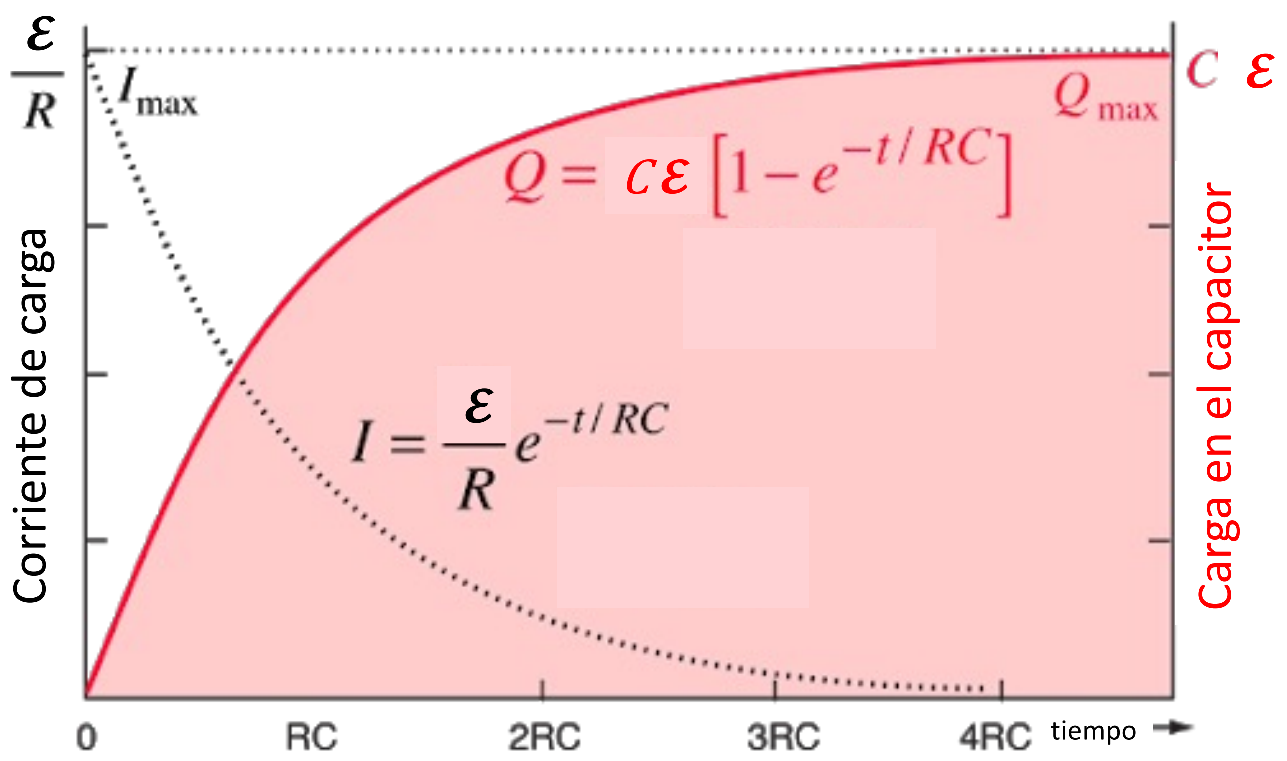
$$Q(t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

y

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}}{R}\ e^{-\frac{t}{RC}}$$



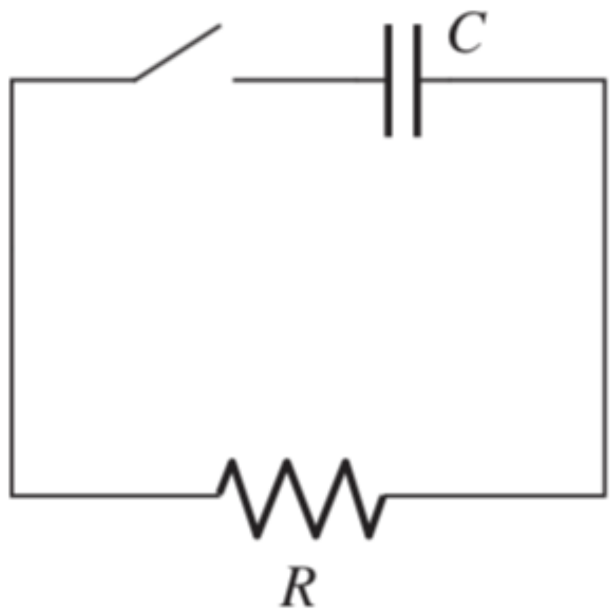
Circuito RC



$\frac{\varepsilon}{R}$
I_{max}
$C\ \varepsilon$
Q_{max}
$Q = C\varepsilon\left[1 - e^{-t/RC}\right]$
$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$
Corriente de carga
Carga en el capacitor
0
RC
2RC
3RC
4RC
tiempo

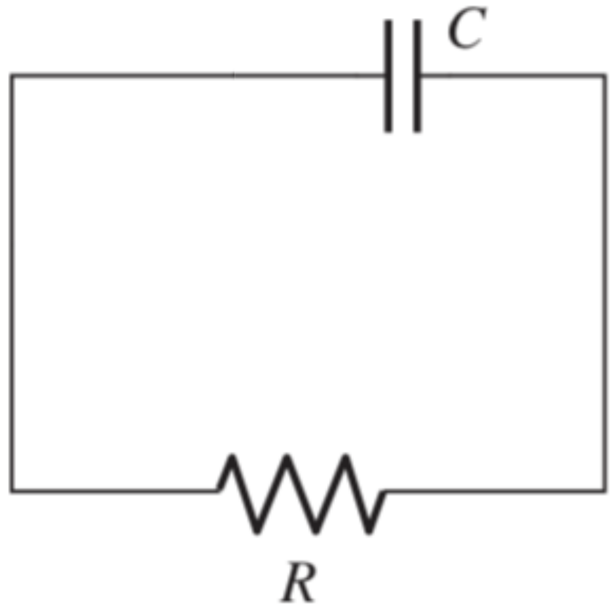
Descarga de circuito RC

- Ahora cortocircuitemos la fuente nuevamente y descarguemos el capacitor.



Descarga de circuito RC

- Ahora cortocircuitemos la fuente nuevamente y descarguemos el capacitor.
- En el instante t_1 cerramos el switch y fluye una corriente I.



Pregunta

- ¿Podemos anticipar la dirección de I al cerrar el switch ?

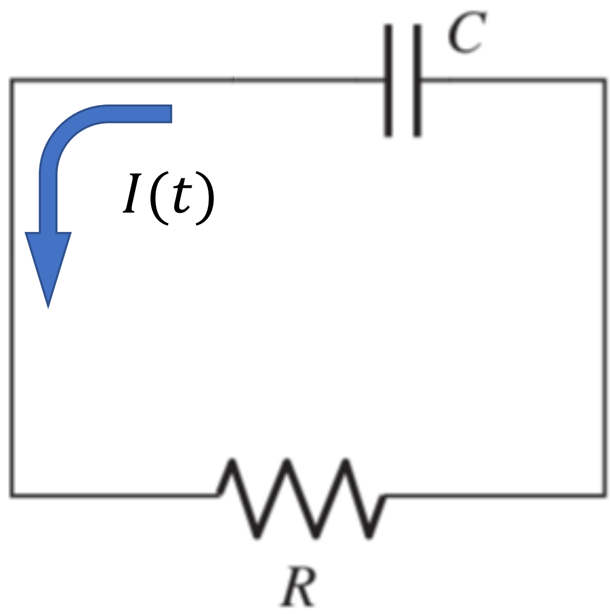
Descarga de circuito RC

- Ahora cortocircuitemos la fuente nuevamente y descarguemos el capacitor.

- En el instante t_1 cerramos el switch y fluye una corriente $I(t)$.

- La ley de Kirchhoff nos dice:

$$-\frac{Q}{C} = R\,\frac{dQ}{dt}$$



Descarga de circuito RC

- Y la solución ya la conocemos. Si comenzamos a contar desde un tiempo t_1:

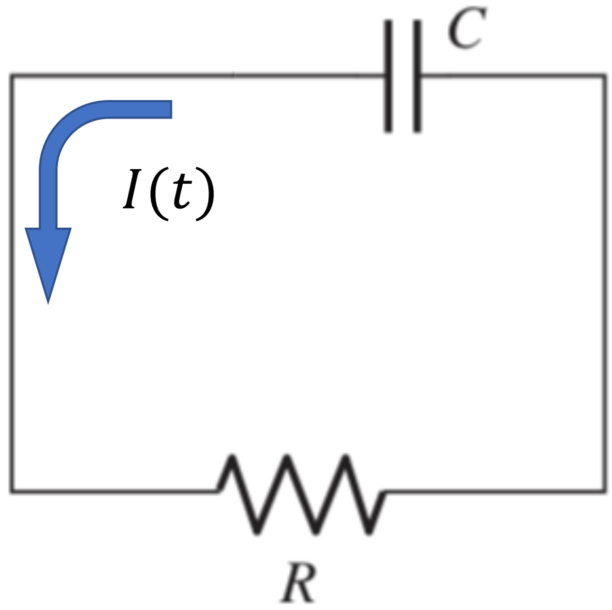
$$Q(t) = Ke^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

- La carga inicial del capacitor va a ser la que terminamos teniendo al cargarlo. Retomando el resultado anterior:

$$Q(t_1) = K = \boldsymbol{\mathcal{E}}C$$

- Entonces:

$$Q(t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}Ce^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$



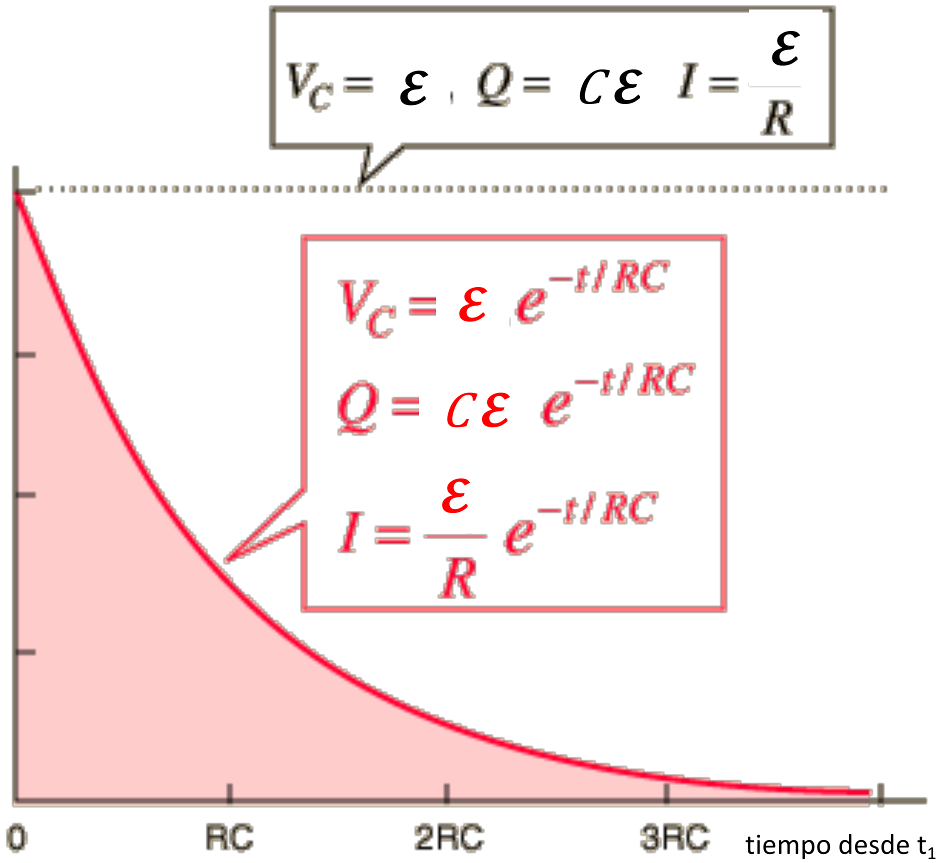
Descarga de circuito RC

- De la misma manera, la corriente decrecerá

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

- De la misma manera el voltaje en el capacitor:

$$V_c = \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E}\, e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$



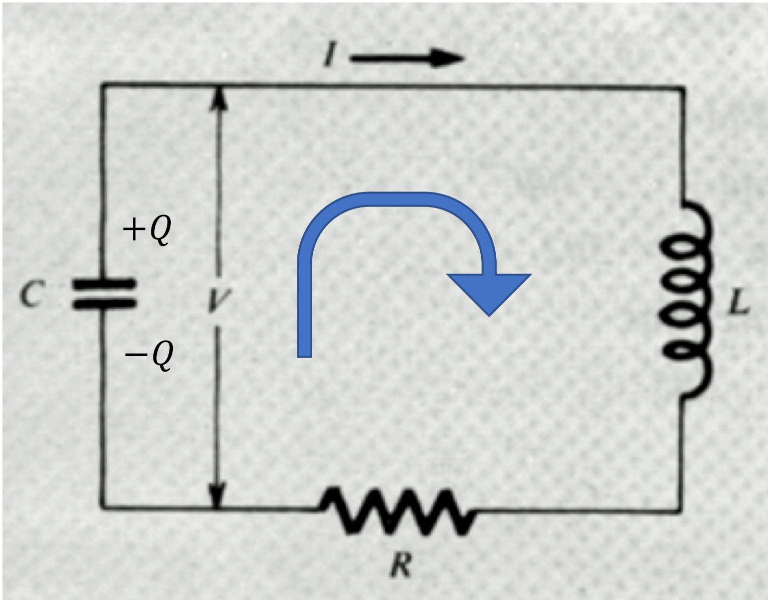
Circuito RLC en serie

- Supongamos el siguiente circuito con inductancia L, capacitor de capacidad C y resistencia R.
- Calculemos la diferencia de potencial V en el capacitor.
- Supogamos que el capacitor tiene una carga +Q en la placa superior y se descarga

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad Q = CV$$

- Entonces Faraday en el sentido de I queda:

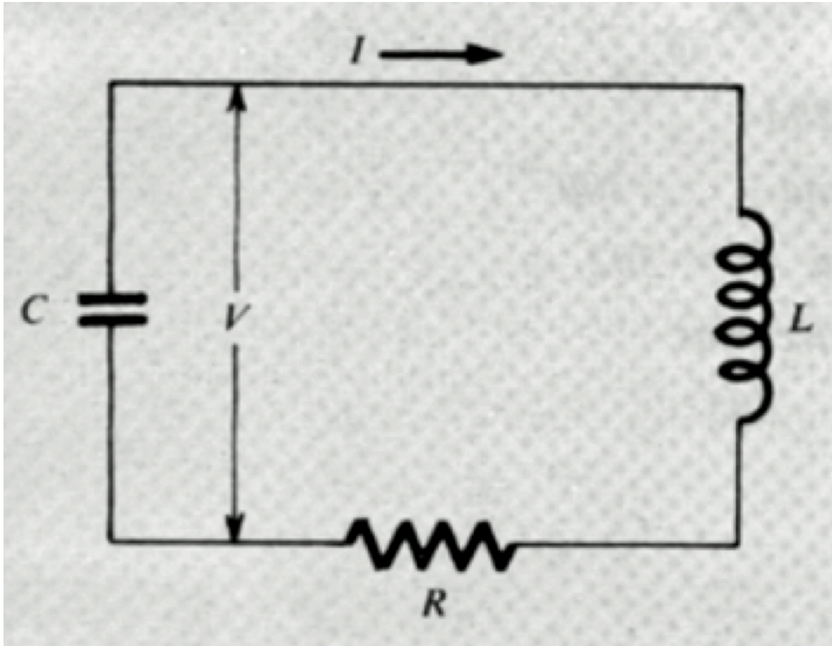
$$V = L\frac{dI}{dt} + RI$$



Circuito RLC en serie

- Poniendo todo en función de V llegamos a la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0$$



Ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes (a, b, c)

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

Polinomio característico

$$y = C_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + C_2 e^{\lambda t} \sin \mu t.$$

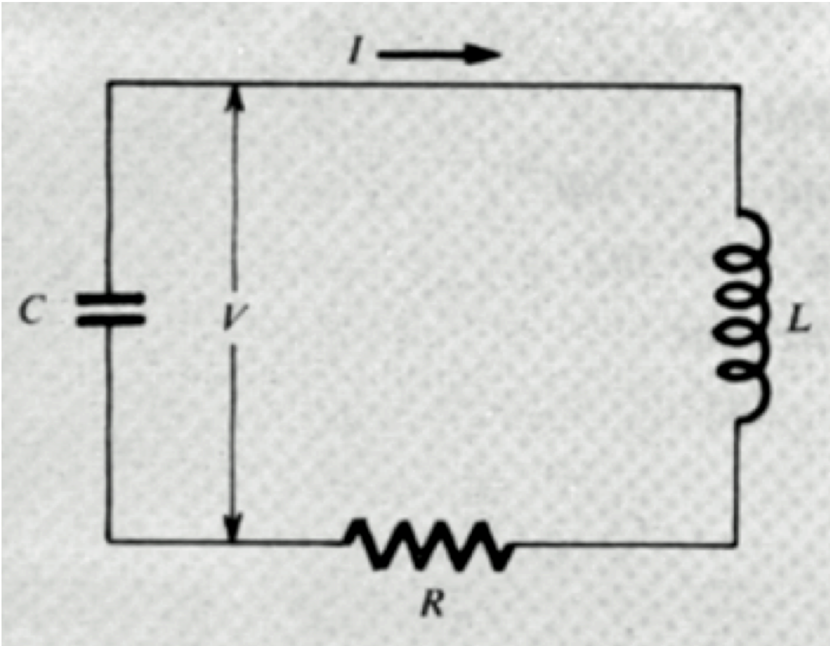
Donde $r = \lambda \pm i\mu$ con $\mu > 0$ son las dos raices complejas del polinomio característico

Circuito RLC en serie

- Entonces la solución general es

$$V(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \text{ sen } \omega t)$$

- Donde -$\alpha \pm i\omega$ son las raíces del polinomio característico
- A y B dependen de las condiciones iniciales.
- De hecho, dependiendo de cuándo comenzamos a medir el tiempo es posible quedarse con sólo $\cos \omega t$ o $\sin \omega t$



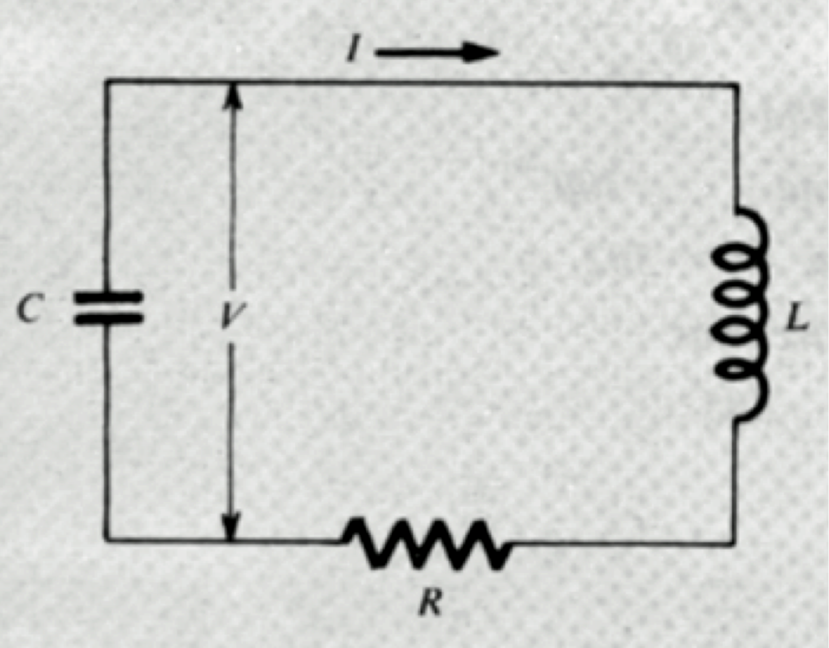
Circuito RLC en serie

- Probemos con la solución

$$V = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$$

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t}[-\alpha \cos \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t]$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \operatorname{sen} \omega t]$$

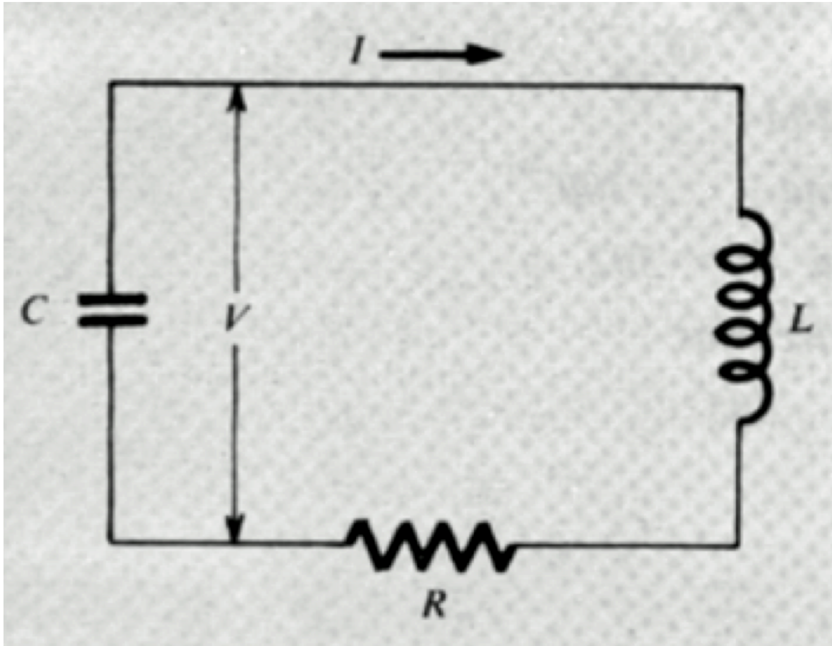


Circuito RLC en serie

- Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando los $Ae^{-\alpha t}$ llegamos

$$(\alpha^2 - \omega^2)\cos \omega t + 2\alpha\omega \operatorname{sen} \omega t - \frac{R}{L}(\alpha \cos \omega t + \omega \operatorname{sen} \omega t) + \frac{1}{LC}\cos \omega t = 0$$

- Esto puede satisfacerse para todo t si los coeficientes que acompañan a $\sin \omega t \;\; y \;\; \cos \omega t$ son ambos cero.



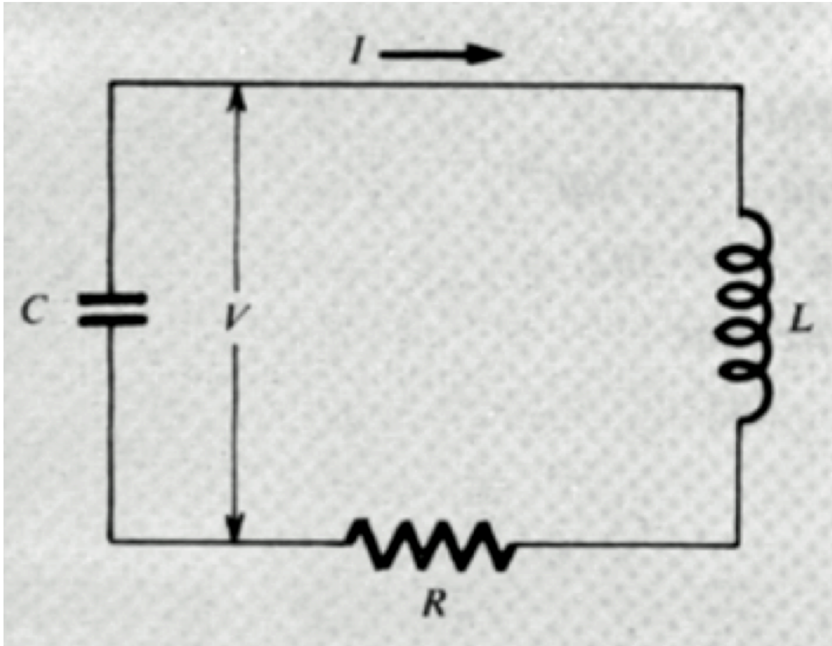
Circuito RLC en serie

- Esto quiere decir, por un lado que $(\sin \omega t)$

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0$$

- Lo cual quiere decir que

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$



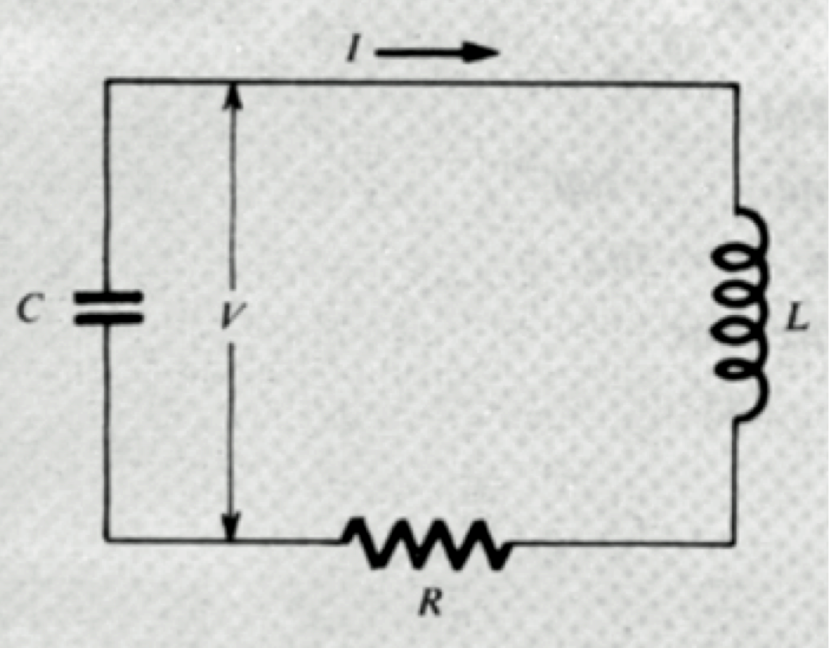
Circuito RLC en serie

- Por otro lado se tiene ($\cos \omega t$):

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

- Lo cual implica que:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$



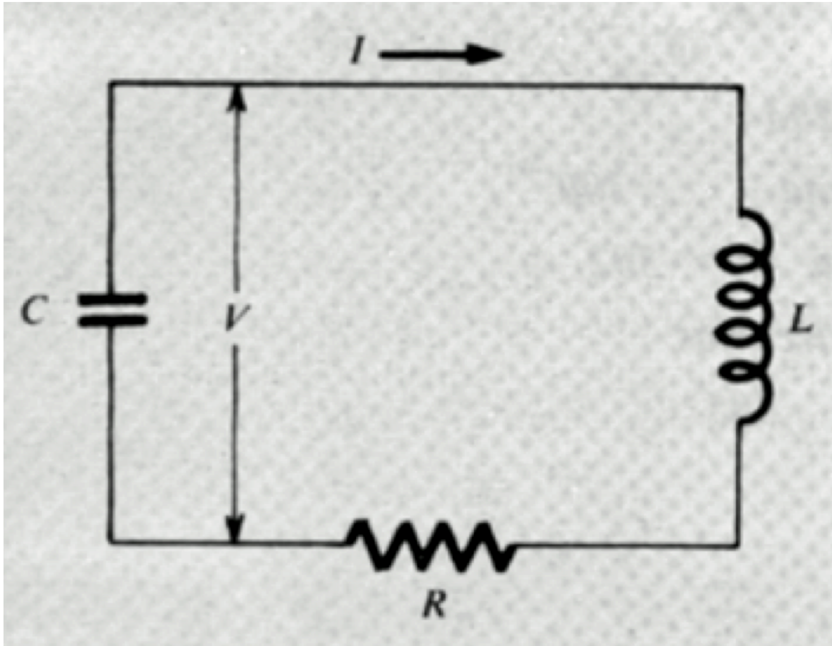
Circuito RLC en serie

- Siendo ω real, la ecuación anterior implica que

$$\frac{1}{LC} \geq \frac{R^2}{4L^2}$$

- Si tomamos el caso tal que usamos el > tenemos el caso de bajo amortiguamiento:

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Circuito RLC en serie

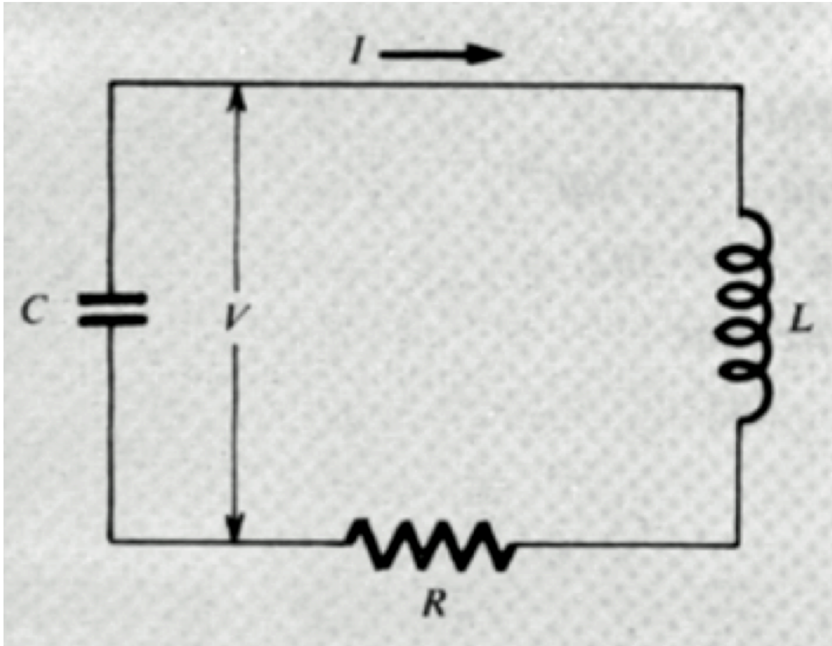
- Entonces

$$V = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right]$$

(solución cuando la amplitud de V es máxima en $t = 0$)

- Y la corriente nos queda

$$I = -C\frac{dV}{dt} = AC\omega e^{-\alpha t}\left[\sin\omega t - \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t\right]$$



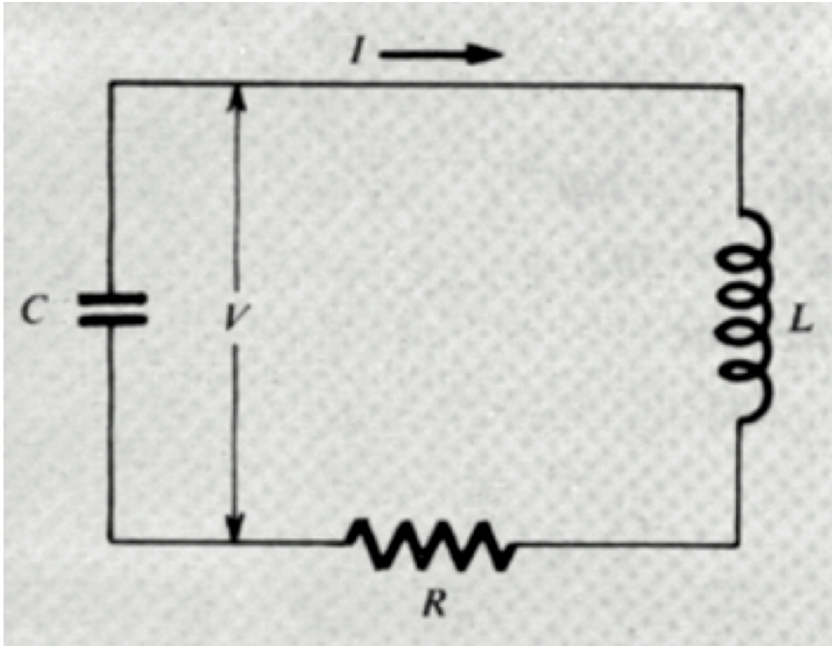
Circuito RLC en serie

- Tanto V como I oscilan y son amortiguados por un factor

$$e^{-\frac{R}{2L}t}$$

- La medida del amortiguamiento es el cociente

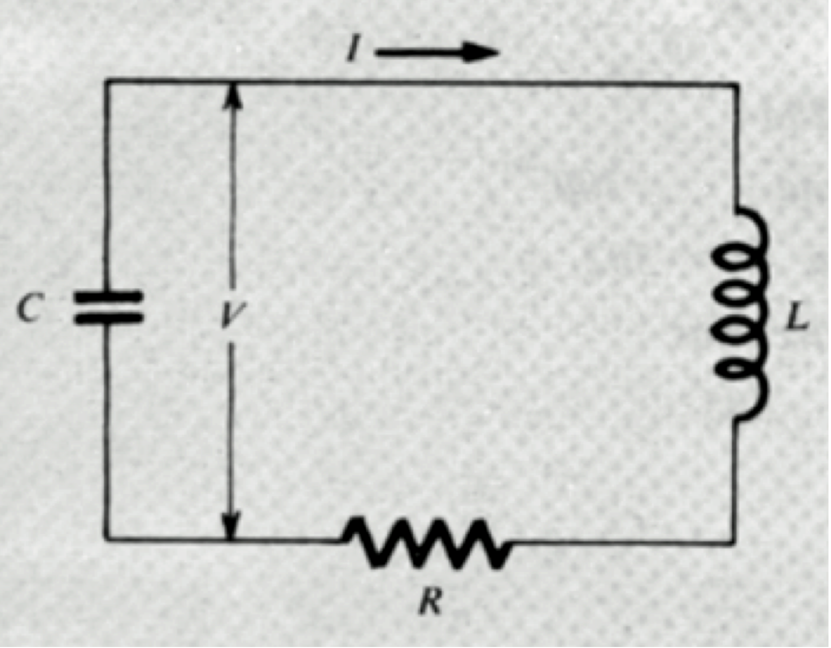
$$\frac{\alpha}{\omega}$$



Circuito RLC en serie

- Si $\frac{\alpha}{\omega}$ es muy pequeño, muchas oscilaciones van a ocurrir antes que la amplitud decaig considerablemente.
- El caso límite es cuando $\frac{\alpha}{\omega} = 0$ no hay amortiguamiento (es como si R no existiera)
- En ese caso, la frecuencia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



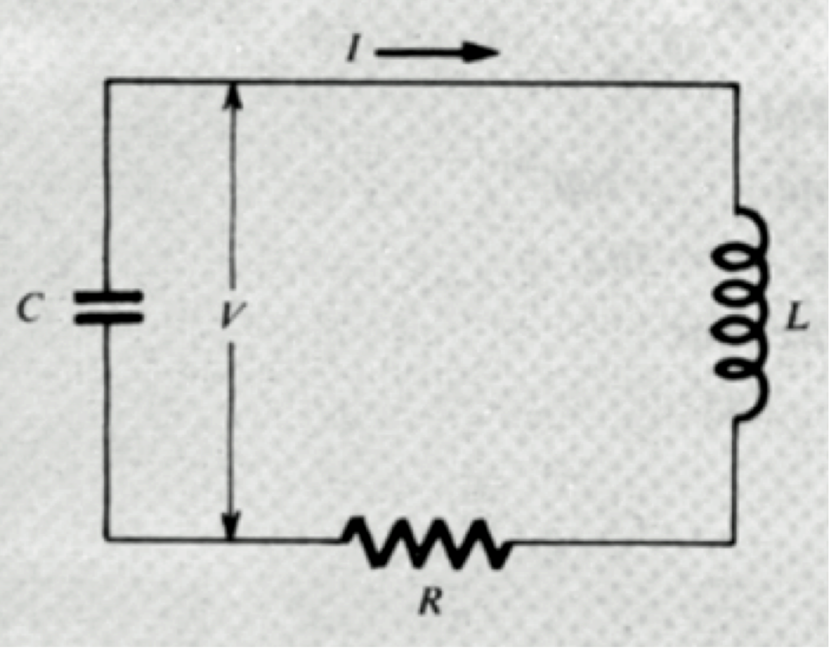
Circuito RLC en serie

- Existe un desfasaje entre V e I.

- En la medida en la que $\frac{\alpha}{\omega}$ sea muy pequeño,

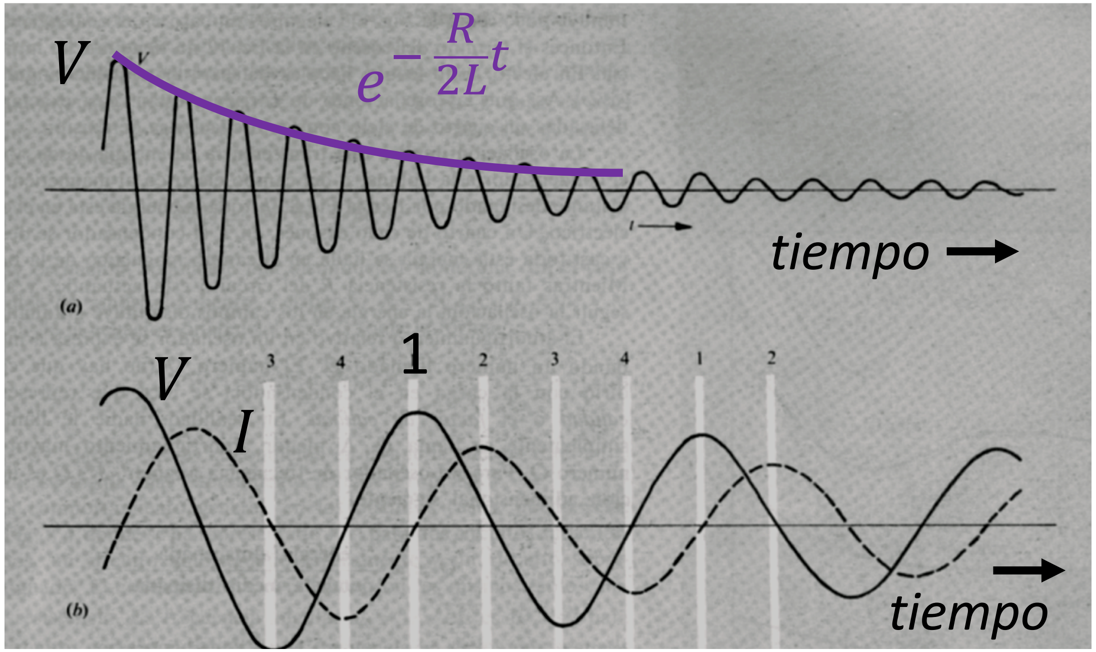
$$I \approx AC\omega e^{-\alpha t}[\sin \omega t]$$

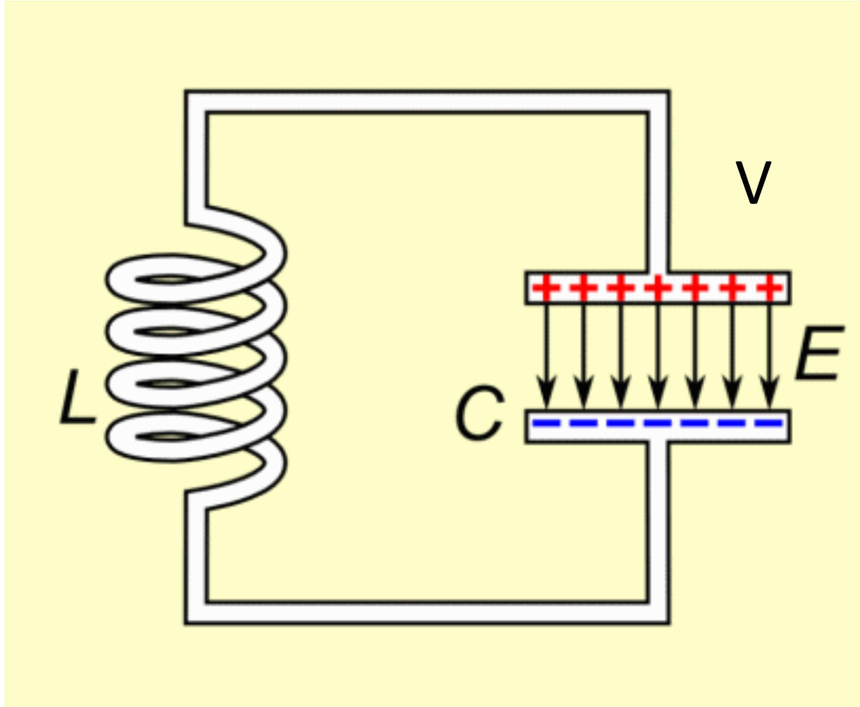
- Y el desfasaje en ese caso es de un cuarto de ciclo ($^{\pi}/_{2}$).



Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

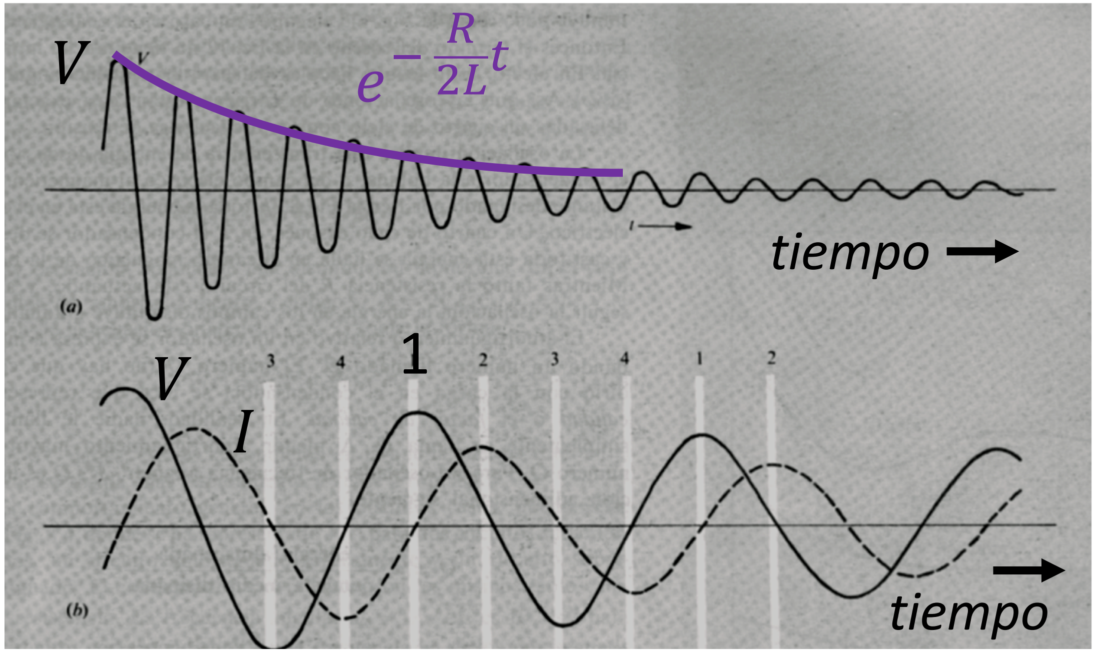
Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



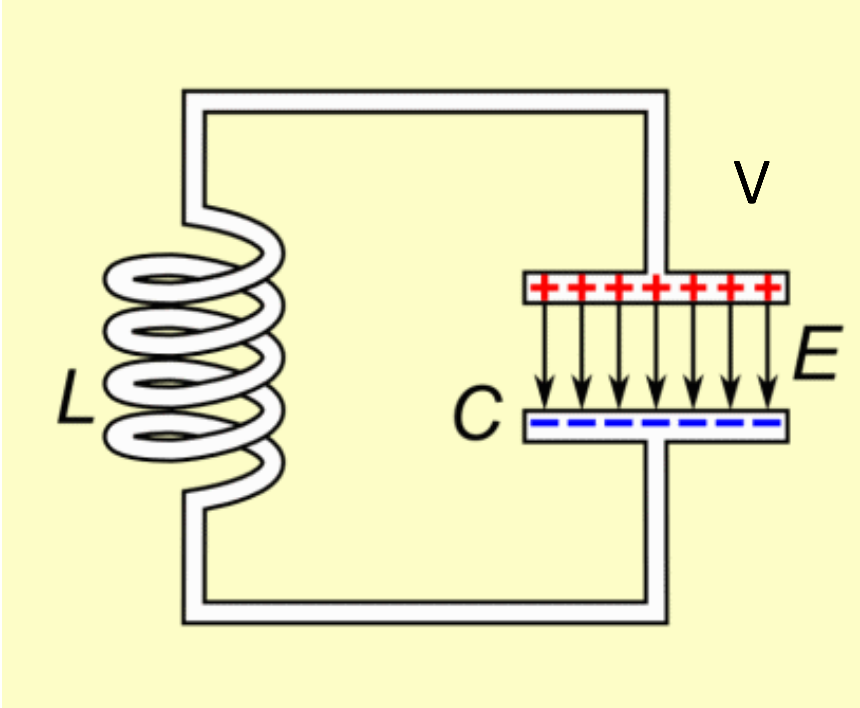


1. Capacitor cargado, corriente cero

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

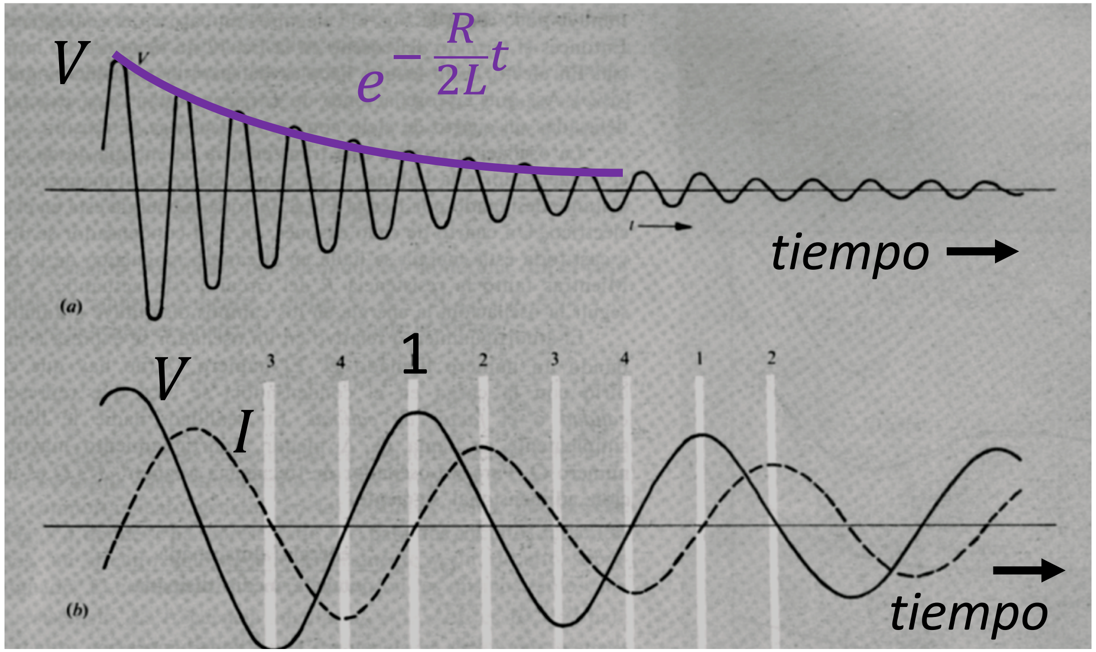


Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



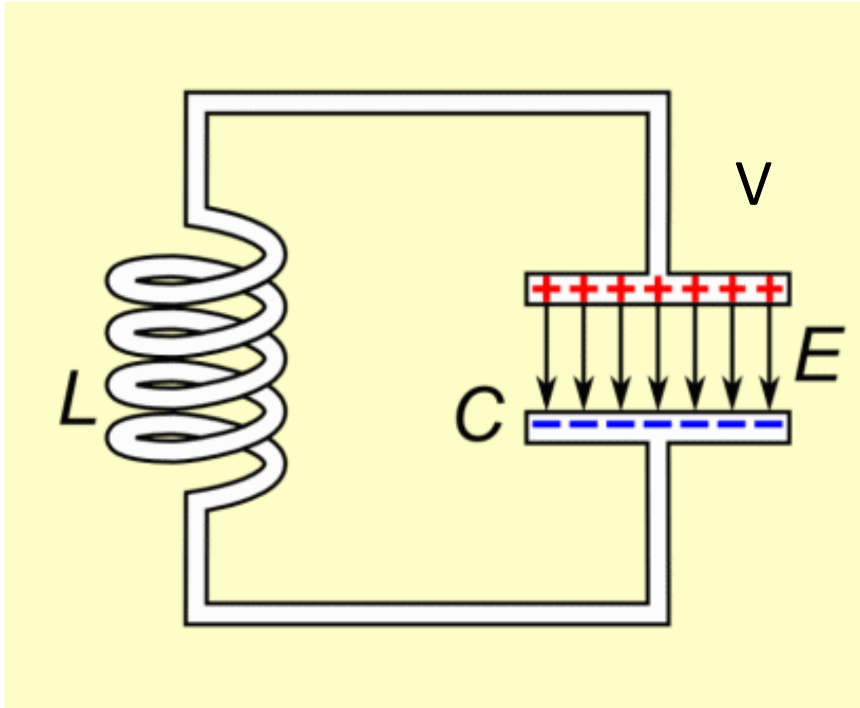
1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

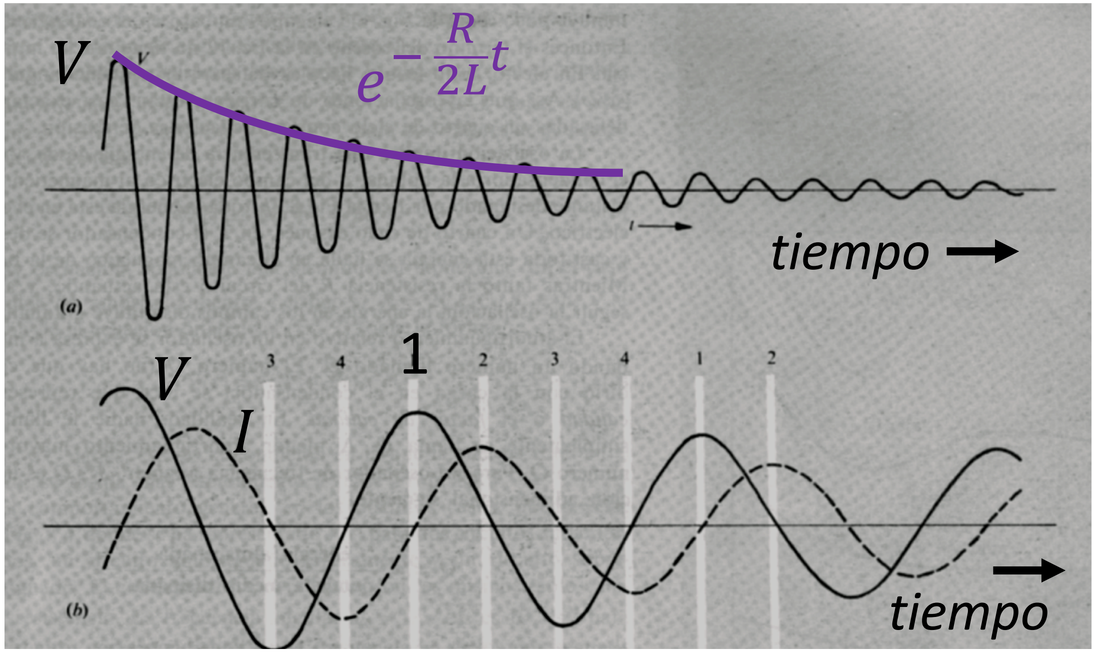


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero

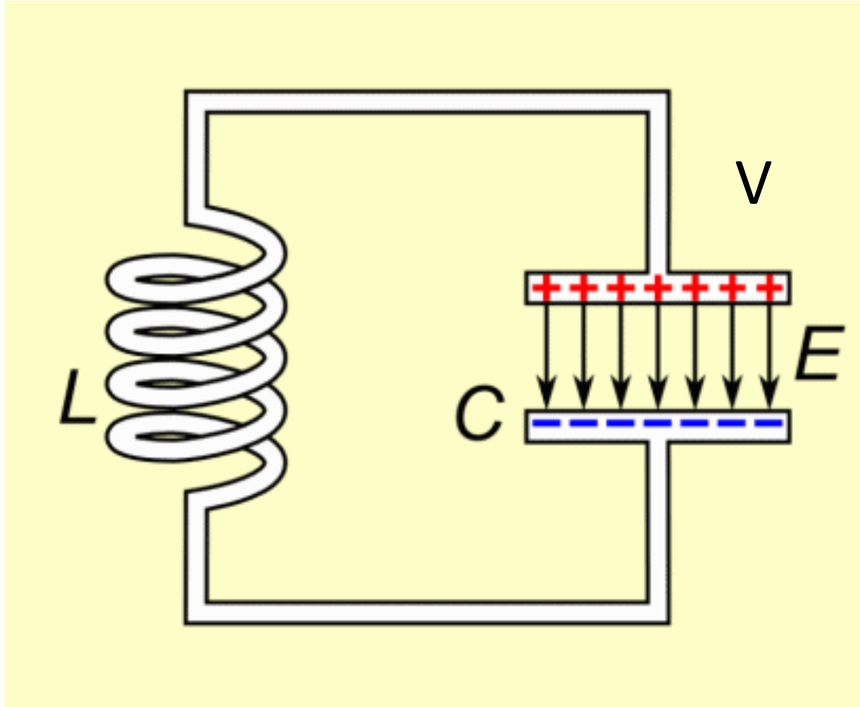
Caso sin amortiguamiento
($R = 0$)



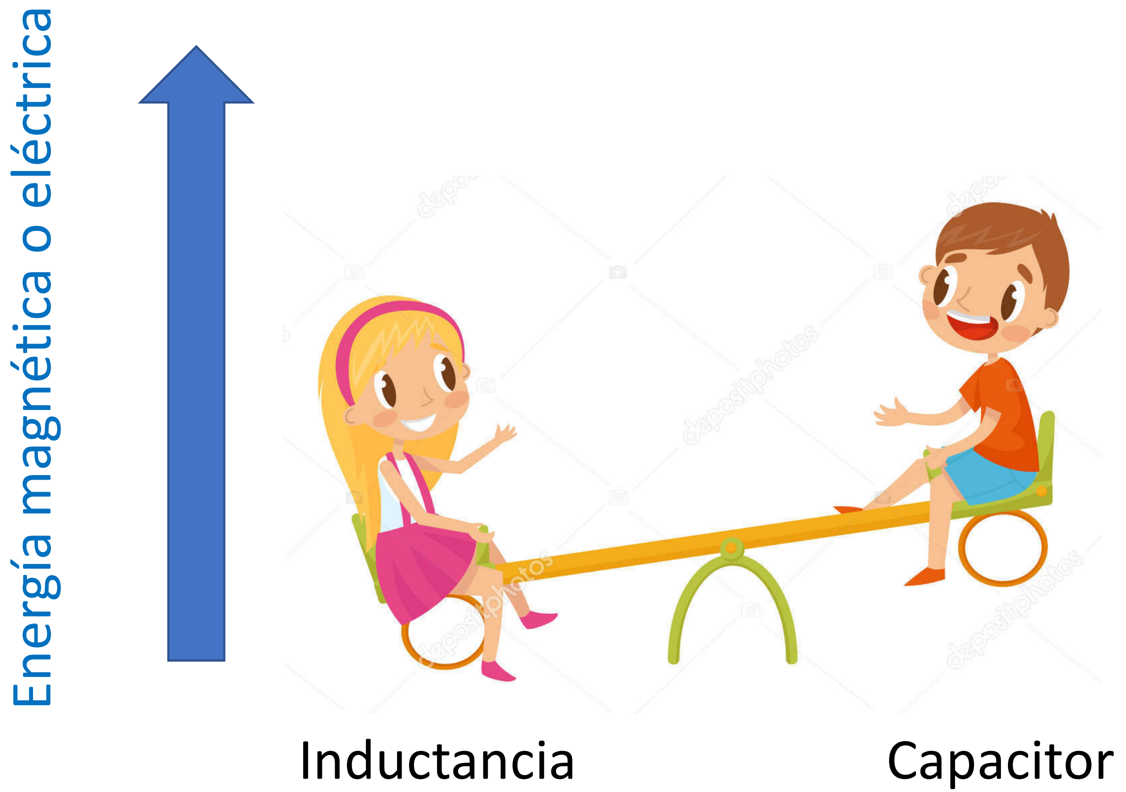
Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)



Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)

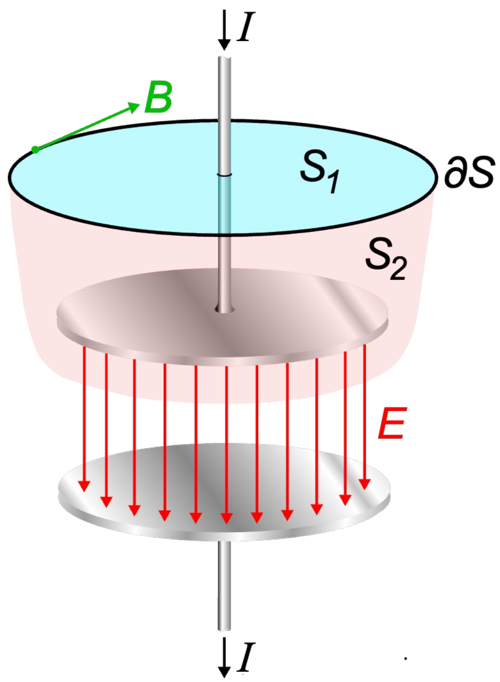


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero
4. Corriente máxima en sentido opuesto a 2, máximo campo magnético en sentido opuesto a 2, capacitor descargado.


Energía magnética o eléctrica
Inductancia
Capacitor

La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- Conocemos bien la ley de Ampère
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$
- Supongamos un capacitor cargándose a una velocidad dada por
$$I = \frac{dQ}{dt}$$
- La corriente I da lugar a un campo magnético $\vec{B}$ tal que si la superficie S_1 está limitada por el camino ∂S:
$$\oint_{\partial S} \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{J}\cdot\overrightarrow{ds} = \mu_0 I$$

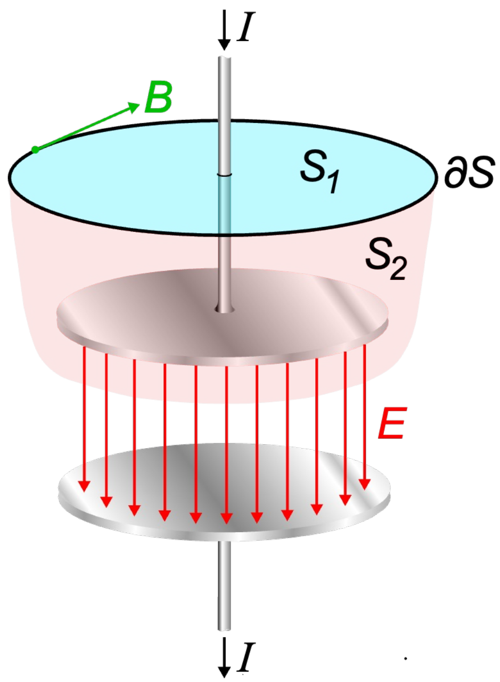


La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- El resultado debe valer para toda superficie limitada por ∂S incluyendo S_2 a través de la cual no pasa corriente !!

- Maxwell corrigió la ley de Ampère para salvar esta inconsistencia agregando un término dependiente del flujo de la derivada temporal del campo eléctrico $\vec{E}$:en el capacitor

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{J} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I = \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{ds}$$



La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- Con lo cual la ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial es:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- Como vemos el segundo término del segundo miembro sólo aparece en situaciones no estacionarias.