Regímenes transitorios

- Circuito RL

- Circuito RC

- Circuito RLC

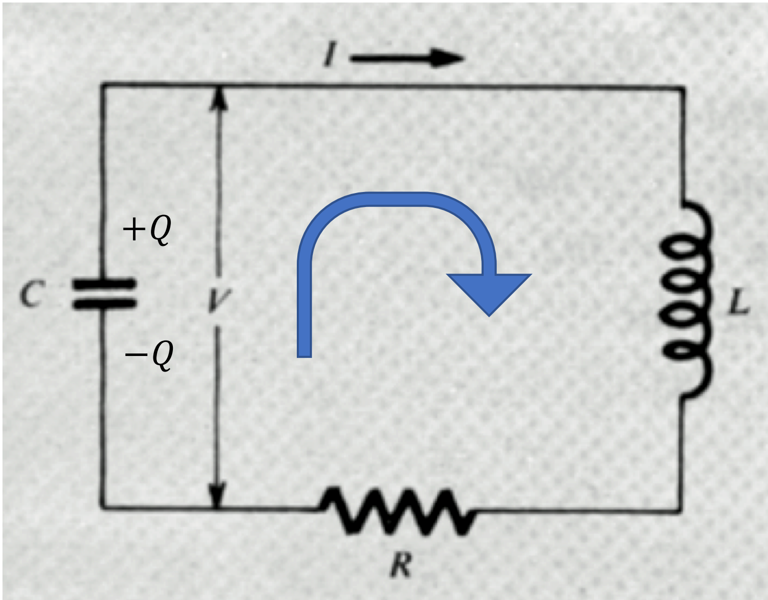
Circuito RLC en serie

- Supongamos el siguiente circuito con inductancia L, capacitor de capacidad C y resistencia R.
- Calculemos la diferencia de potencial V en el capacitor.
- Supogamos que el capacitor tiene una carga +Q en la placa superior y se descarga

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad Q = CV$$

- Entonces Faraday en el sentido de I queda:

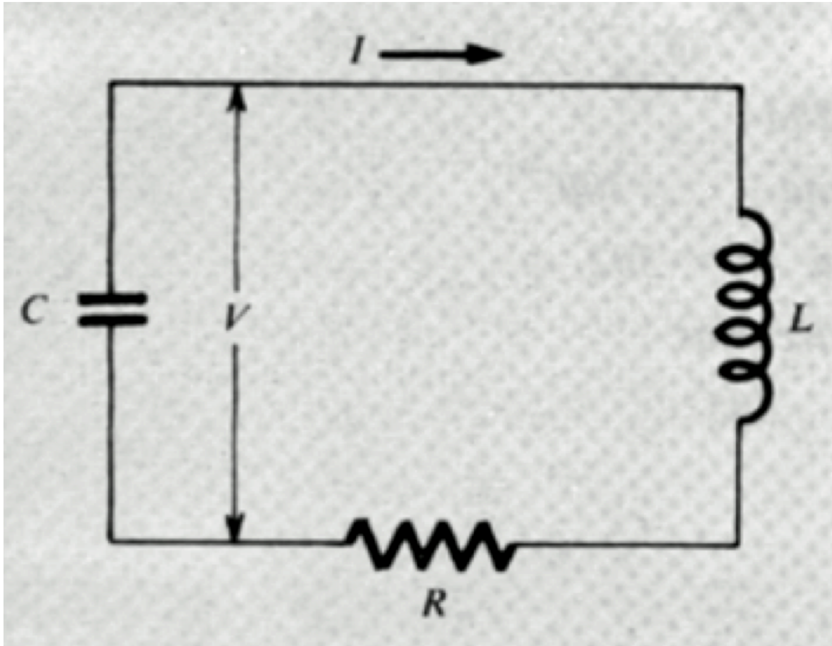
$$V = L\frac{dI}{dt} + RI$$



Circuito RLC en serie

- Poniendo todo en función de V llegamos a la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0$$



Ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes (a, b, c)

$$\boxed{a y'' + b y' + c y = 0.}$$

$$\boxed{a r^2 + b r + c = 0}$$

Polinomio característico

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + C_2 e^{\lambda t} \sin \mu t.}$$

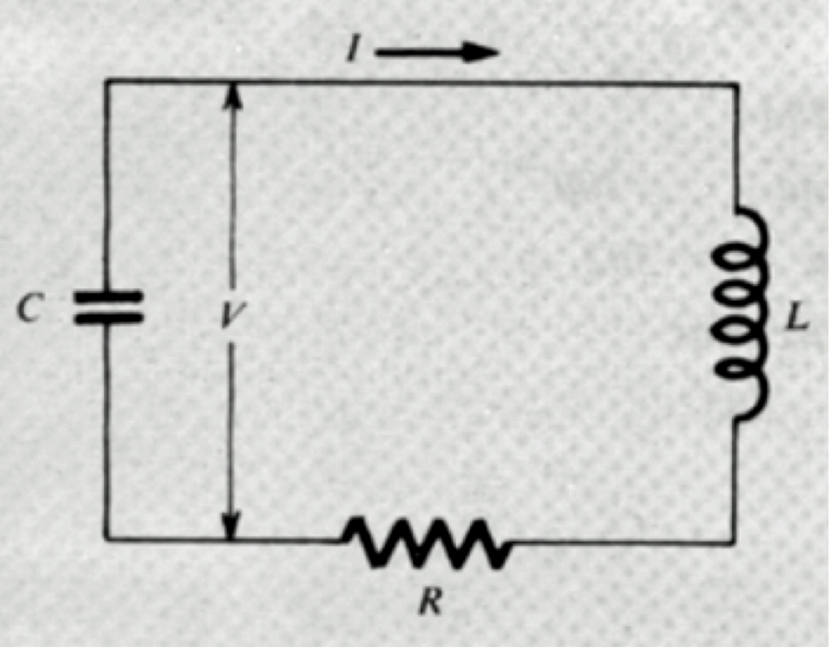
Donde $r = \lambda \pm i\mu$ con $\mu > 0$ son las dos raices complejas del polinomio característico

Circuito RLC en serie

- Entonces la solución general es

$$V(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)$$

- Donde -$\alpha \pm i\omega$ son las raíces del polinomio característico
- A y B dependen de las condiciones iniciales.
- De hecho, dependiendo de cuándo comenzamos a medir el tiempo es posible quedarse con sólo $\cos \omega t$ o $\sin \omega t$

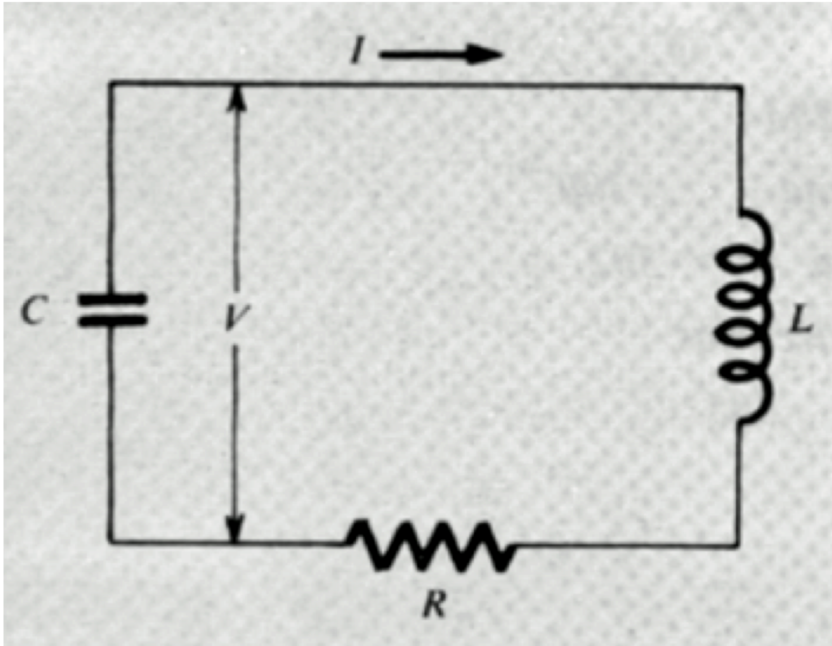


Circuito RLC en serie

- Probemos con la solución

$$V = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$$

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t}[-\alpha\cos\omega t - \omega\,\mathrm{sen}\,\omega t]$$



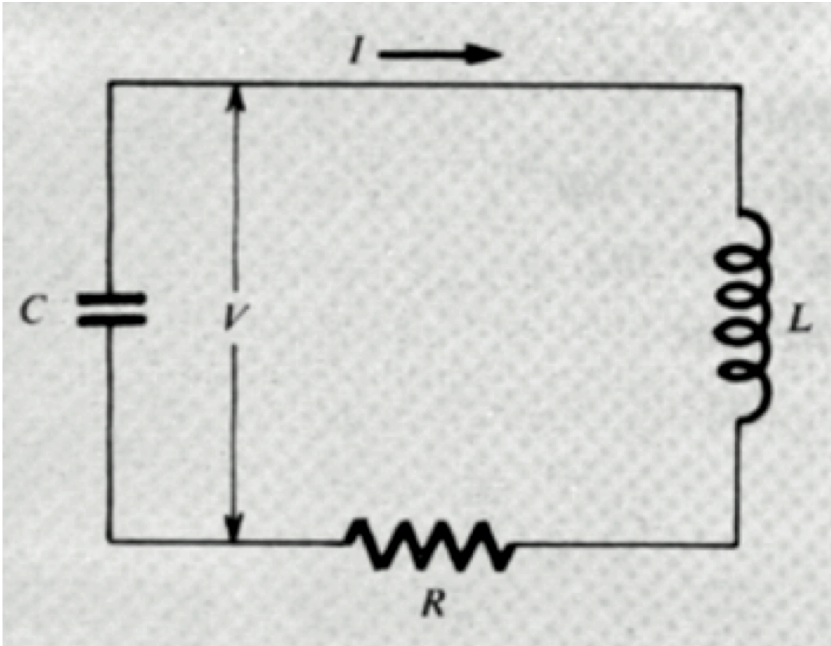
$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t]$$

Circuito RLC en serie

- Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando los $Ae^{-\alpha t}$ llegamos

$$(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \text{ sen } \omega t - \frac{R}{L}(\alpha \cos \omega t + \omega \text{ sen } \omega t)$$
$$+ \frac{1}{LC} \cos \omega t = 0$$

- Esto puede satisfacerse para todo t si los coeficientes que acompañan a $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ son ambos cero.



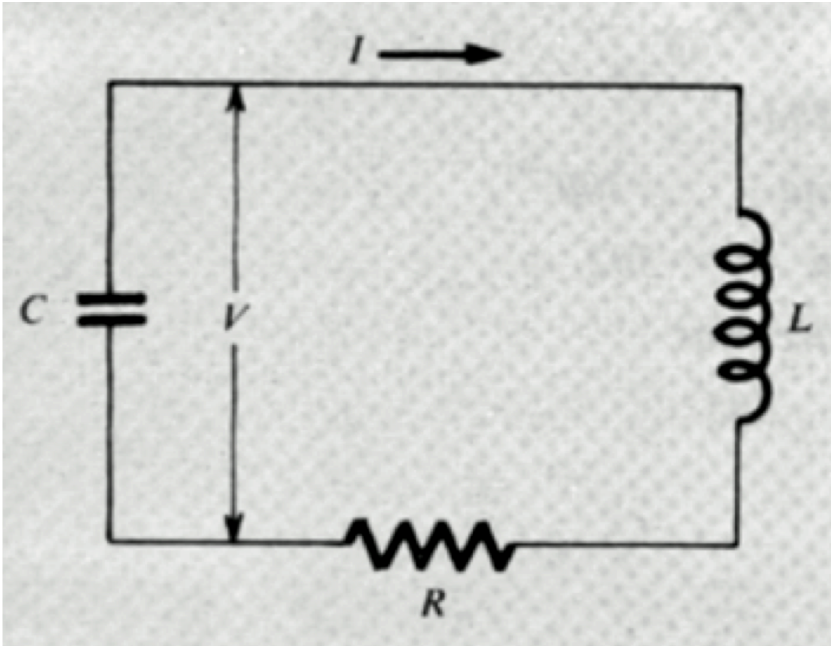
Circuito RLC en serie

- Esto quiere decir, por un lado que $(\sin \omega t)$

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0$$

- Lo cual quiere decir que

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$



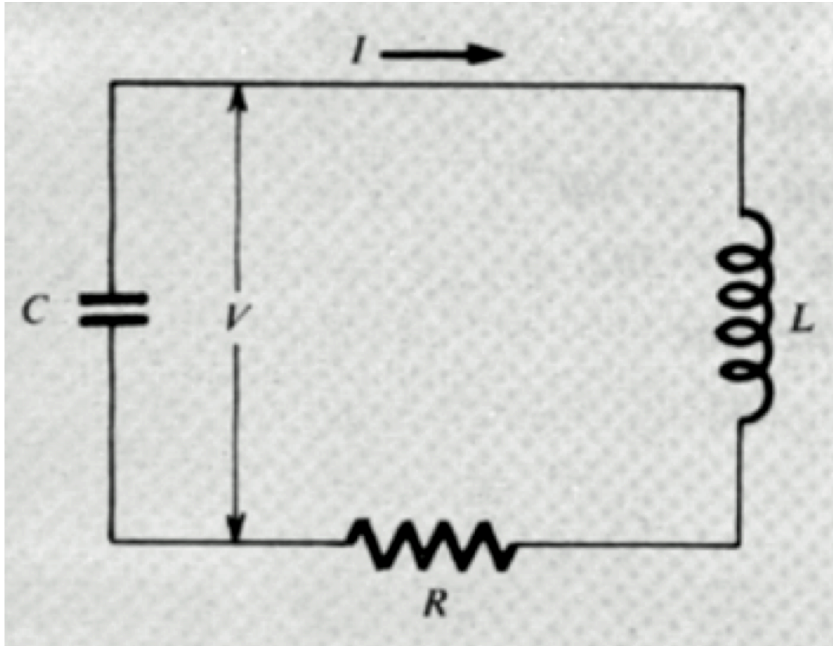
Circuito RLC en serie

- Por otro lado se tiene ($\cos \omega t$):

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

- Lo cual implica que:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$



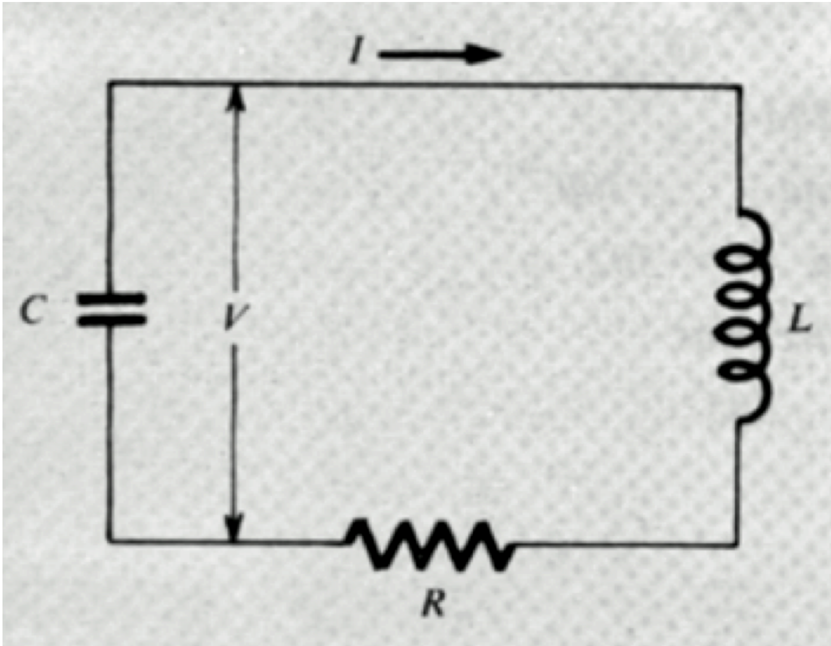
Circuito RLC en serie

- Siendo ω real, la ecuación anterior implica que

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \geq 0$$

- O lo que es lo mismo

$$\frac{1}{LC} \geq \frac{R^2}{4L^2}$$



Circuito RLC en serie – bajo amortiguamiento

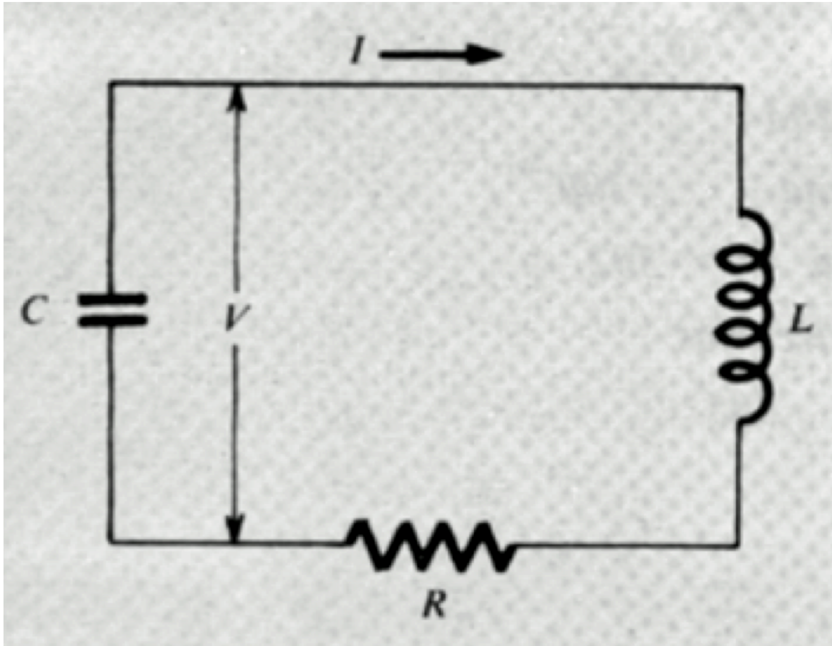
- Tomemos el caso de mayor estricto

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

- En ese caso tenemos una cota para R:

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Este es el caso de **bajo amortiguamiento**



Circuito RLC en serie – bajo amortiguamiento

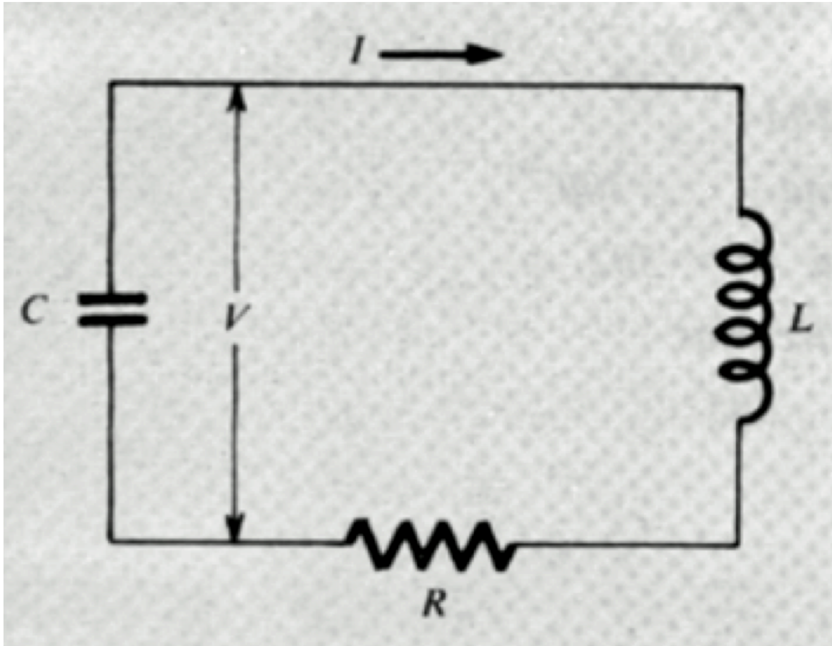
- Entonces

$$V = Ae^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right]$$

(solución cuando la amplitud de V es máxima en $t = 0$)

- Y la corriente nos queda

$$I = -C\frac{dV}{dt} = AC\omega e^{-\alpha t}\left[\sin \omega t - \frac{\alpha}{\omega}\cos \omega t\right]$$



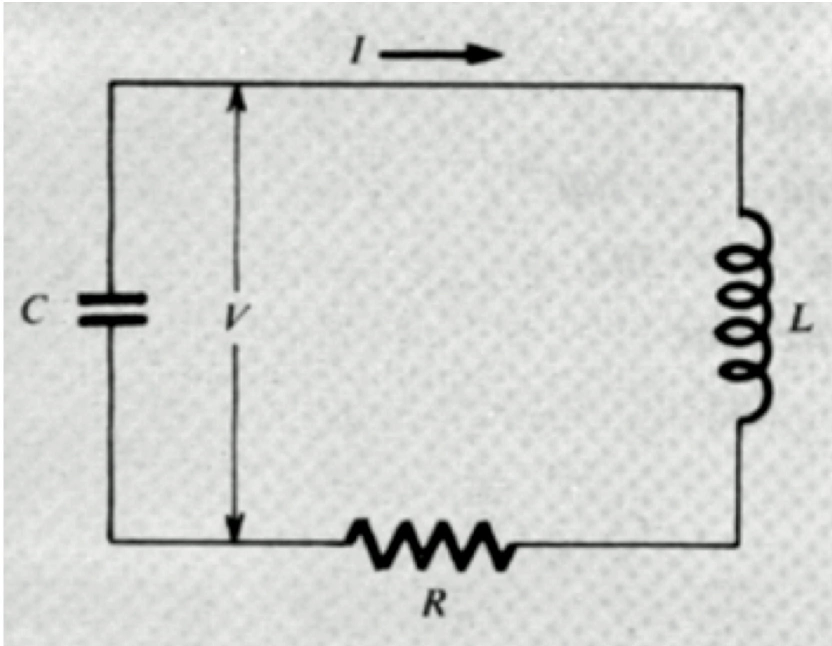
Circuito RLC en serie – bajo amortiguamiento

- Tanto V como I oscilan y son amortiguados por un factor

$$e^{-\frac{R}{2L}t}$$

- La medida del amortiguamiento es el cociente

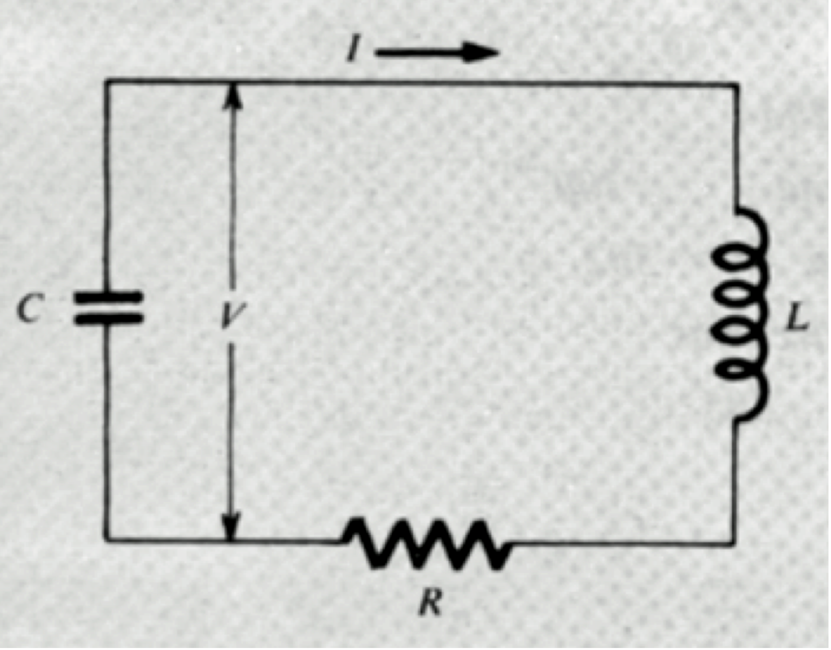
$$\frac{\alpha}{\omega}$$



Circuito RLC en serie sin amortiguamiento

- Si $\frac{\alpha}{\omega}$ es muy pequeño, muchas oscilaciones van a ocurrir antes que la amplitud decaiga considerablemente.
- El caso límite es cuando $\frac{\alpha}{\omega} = 0$ no hay amortiguamiento (es como si R no existiera)
- En ese caso, la frecuencia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



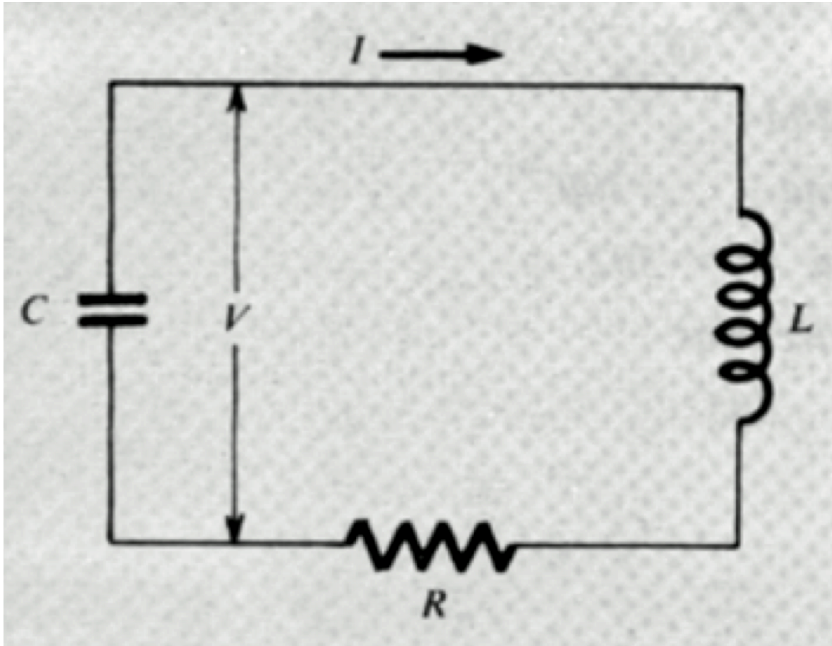
Circuito RLC en serie

- Existe un desfasaje entre V e I.

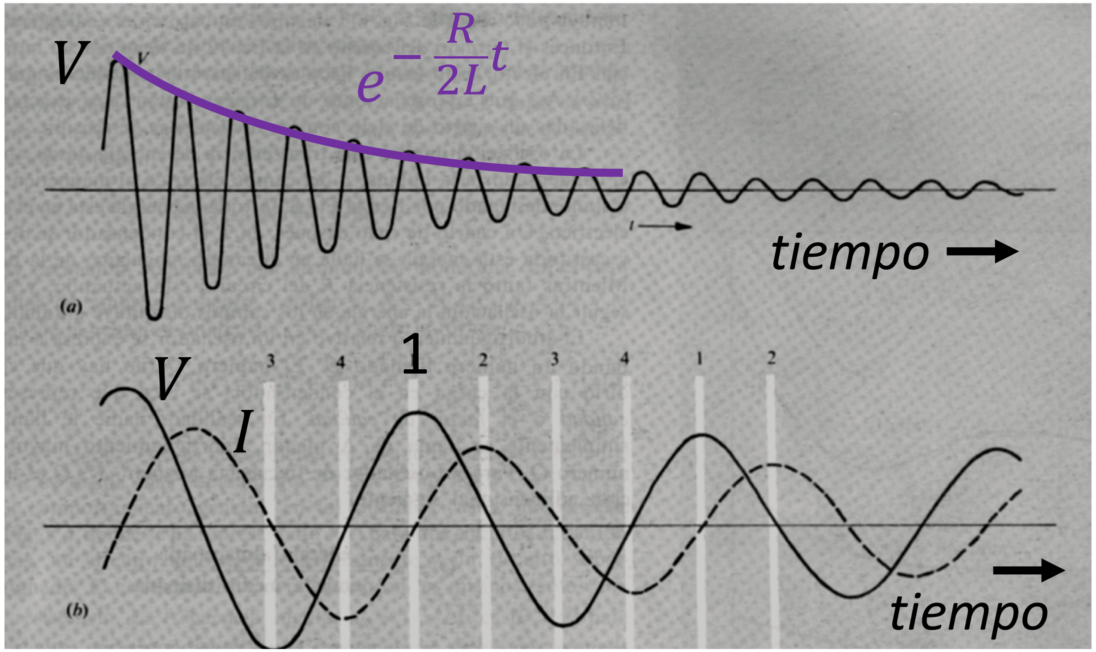
- En la medida en la que $\frac{\alpha}{\omega}$ sea muy pequeño,

$$I \approx AC\omega e^{-\alpha t}[\sin \omega t]$$

- Y el desfasaje en ese caso es de un cuarto de ciclo ($^{\pi}/_{2}$).

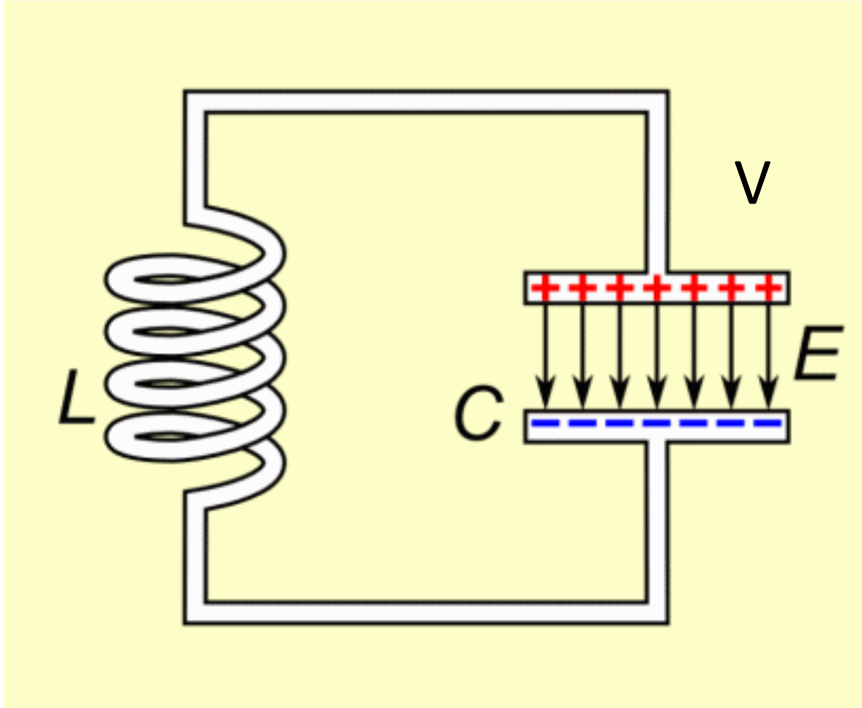


Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

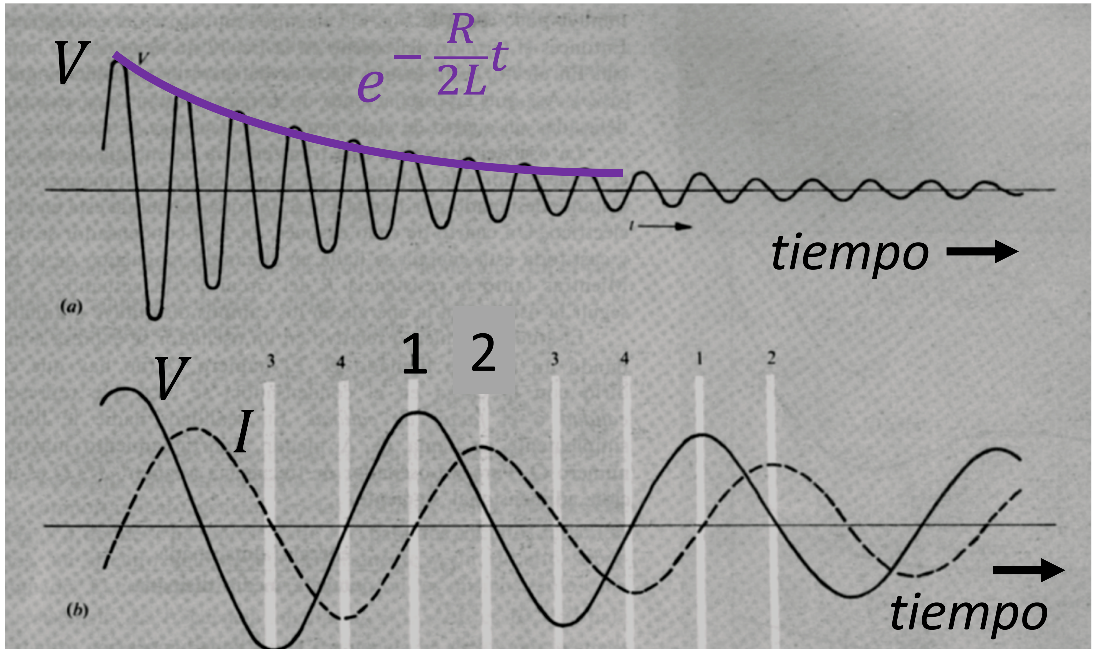


1. Capacitor cargado, corriente cero

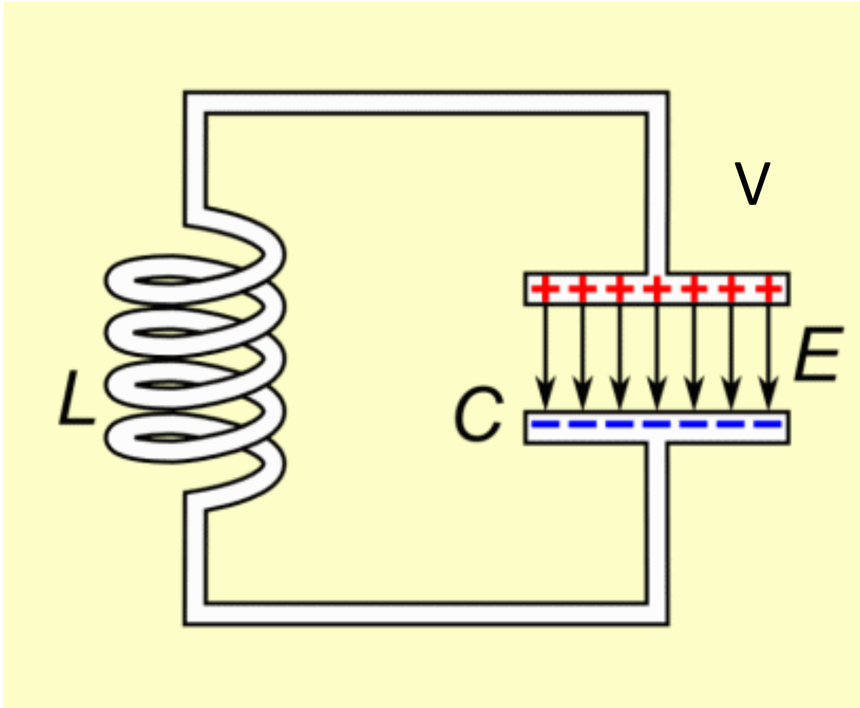
Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

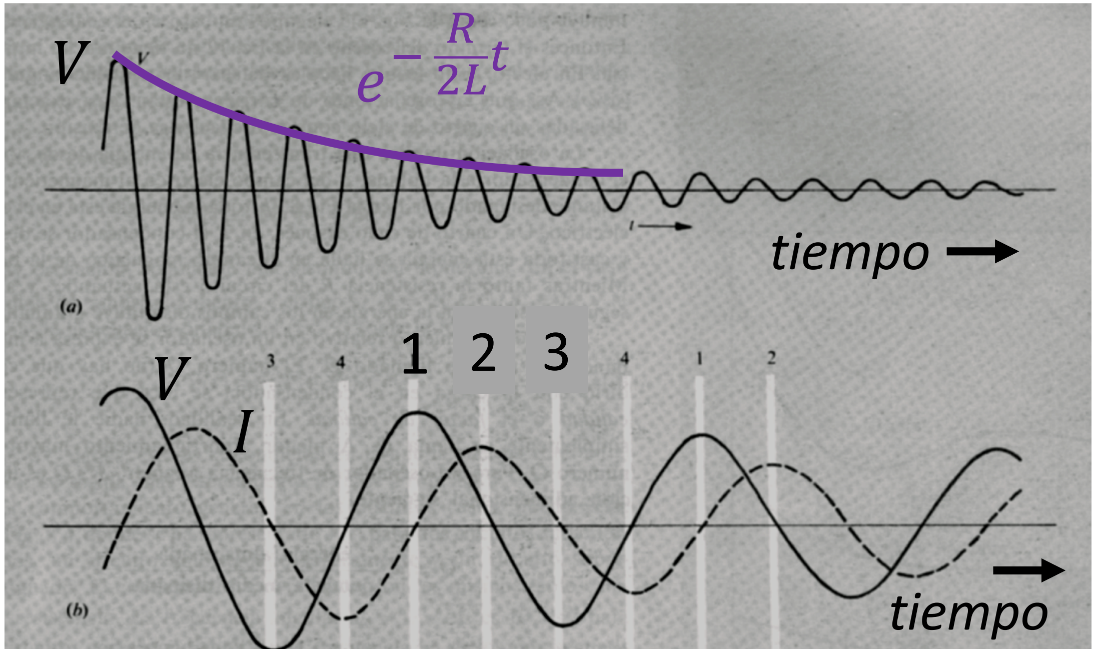


Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)

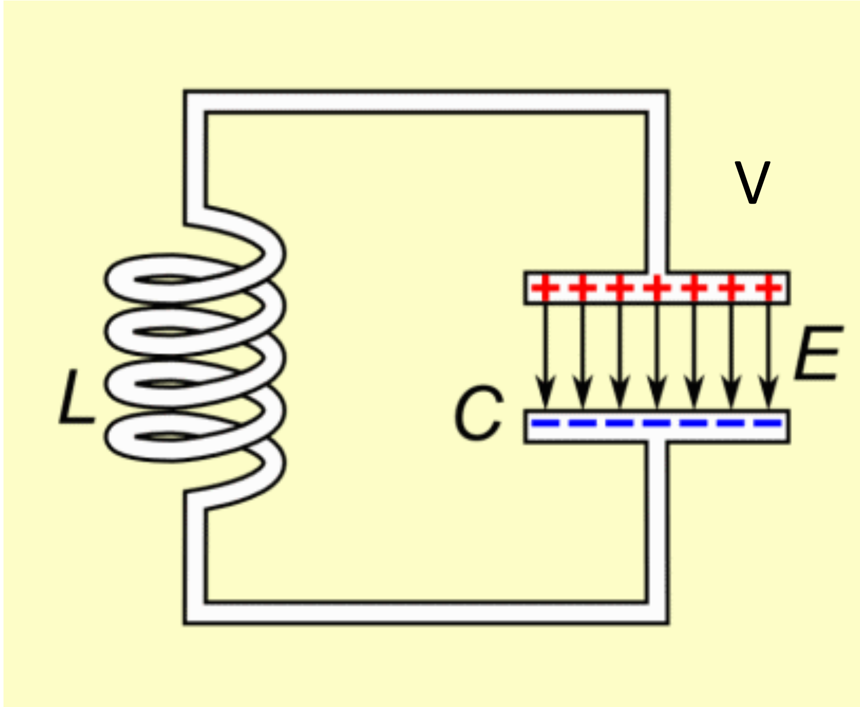


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

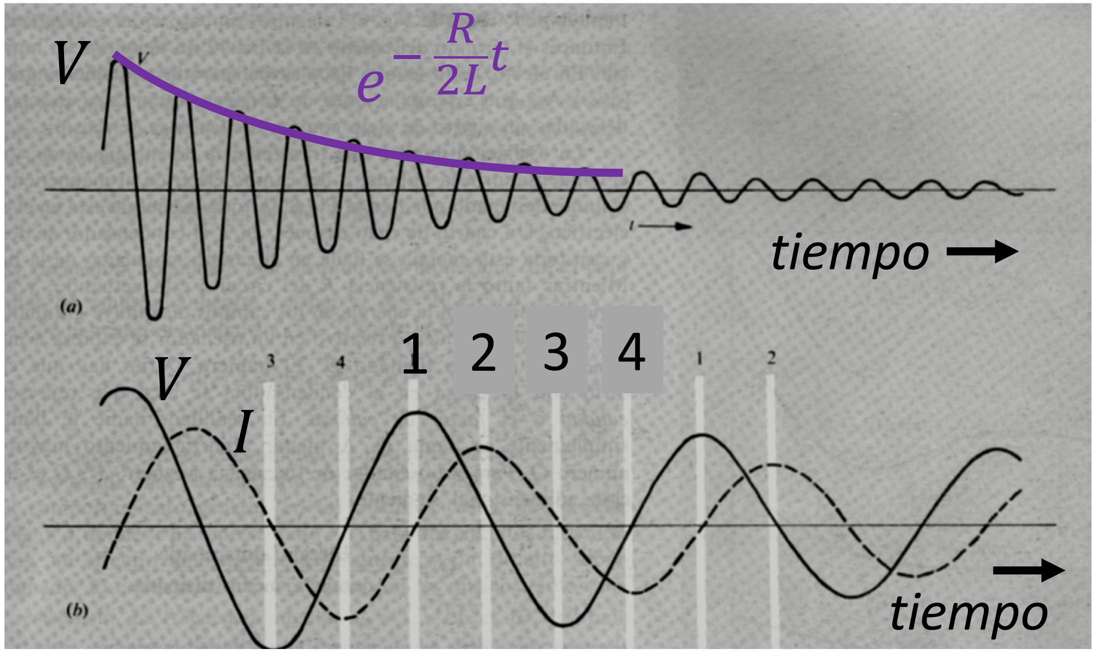


Caso sin amortiguamiento
($R = 0$)

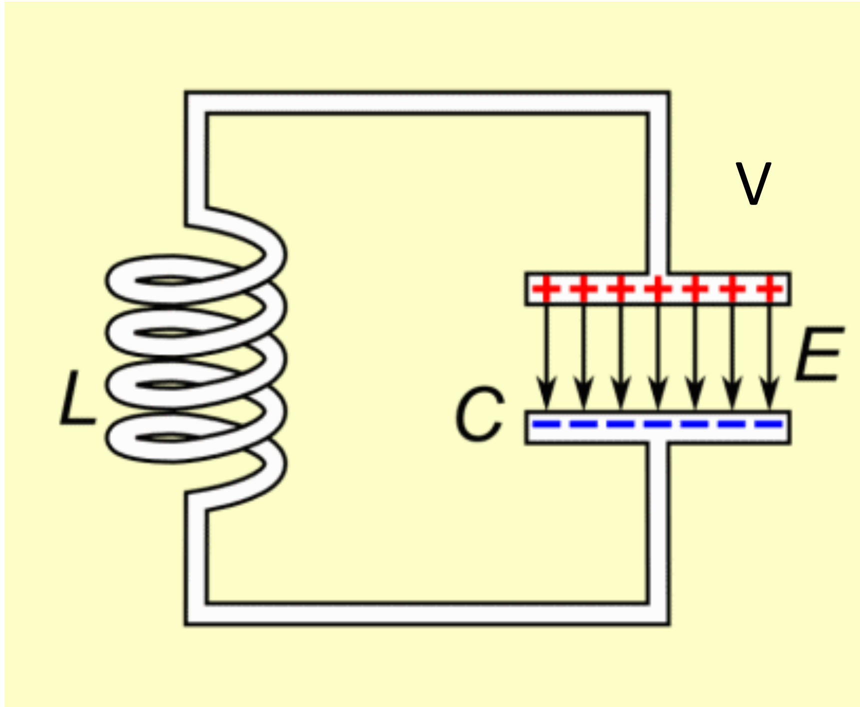


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)



Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero
4. Corriente máxima en sentido opuesto a 2, máximo campo magnético en sentido opuesto a 2, capacitor descargado.

Factor de calidad

- El amortiguamiento relativo en un circuito oscilador como este se expresa en una cantidad adimensional denominada *factor de calidad* y definida como:

$$Q = \omega \frac{Energía\ Almacenada}{Potencia\ media\ disipada}$$

- Por como está definido, un Q alto indica poca pérdida óhmica, mientras que un Q pequeño indica una prevalencia de la disipación.

Factor de calidad

- En una interpretación más práctica, Q puede ser considerada como la cantidad de radianes ωt necesaria para que la energía en el oscilador decaiga un factor $\frac{1}{e}$.
- En este circuito, la energía almacenada puede ser $\frac{1}{2}LI^2$ o $\frac{1}{2}CV^2$ dependiendo dónde se acumula.

Factor de calidad

- De las soluciones, podemos ver que la energía almacenada es proporcional a $e^{-2\alpha t}$.
- Entonces, para que este factor sea $\frac{1}{e}$ hay que esperar un tiempo:

$$t_e = \frac{1}{2\alpha}$$

- En ese tiempo, la cantidad de radianes

$$\omega t_e = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R}$$

Circuito RLC en serie – sobreamortiguamiento

- Para cubrir todas las situaciones, veamos qué ocurre cuando

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- En ese caso, las raíces del polinomio característico son reales y por lo tanto, la solución para el voltaje es de la forma:

$$V = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}$$

- Esto quiere decir que no hay oscilación sino una disminución exponencial.

Circuito RLC en serie: amortiguamiento crítico

- Es el caso especial donde:

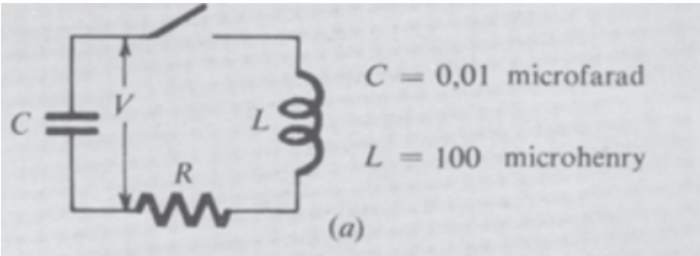
$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

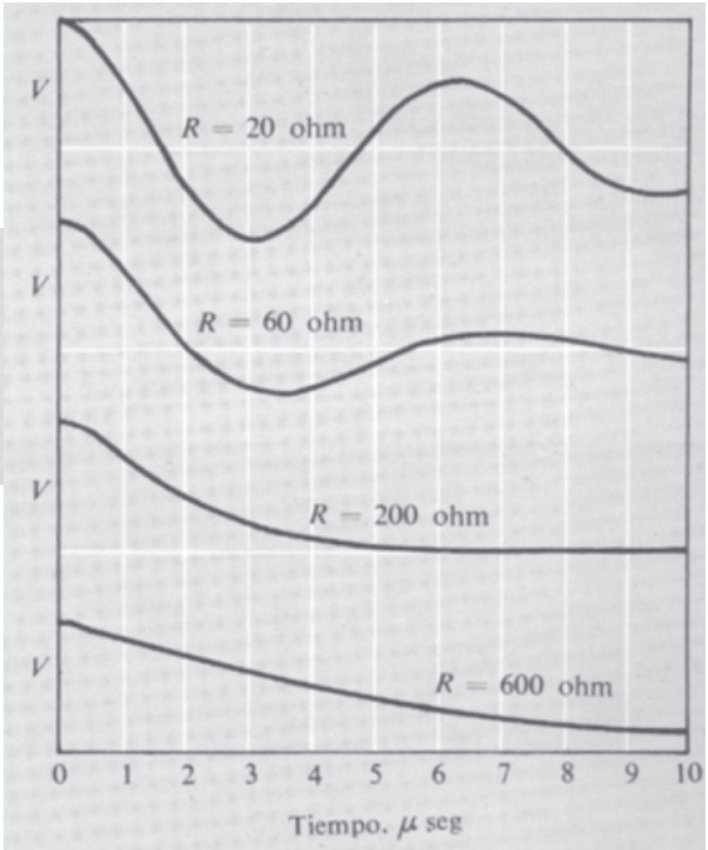
- Las raíces son iguales $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ y en Análisis Matemático vimos que las solución general es entonces

$$V = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

- La disipación ocurre más rápido que en los casos anteriores

Voltaje en el capacitor para R variables





Poco amortiguado

Amortiguado

Amortiguamiento crítico

Sobreamortiguado

Circuitos de corriente alterna

Representaciones de números complejos

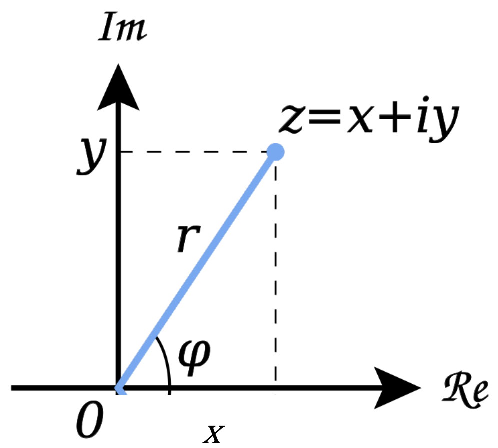
- Cartesianas

$$z = x + iy$$
$$x = Re(z)$$
$$y = Im\ (z)$$

- Polares (Euler)

$$z = re^{i\varphi}$$

donde r es el módulo y y φ es el argumento o la fase



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r \sin \varphi$$
$$x = r \cos \varphi$$
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Operaciones simples en polares

La multiplicación de números complejos es especialmente sencilla con la notación polar:

$$z_1 z_2 = rse^{\mathrm{i}(\phi+\psi)} \Leftrightarrow z_1 z_2 = re^{\mathrm{i}\phi} se^{\mathrm{i}\psi}$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} e^{\mathrm{i}(\phi-\psi)}$$

Potenciación:

$$z^n = r^n e^{\mathrm{i}\phi n} \Leftrightarrow z^n = \left(re^{i\phi}\right)^n$$

Complejo conjugado $\bar{z}$

- Si $z = x + iy$ entonces $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$
- Propiedades

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$$

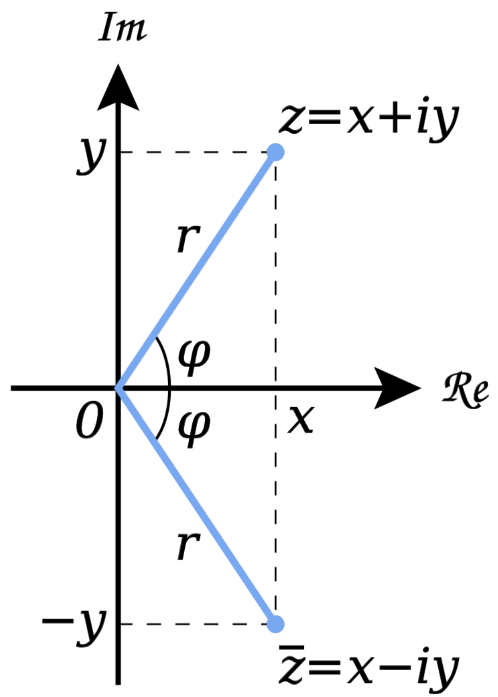
$$z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

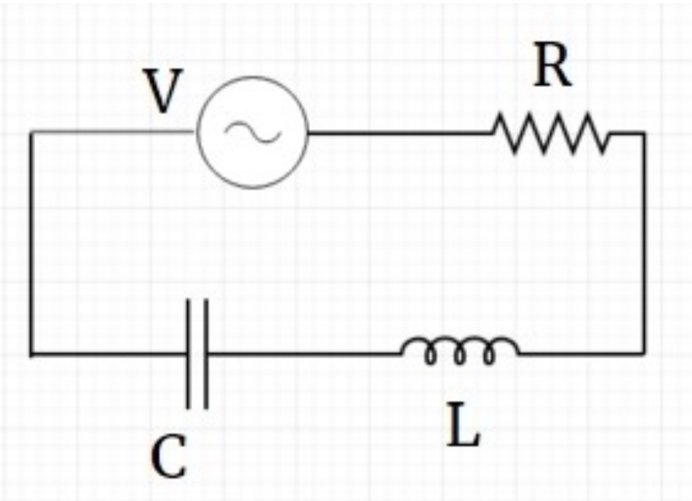
$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \bar{z} = z$$

$$|z|^2 = z\bar{z} \geq 0$$

$$z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$



Circuito RLC en serie

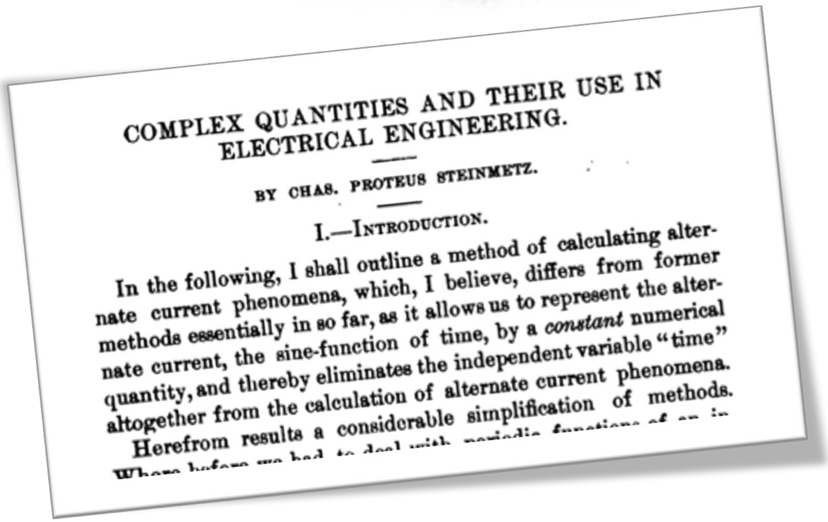


- Supongamos ahora un circuito RLC en serie de corriente alterna donde
$$V = V_0 \cos \omega t$$
- Por ley de Faraday tenemos
$$V_0 \cos \omega t = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\, dt$$
- Podemos resolver esta ecuación diferencial de manera diferente a como lo venimos haciendo?

Números complejos y circuitos AC

- En 1893 Charles Steinmetz, ingeniero alemán en GE (EEUU), presenta el trabajo 'Complex Quantities and Their Use in Electrical Engineering'.
- En este trabajo muestra como ecuaciones como la anterior son en realidad un problema de álgebra simple de números complejos.
- En otras palabras

¡No hace falta integrar !



COMPLEX QUANTITIES AND THEIR USE IN ELECTRICAL ENGINEERING.

BY CHAS. PROTEUS STEINMETZ.

I.—INTRODUCTION.

In the following, I shall outline a method of calculating alternate current phenomena, which, I believe, differs from former methods essentially in so far, as it allows us to represent the alternate current, the sine-function of time, by a *constant* numerical quantity, and thereby eliminates the independent variable "time" altogether from the calculation of alternate current phenomena.

Herefrom results a considerable simplification of methods.

Voltaje complejo

- La FEM de la batería

$$V_0 \cos \omega t$$

- Puede ser vista como la parte real del número complejo

$$V_0 e^{i\omega t} = V_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

- En cuyo caso

$$V_0 \cos \omega t = Re(V_0 e^{i\omega t})$$

Corriente compleja

- Para la solución de nuestro problema podemos hacer lo mismo con I

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = Re(I_0 e^{i(\omega t + \varphi)})$$

donde φ es la diferencia de fase con V

- Pero podemos reescribir esto como

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = Re(I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t})$$

- Ahora definimos **la amplitud compleja $\tilde{I}$** (independiente del tiempo)

$$\tilde{I} = I_0 e^{i\varphi} = I_0(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

- Podemos escribir

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = Re(\tilde{I}\, e^{i\omega t})$$

Corriente compleja: derivada e integral

- Veamos cómo dan las derivadas y las integrales de $\tilde{I}\, e^{i\omega t}$

- La derivada respecto a t queda:

$$\frac{d\tilde{I}\, e^{i\omega t}}{dt} = \tilde{I}\frac{de^{i\omega t}}{dt} = i\omega\tilde{I}e^{i\omega t}$$

¡Derivar la corriente compleja equivale a multiplicarla por $i\omega$!

- La integral queda

$$\int \tilde{I}\, e^{i\omega t}\, dt = \tilde{I}\int e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{i\omega}\tilde{I}\, e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega}\tilde{I}\, e^{i\omega t}$$

¡Integrar la corriente compleja equivale a multiplicarla por $\frac{1}{i\omega}$!

Pregunta

- ¿Por cuánto hay que multiplicar $\tilde{I}e^{i\omega t}$ para obtener su derivada segunda respecto al tiempo?