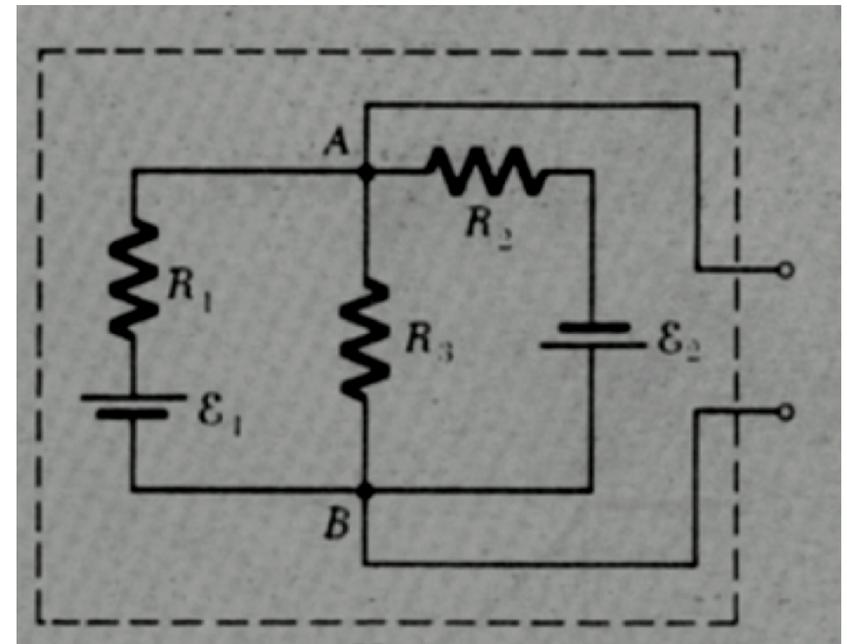


# Teorema de Thévenin

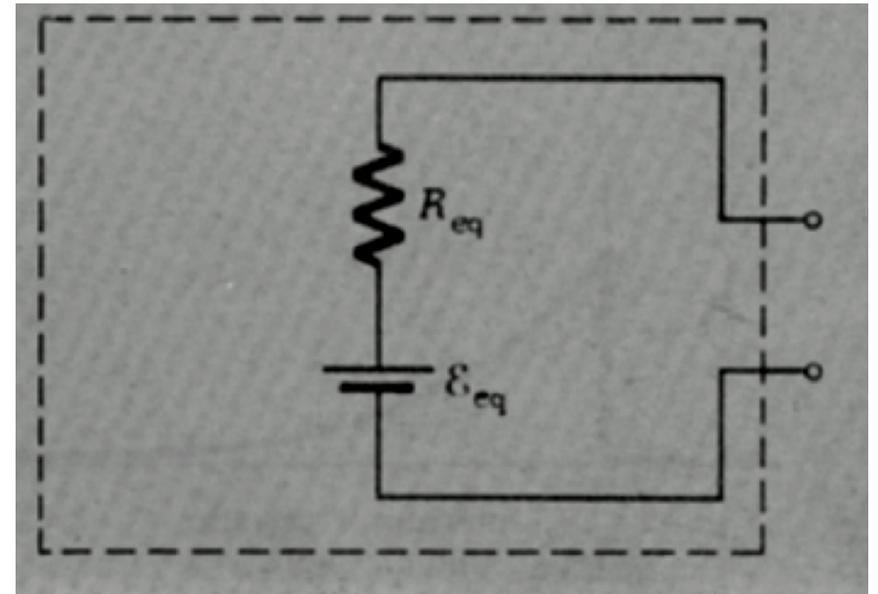
# 'Cajas negras' y el Teorema de Thévenin

- Supongamos que el circuito que resolvimos se encuentra dentro de una caja negra que no podemos abrir y sólo es accesible a través de dos terminales conectadas a dos puntos del mismo.



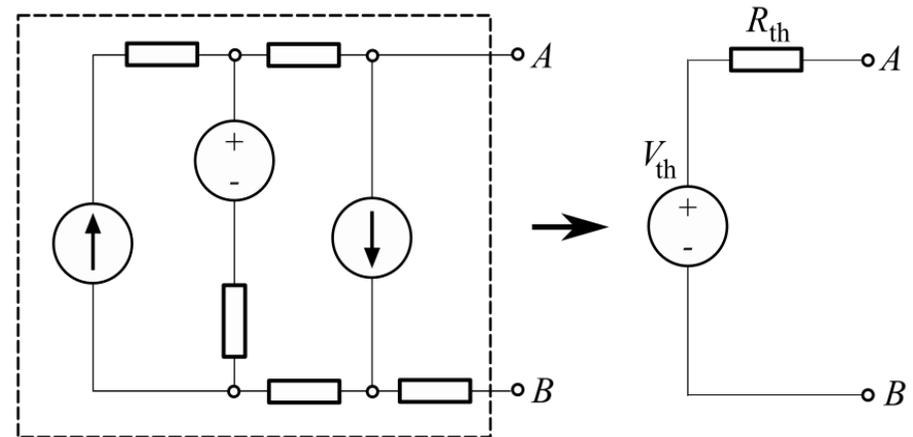
# ‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

- Supongamos que el circuito que resolvimos se encuentra dentro de una caja negra que no podemos abrir y sólo es accesible a través de dos terminales conectadas a dos puntos del mismo.
- El **Teorema de Thévenin** dice que esta caja con terminales es equivalente a una sola fuente de voltaje  $\varepsilon_{eq}$  conectada en serie a una resistencia  $R_{eq}$



# Teorema de Thévenin

Si una parte de un circuito eléctrico lineal está comprendida entre dos terminales A y B, esta parte en cuestión puede sustituirse por un circuito equivalente que esté constituido únicamente por un generador de tensión en serie con una resistencia, de forma que al conectar un elemento entre los dos terminales A y B, la tensión que queda en él y la intensidad que circula son las mismas tanto en el circuito real como en el equivalente.



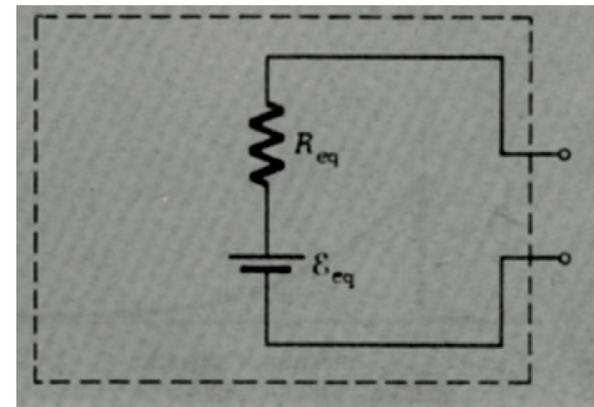
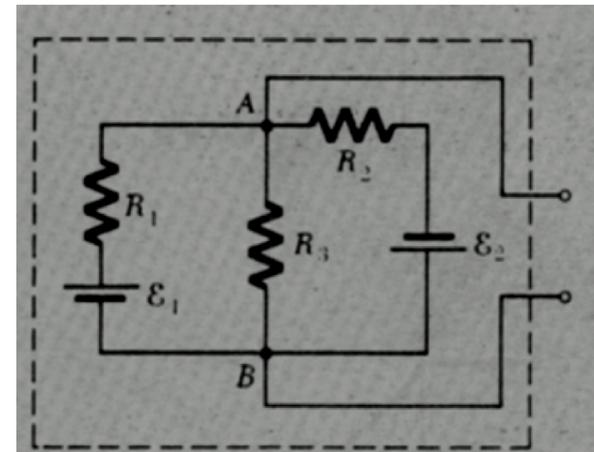
Léon Charles Thévenin  
1857-1926



Esto se aplica a cualquier red de fuentes de voltaje y resistencias

# ‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

- Hallar  $\varepsilon_{eq}$  es simplemente medir la diferencia de potencial entre los terminales que salen de la caja.
- Hallar  $R_{eq}$  es simplemente encontrar la resistencia equivalente de circuito reemplazando las fuentes por cables (cortocircuitando las fuentes)



# ‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

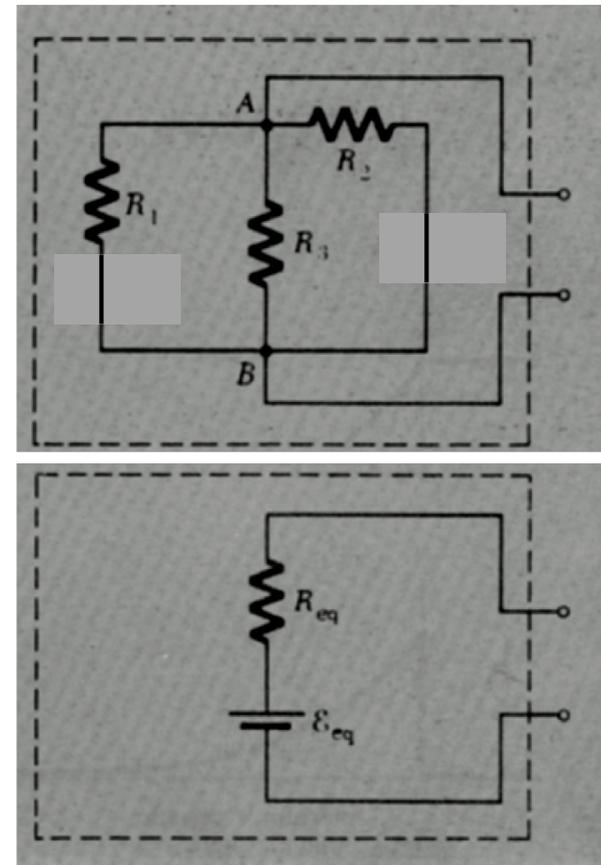
- En este caso  $\varepsilon_{eq} = I_3 R_3$  donde

$$I_3 = \frac{R_2 \varepsilon_1 - R_1 \varepsilon_2}{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_2 R_3}$$

- Al cortocircuitar las fuentes  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  quedan  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en paralelo. Por lo tanto:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

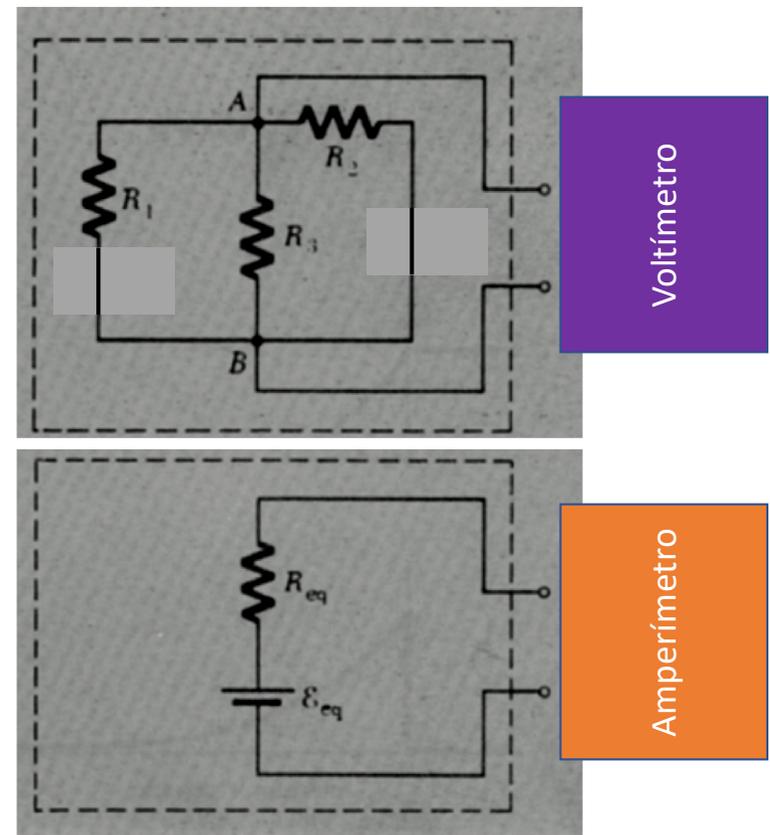
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$



# ‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

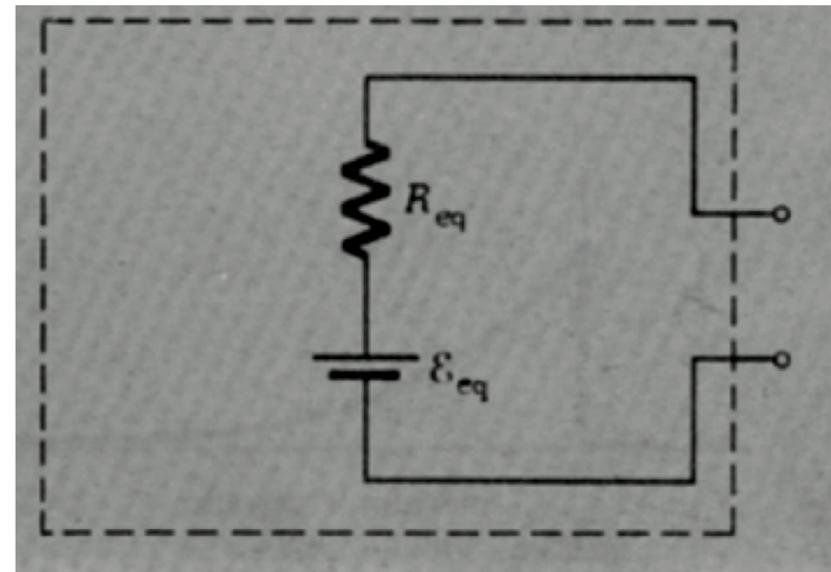
- Si no sé qué hay adentro  $\varepsilon_{eq}$  se obtiene midiendo la diferencia de potencial entre los dos terminales.
- Como no hay corriente pues el circuito está abierto, la diferencia de potencial es efectivamente  $\varepsilon_{eq}$ .
- Para obtener  $R_{eq}$  habiendo calculado  $\varepsilon_{eq}$  se coloca un amperímetro entre los terminales y se mide la corriente en cortocircuito  $I_c$ , entonces:

$$\varepsilon_{eq} = I_c R_{eq}$$



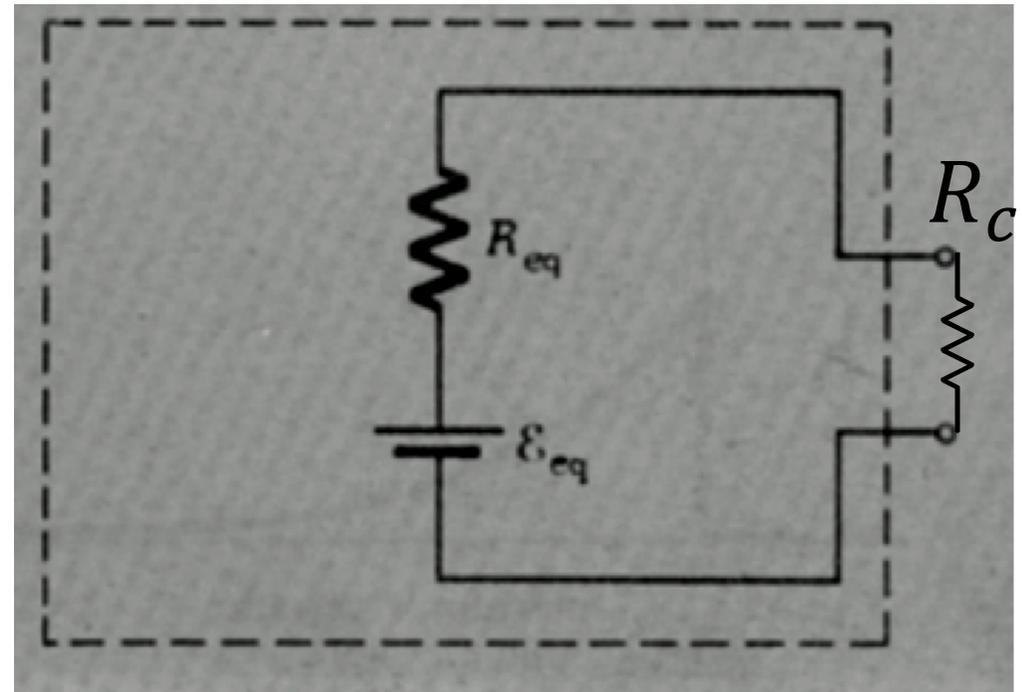
# Teorema de Thévenin y fuentes

- La simplificación de un circuito a través del Teorema de Thévenin permite aplicarlo a circuitos que trabajan como fuentes
- Las fuentes normalmente traen asociada una resistencia interna
- Por lo tanto si lo usamos como fuente para alimentar otro circuito, tendremos una FEM de valor  $\varepsilon_{eq}$  y resistencia interna  $R_{eq}$



# Teorema de potencia máxima

- Supongamos que colocamos una resistencia llamada 'de carga'  $R_c$  entre los terminales de un circuito / fuente de FEM y resistencia equivalentes  $\mathcal{E}_{eq}$  y  $R_{eq}$ .
- El **teorema de la potencia máxima** dice que la máxima potencia que puede disipar  $R_c$  se da cuando  $R_c = R_{eq}$



# Teorema de potencia máxima

- Esto se demuestra escribiendo la potencia disipada en  $R_c$ .

$$P_c = R_c I^2$$

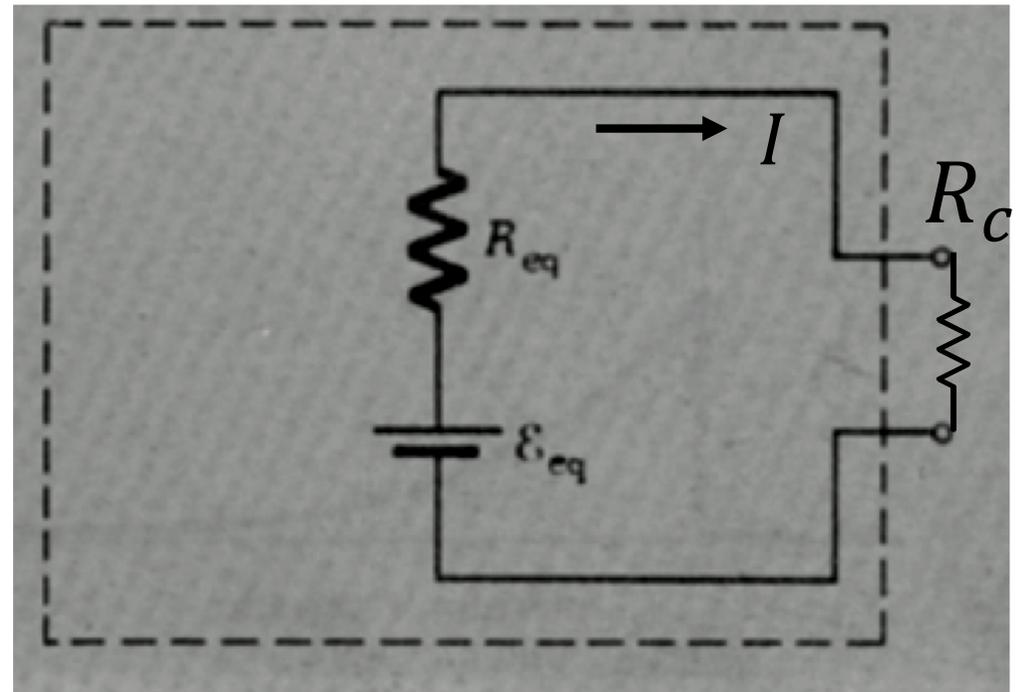
donde  $I$  es la corriente que pasa por  $R_c$

- Aplicando Kirchhoff

$$I = \frac{\varepsilon_{eq}}{(R_c + R_{eq})}$$

entonces

$$P_c = R_c \left[ \frac{\varepsilon_{eq}}{(R_c + R_{eq})} \right]^2$$



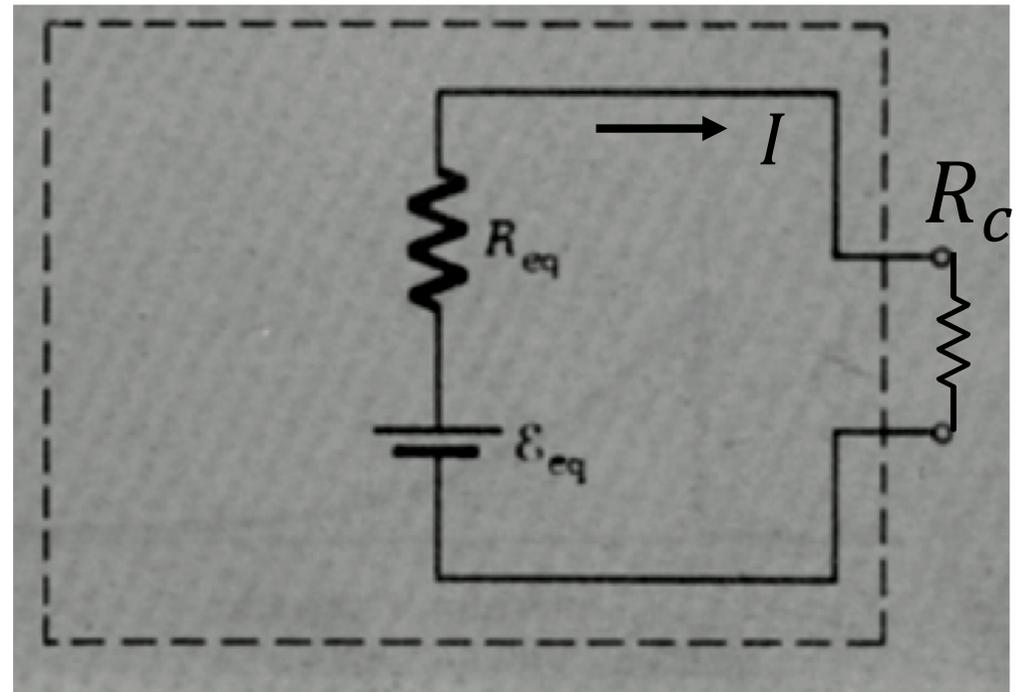
# Teorema de potencia máxima

- Efectivamente, el máximo de esta función tiene lugar cuando ocurre cuando

$$R_c = R_{eq}$$

y vale:

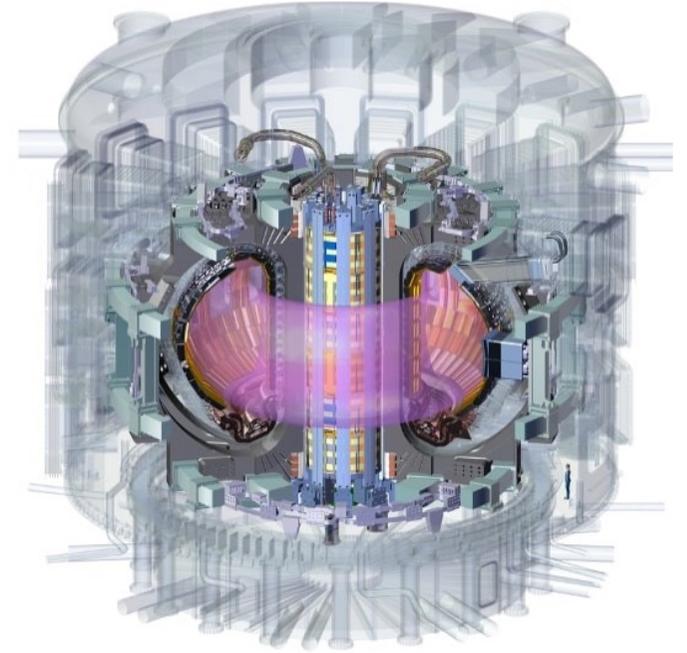
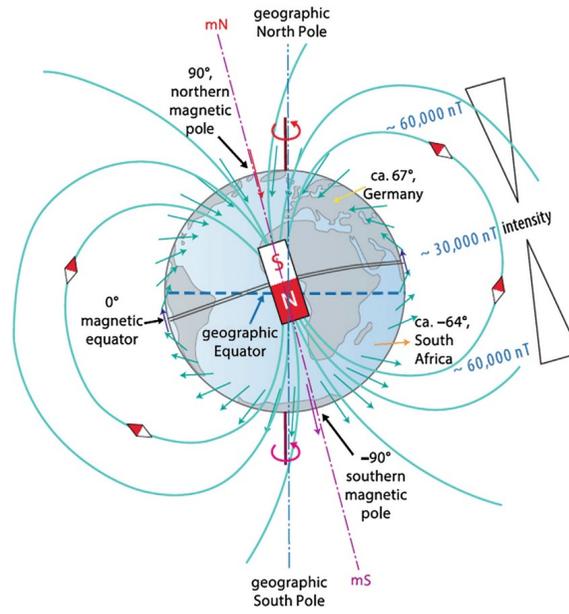
$$P_{cmax} = \frac{\varepsilon_{eq}^2}{4R_{eq}}$$



# Problema

- Demostrar que el máximo de esta función tiene lugar cuando  $R_c = R_{eq}$

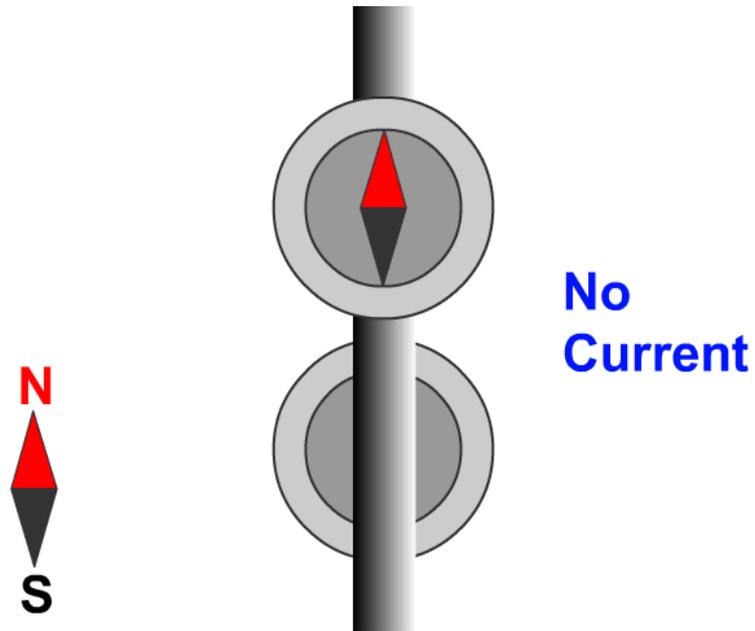
$$P_c(R_c) = R_c \left[ \frac{\varepsilon_{eq}}{(R_c + R_{eq})} \right]^2$$



# Magnetismo

# El campo magnético

- Hans Christian Oersted (1819) demuestra que una corriente estacionaria puede generar un campo magnético.

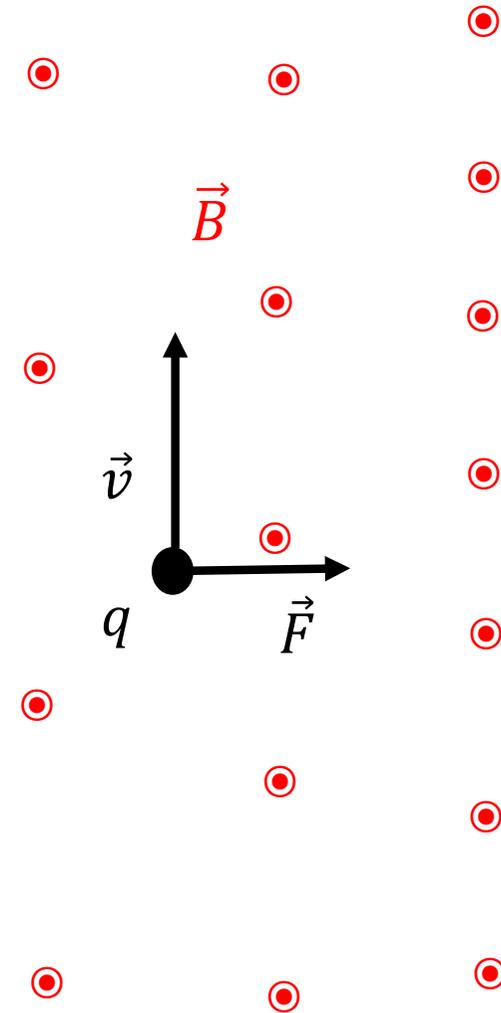


Hans Christian Oersted

# Fuerza de Lorentz

- Hendrik Lorentz formalizó en 1895 la expresión para la fuerza magnética a partir de un campo magnético  $\vec{B}$
- Una carga  $q$  con una velocidad  $\vec{v}$  que pasa por una región con campo magnético  $\vec{B}$  experimentará una fuerza igual a:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

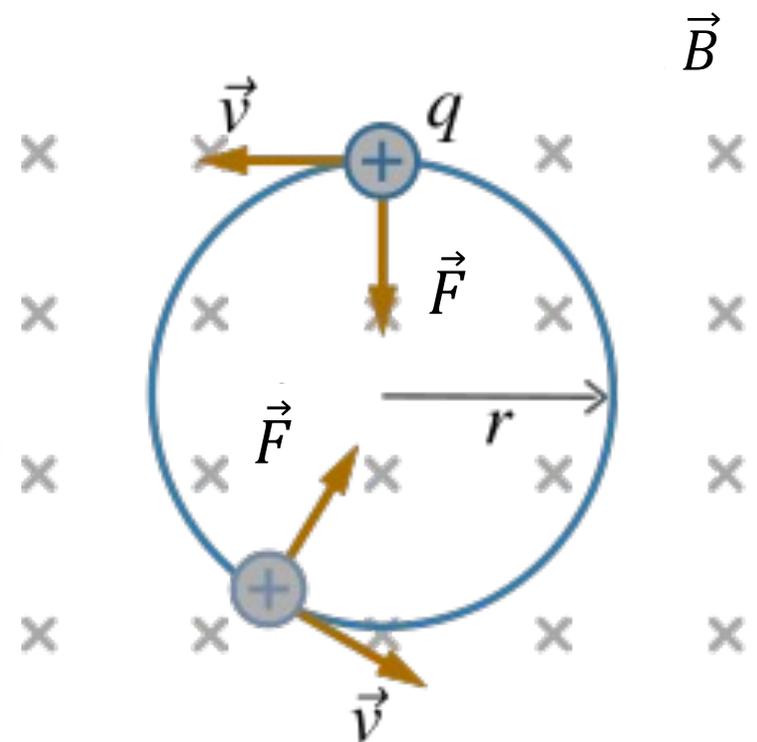


# Movimiento de una carga en campo magnetico uniforme

- Supongamos un campo  $\vec{B}$  uniforme
- La **ecuación de movimiento** de una carga  $q$  de masa  $m$  y velocidad  $\vec{v} \perp \vec{B}$  es:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Es decir que la fuerza  $\vec{F}$  y la **aceleración son siempre perpendiculares a  $\vec{v}$** .
- Por lo tanto la carga describirá un **MCU (la energía cinética no cambia)**.



# Movimiento de una carga en campo magnetico uniforme

- En un MCU tenemos que la única aceleración es normal a la trayectoria. En coordenadas polares

$$ma_r = mr_g \dot{\theta}^2 = qvB$$

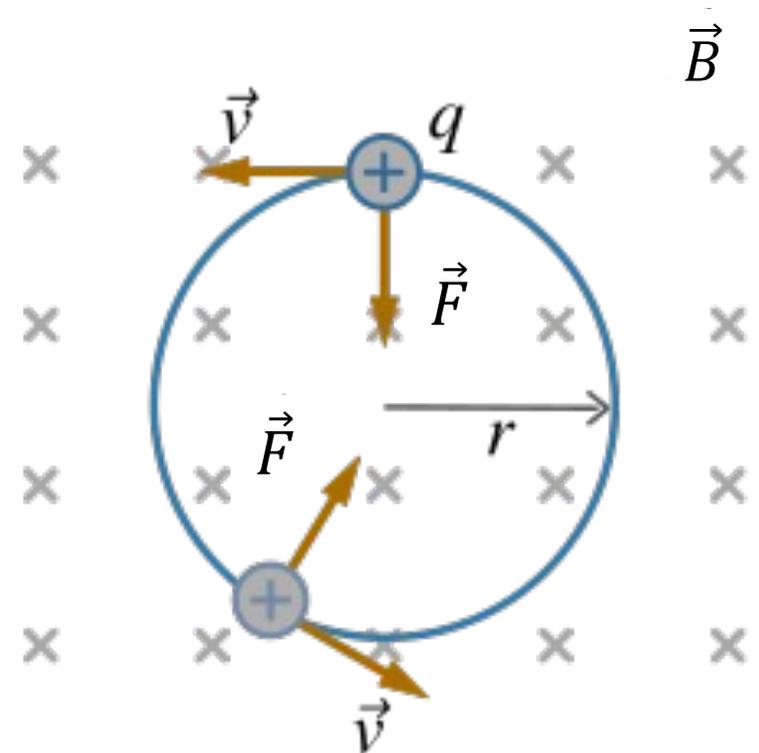
Donde  $r_g$  es el radio de la trayectoria circular y se denomina 'giro-radio':

- Teniendo en cuenta que  $r_g \dot{\theta} = v$  tenemos:

$$\dot{\theta} = \frac{qB}{m}$$

- De aquí sacamos el **período ciclotrón**  $\tau$ :

$$\tau = \frac{2\pi m}{qB}$$



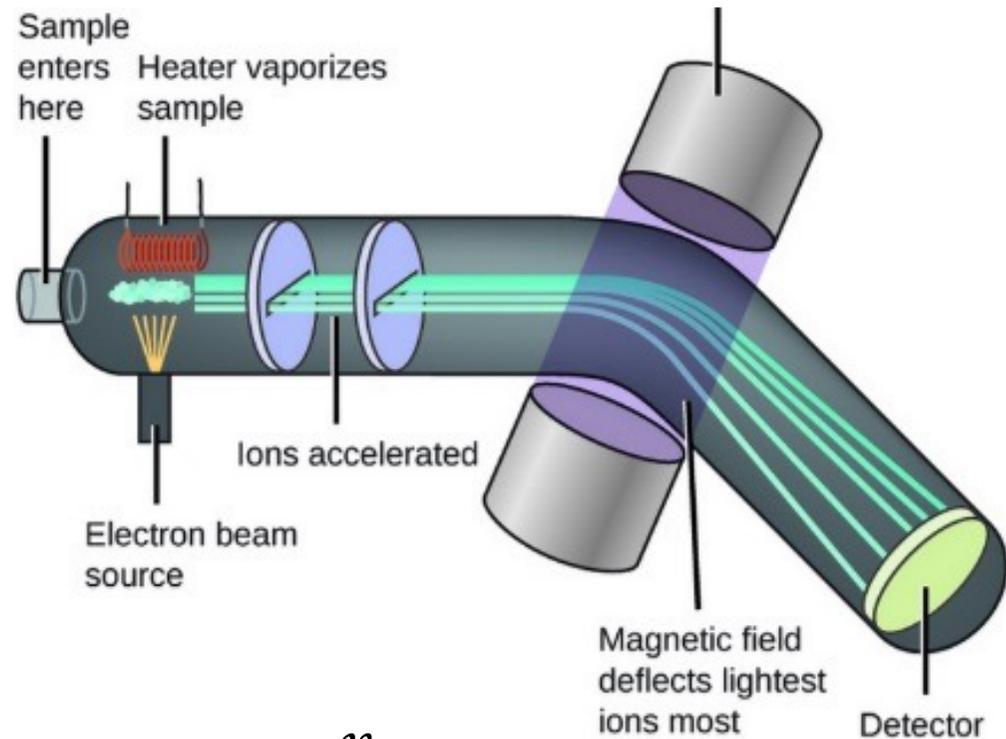
# Preguntas

- Obtener el valor de  $r_g$  en función de  $v, q, m, B$
- ¿Qué ocurre si  $\vec{v}$  no es perpendicular a  $\vec{B}$  ?

Aplicaciones:

Espectrómetro  
de masa

(separa iones  
de acuerdo a  
su masa)

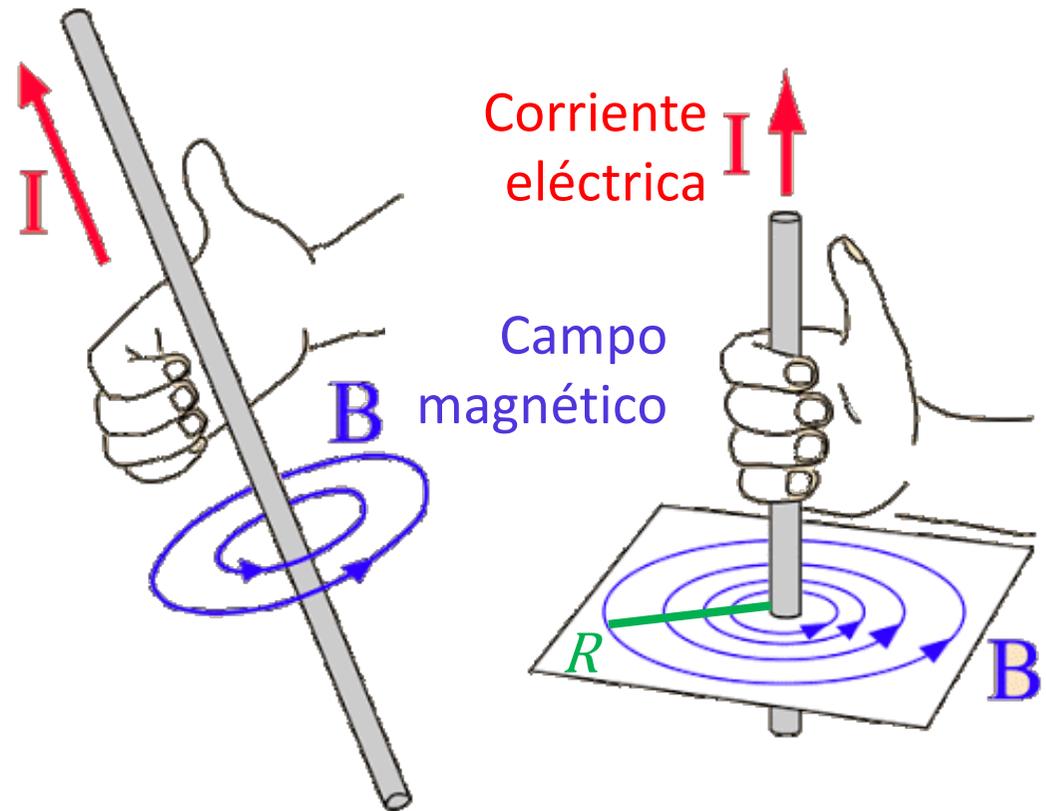


$$r_g = \frac{v_{perp}}{|q|B} m$$

# Campo magnético de un hilo recto de corriente

- **Experimentalmente**, se sabe que el campo magnético de un hilo recto de corriente  $I$  genera un campo en el sentido de las líneas azules.
- También **experimentalmente** se obtiene que  $B$  es proporcional a la corriente  $I$  e inversamente proporcional a la distancia al hilo  $R$ .

$$B \propto \frac{I}{R}$$



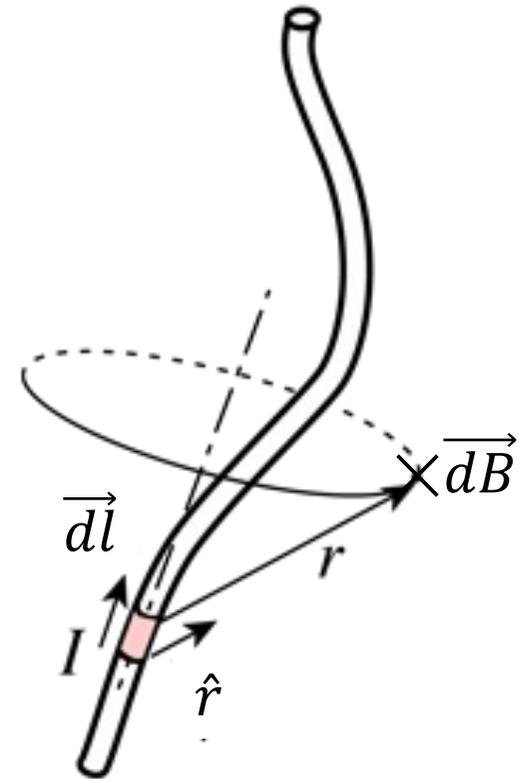
# Monopolos eléctricos y magnéticos

- El campo eléctrico de un hilo de carga decae como  $E \propto \frac{1}{R}$  ya que sumabamos monopolos eléctricos cuyos campos decaían como  $\frac{1}{R^2}$ .
- Hasta ahora, no hay evidencia de la existencia de monopolos magnéticos, pero si existieran, el campo magnético generado por uno de ellos vararía como  $\frac{1}{R^2}$ .
- Sin embargo, este pensamiento indica que si dividiéramos el hilo de corriente en tramos infinitesimales, el campo magnético generado por cada uno de ellos debería variar como  $\frac{1}{R^2}$ .

# Ley de Biot-Savart

- Biot y Savart plantearon un formalismo para obtener el campo a partir de contribuciones de elementos de corriente  $I\vec{dl}$ .
- El diferencial de campo magnético  $\vec{dB}$  a partir de un elemento de corriente  $I\vec{dl}$  en el punto  $\vec{r} = r\hat{r}$  se puede escribir como:

$$\vec{dB} = \frac{C}{r^2} I\vec{dl} \times \hat{r}$$



# Ley de Biot-Savart

- Mediante experimentos se comprueba que en el sistema SI.

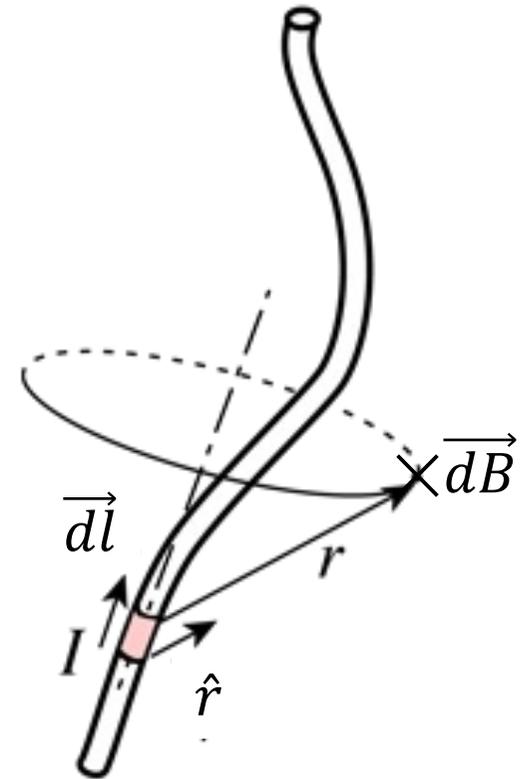
$$C = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

- Entonces, por similitud con la electrostática se define la permeabilidad magnética del vacío  $\mu_0$  tal que:

$$C = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

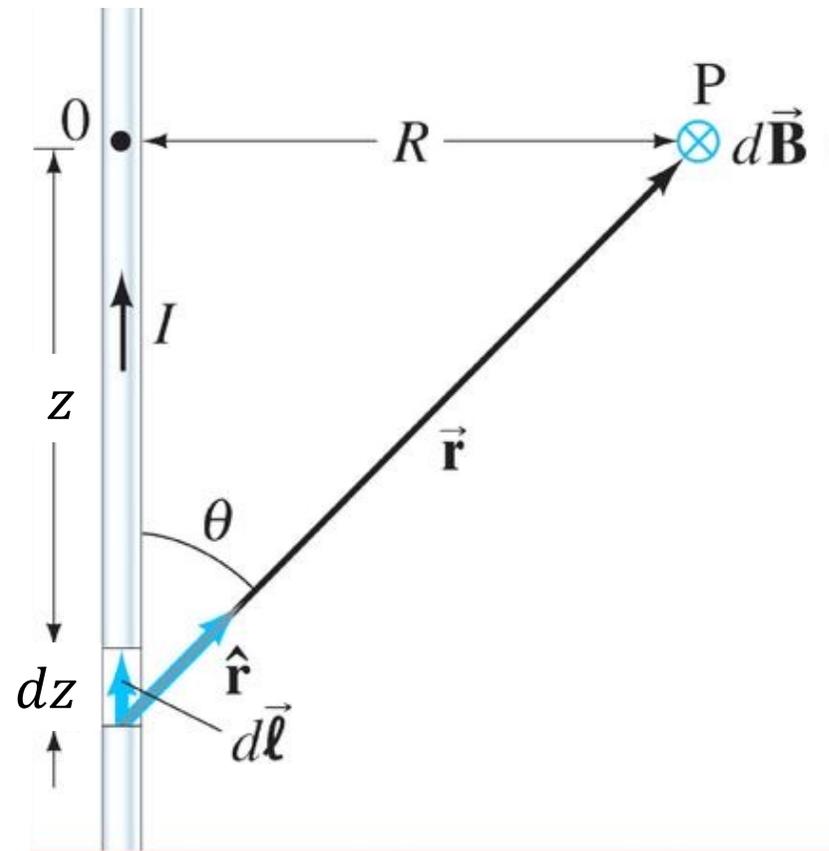
- Entonces

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 1,25 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$$



# Campo magnético de un hilo infinito

- Consideremos una corriente  $I$  a lo largo de un hilo paralelo al eje  $z$ .
- El elemento de corriente es
$$I \vec{dl} = I dz \hat{z}$$
- Desde el elemento de corriente, el punto  $P$  donde evaluó  $d\vec{B}$  se indica con el vector  $\vec{r} = r\hat{r}$  que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$ .
- $R$  es la distancia desde el eje a  $P$ .

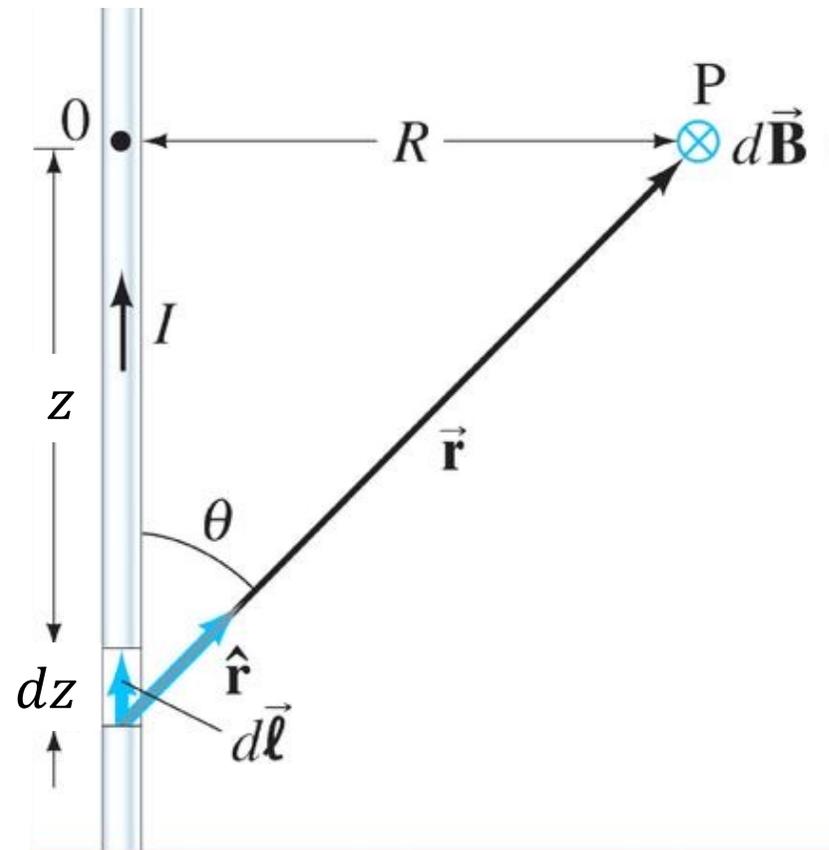


# Campo magnético de un hilo infinito

- Por la ley de la mano derecha  $d\vec{B}$  se dirige hacia adentro de la pantalla ( $\hat{\phi}$  en coordenadas cilíndricas). Integrando a lo largo del hilo tengo  $\vec{B}$ .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$$

- Donde  $r^2 = \frac{R^2}{(\sin \theta)^2} \quad y \quad -z = \frac{R}{\tan \theta}$



# Campo magnético de un hilo infinito

- Lo anterior indica que

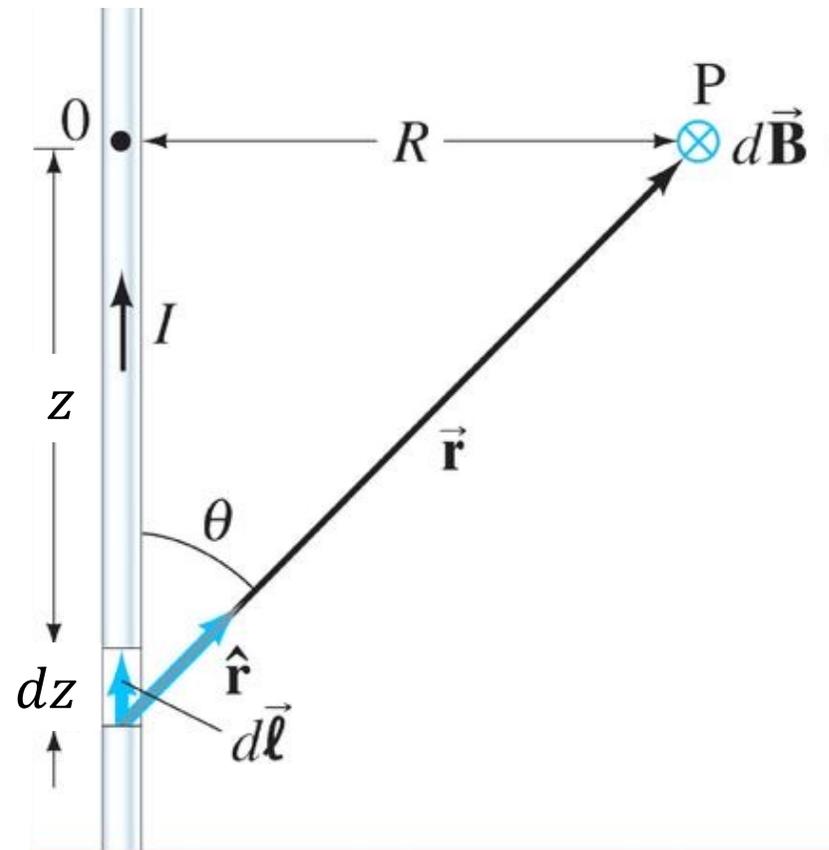
$$dz = \frac{R}{(\sin \theta)^2} d\theta$$

- Poniendo todo en función de  $R$  y  $\theta$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{R} \hat{\phi}$$

- Entonces

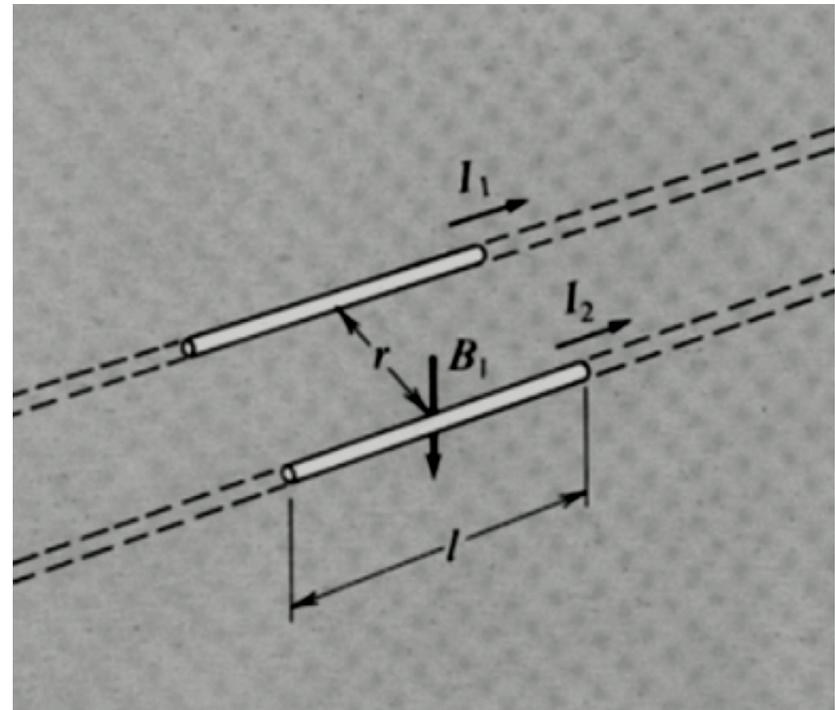
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi}$$



# Fuerza entre hilos de corriente

- Supongamos dos hilos rectilíneos largos paralelos con corrientes  $I_1$  e  $I_2$  separados por una distancia  $r$ .
- La corriente  $I_1$  da lugar a un campo magnético  $B_1$  e la altura del hilo 2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$



# Fuerza entre hilos de corriente

- Supongamos que  $I_2$  consta de  $n_2$  cargas por unidad de longitud de carga  $q_2$  a una velocidad  $v_2$ .

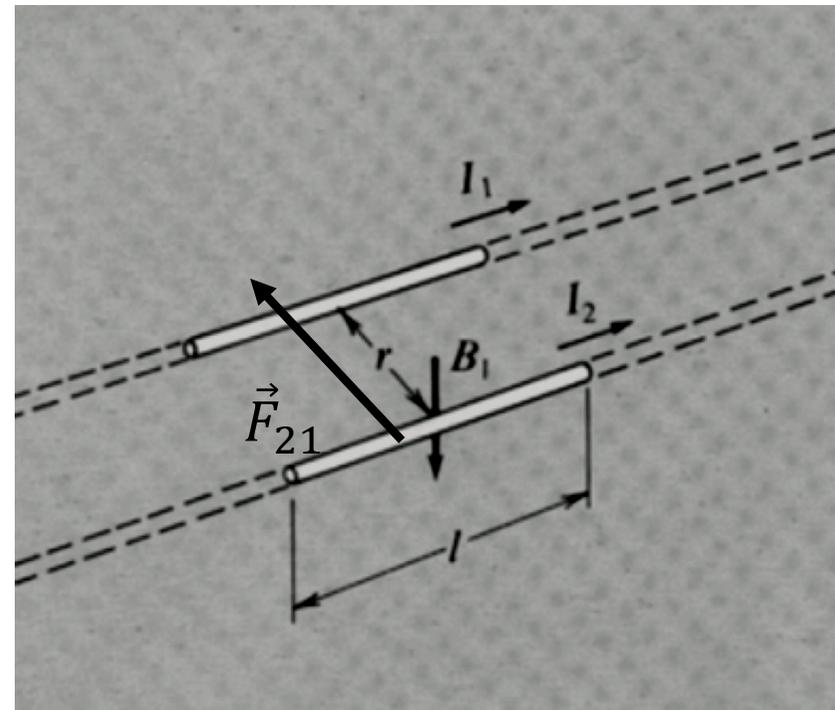
$$I_2 = n_2 q_2 v_2$$

- La fuerza de Lorentz sobre cada carga es:

$$q_2 v_2 B_1$$

- Por lo tanto, la fuerza por unidad de distancia es

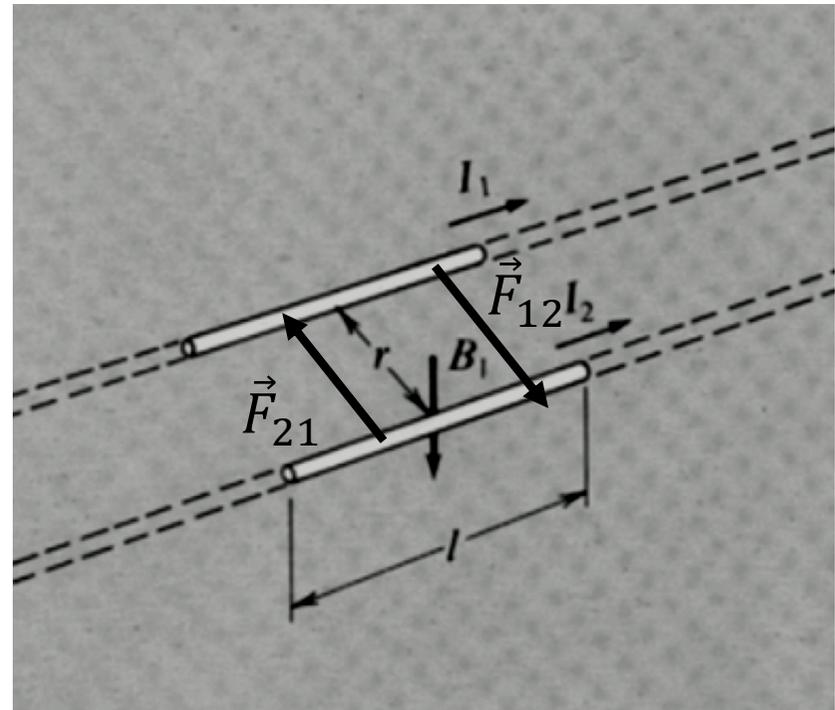
$$F_{21} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$



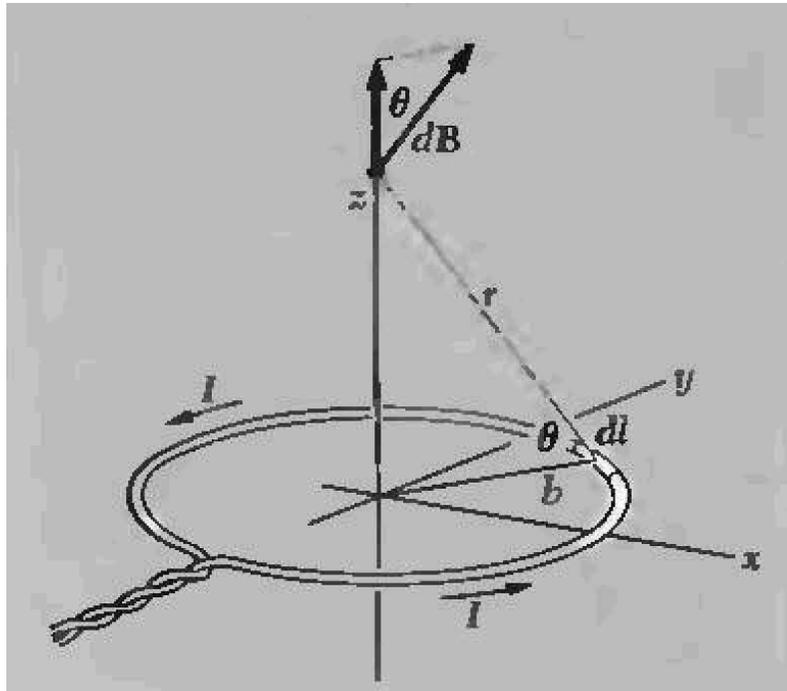
# Fuerza entre hilos de corriente

- La dirección de  $\vec{F}_{21}$  por la regla de la mano derecha da una atracción entre los cables, ya que la fuerza que el hilo 2 le hace al 1 es igual y opuesta.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



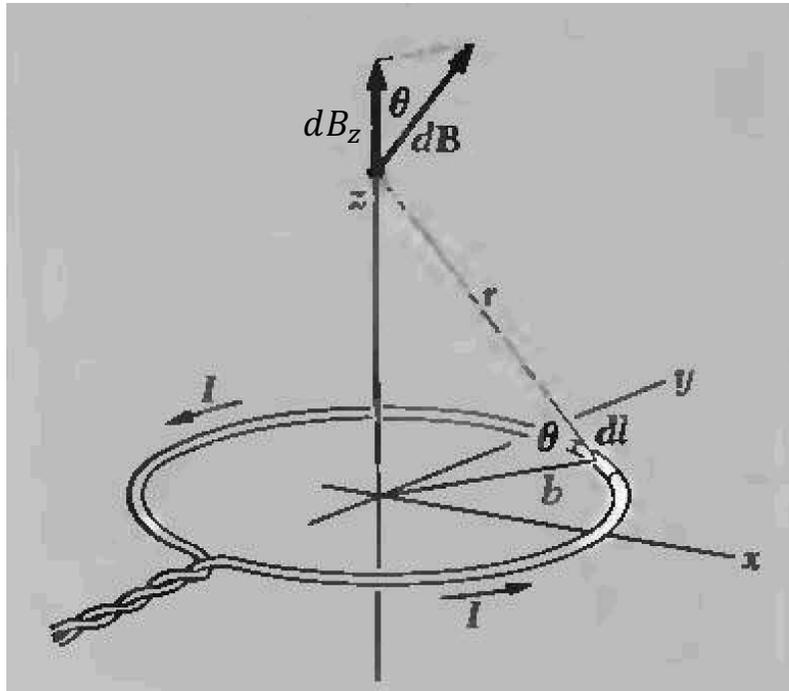
# Espira circular



- Espira plana circular de radio  $b$  por la que circula una corriente  $I$ .
- Vamos a calcular el campo en el eje de simetría  $z$ .
- Podemos esperar que el campo en el eje  $z$  será a lo largo del eje  $z$ .

$$\vec{B}(0,0,z) = B(z)\hat{z}$$

# Espira circular

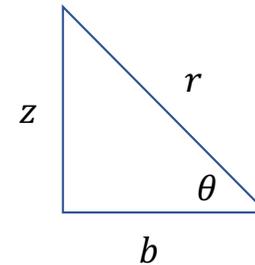


- Usando Biot-Savart calculemos el diferencial de la componente  $z$  del campo:

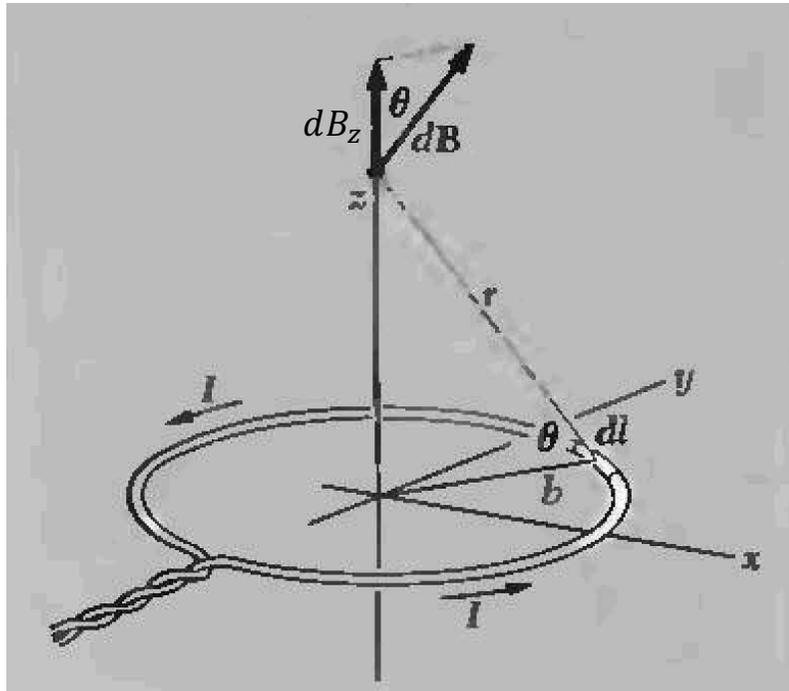
$$dB_z = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \theta$$

- Donde  $r$  es la distancia del elemento de corriente al punto de evaluación y  $\theta$  es el ángulo entre  $r$  y el radio de la espira  $b$ .

Atentxs al triángulo



# Espira circular



- Simplificando :

$$B_z = \frac{\mu_0 I b^2}{2 r^3}$$

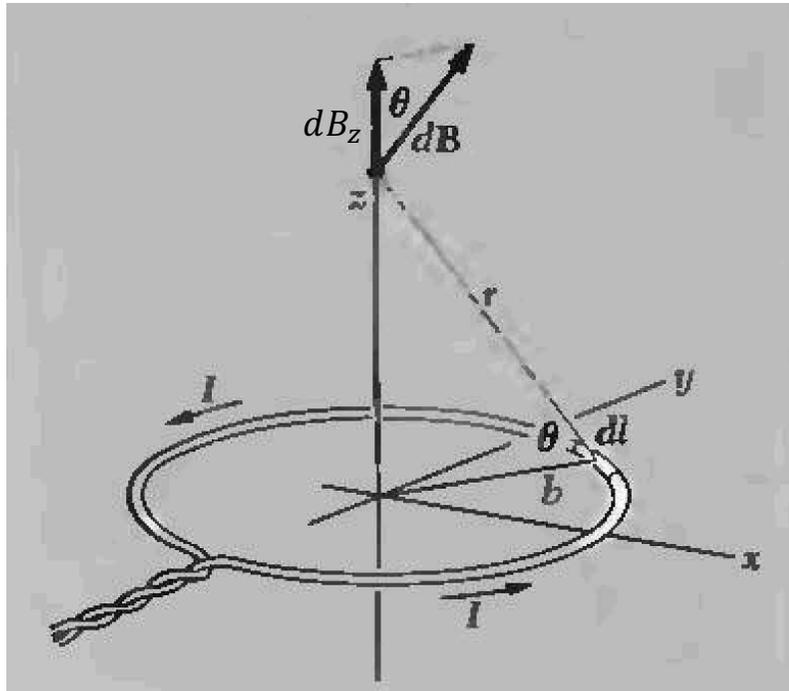
- Donde  $r$  es función de  $z$  :

$$r = \sqrt{b^2 + z^2}$$

- Entonces en el eje  $z$ :

$$\vec{B}(0,0,z) = B_z \hat{z} = \frac{\mu_0 I b^2}{2 [\sqrt{b^2 + z^2}]^3} \hat{z}$$

# Espira circular



- Simplificando :

$$B_z = \frac{\mu_0 I b^2}{2 r^3}$$

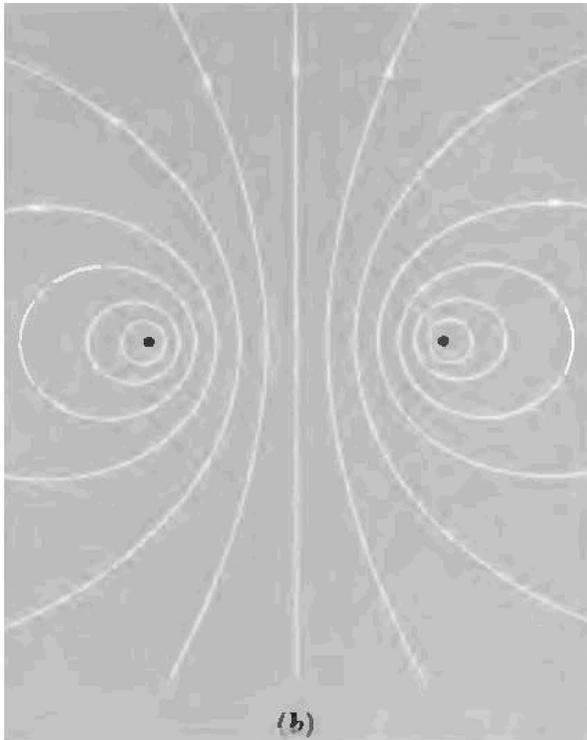
- Donde  $r$  es función de  $z$  :

$$r = \sqrt{b^2 + z^2}$$

- Entonces en el eje  $z$ :

$$\vec{B}(0,0,z) = B_z \hat{z} = \frac{\mu_0 I b^2}{2 [\sqrt{b^2 + z^2}]^3} \hat{z}$$

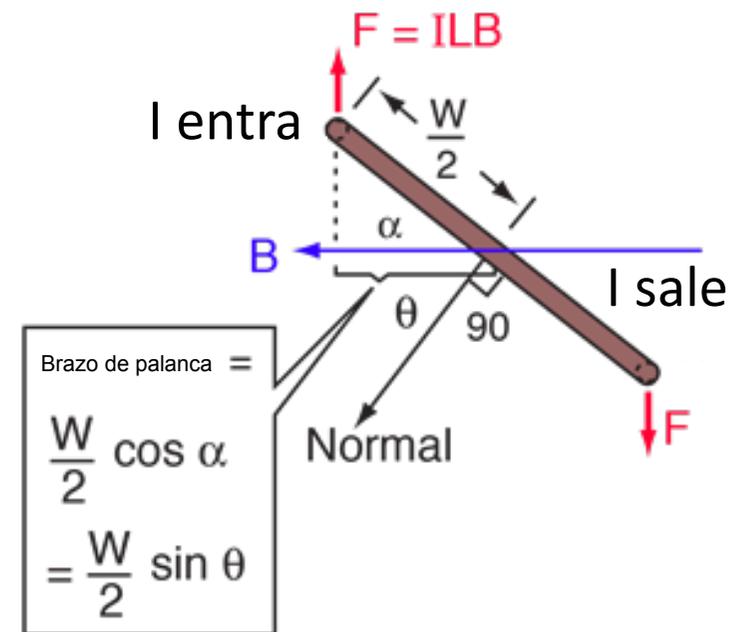
# Espira circular



Campo magnético de una espira circular en el plano que contiene al eje de simetría

# Torque sobre una espira de corriente

- Tomemos una espira rectangular de lados  $L$  y  $W$  por la que circula una corriente  $I$ .
- Coloquemosla en un campo uniforme  $\vec{B}$  que forma un ángulo  $\alpha$  con el lado de largo  $W$ .
- Nos interesa saber qué fuerzas aparecen y cómo se va a mover la espira.



$\theta$  es el ángulo entre  $B$  y la normal a la espira

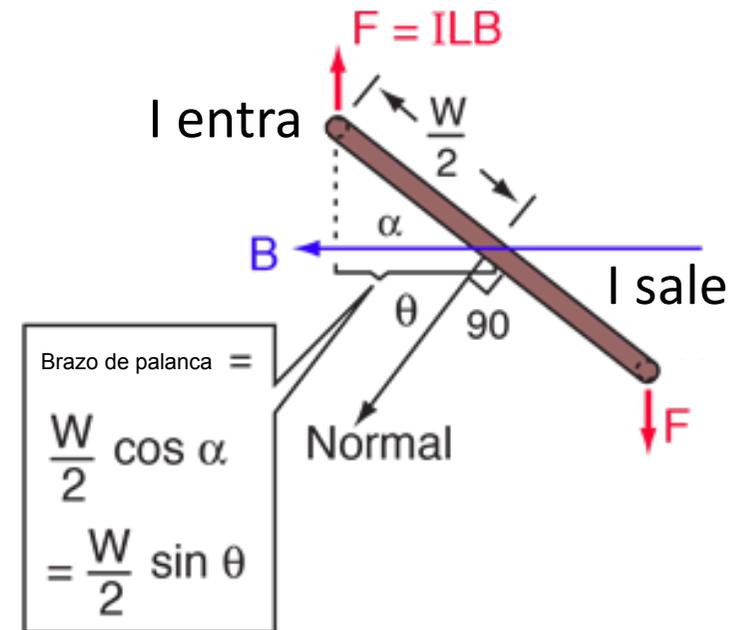
# Torque sobre una espira de corriente

- Vimos en el caso de los dos hilos paralelos que la fuerza por unidad de distancia venía dada por

$$f = IB$$

- Entonces los lados de largo  $L$  experimentan fuerzas opuestas de intensidad

$$F = ILB$$

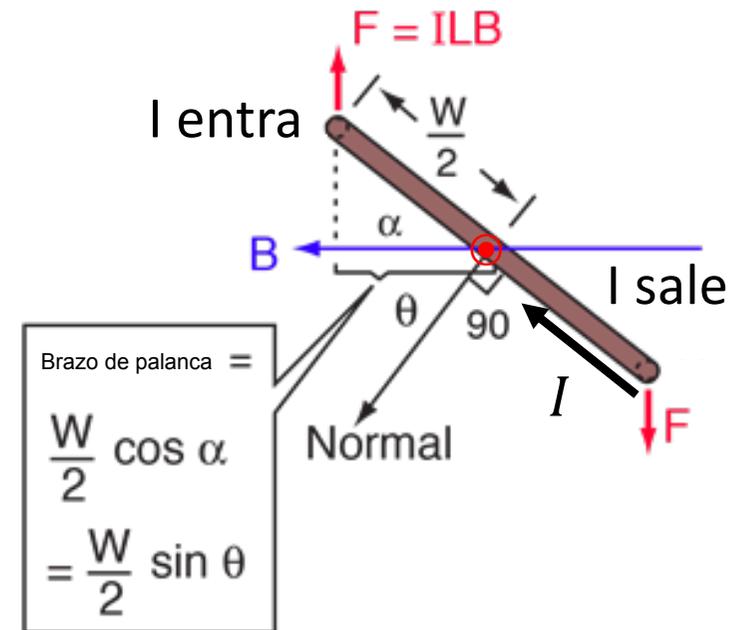


# Torque sobre una espira de corriente

- Las fuerzas en los lados de largo  $W$  (salen y entran de la pantalla) también son iguales y opuestas, de valor

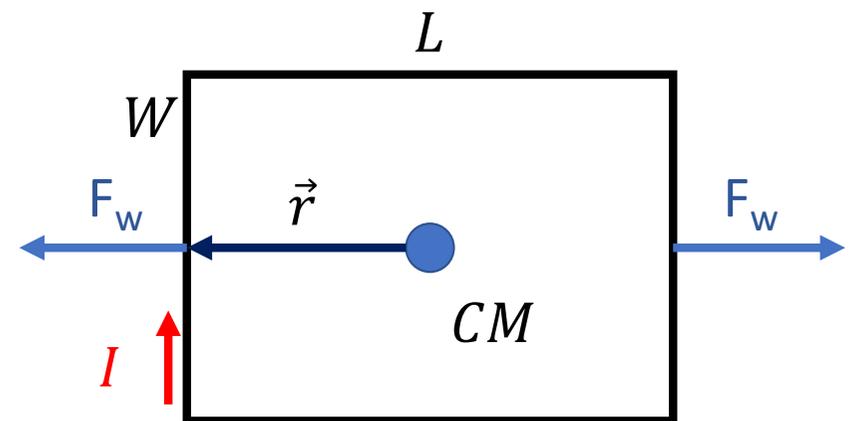
$$F_W = IWB \sin \alpha = IWB \cos \theta$$

- Entonces la suma total de fuerzas es cero y por lo tanto el centro de masa no se acelera.



# Torque sobre una espira de corriente

- Respecto al centro de masa, el momento de las fuerzas sobre los lados de largo  $W$  son nulos



Vista de arriba

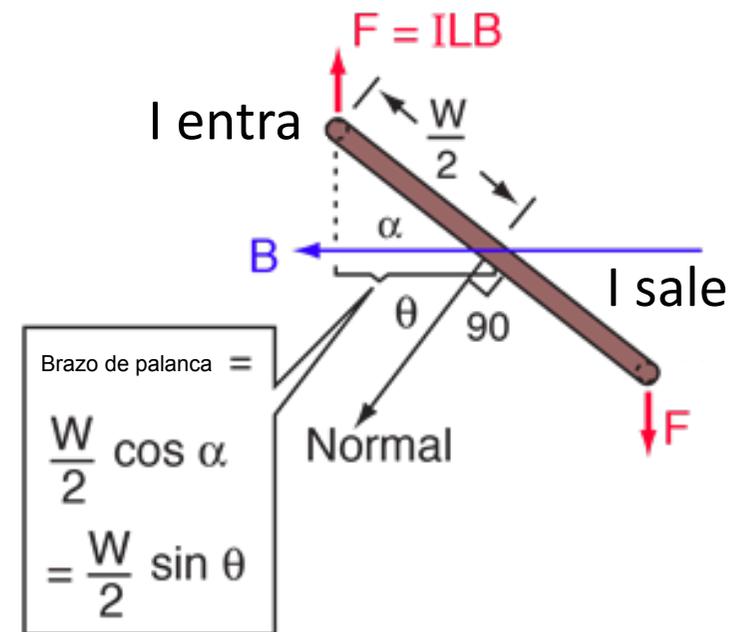
# Torque sobre una espira de corriente

- Respecto al centro de masa, el momento de las fuerzas sobre los lados de largo  $W$  son nulos
- Mientras que los lados de largo  $L$  contribuyen con torques respecto al centro de masa

$$\tau = 2F \frac{W}{2} \cos \alpha = ILBW \cos \alpha$$

$$= B I Area \sin \theta$$

- El torque apunta hacia adentro de la pantalla y tiende a alejar la 'espira' de  $\vec{B}$  o acercar la normal al campo.



# Torque sobre una espira de corriente

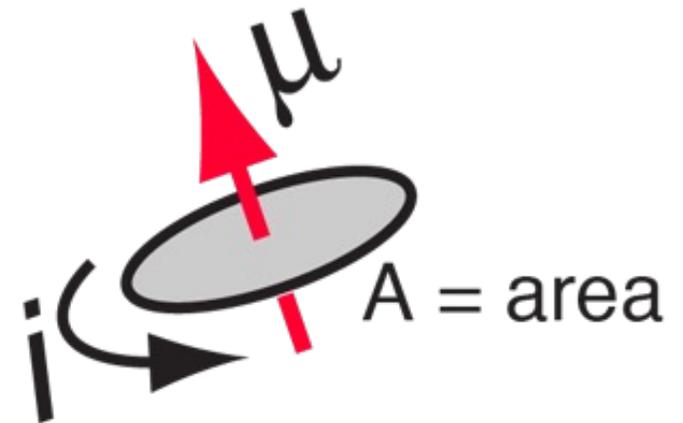
- Entonces el torque  $\vec{\tau}$  se define como el producto vectorial del campo magnético y un vector  $\vec{\mu}$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

- Llamaremos a  $\vec{\mu}$  momento magnético y definido como

$$\vec{\mu} = IA\hat{n}$$

donde  $\hat{n}$  es la normal a la espira obtenida mediante la regla de la mano derecha.



# Ley de Ampère

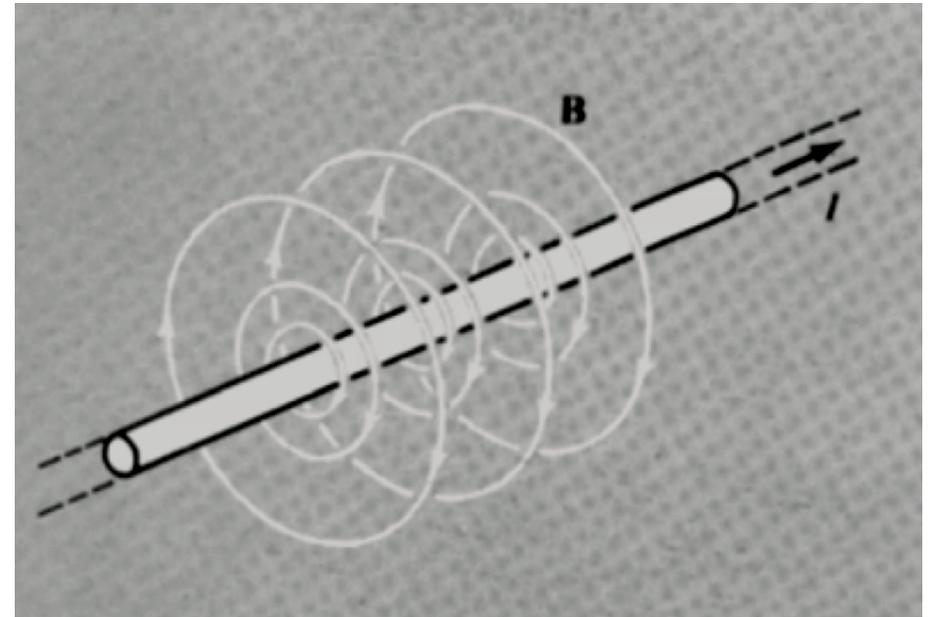


André – Marie Ampère (1775-1836)

# Campo magnético y corriente

- Supongamos un hilo rectilíneo de corriente  $I$ .
- Veamos cuánto vale la integral de camino cerrado del campo magnético.
- En el plano de las líneas de campo.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

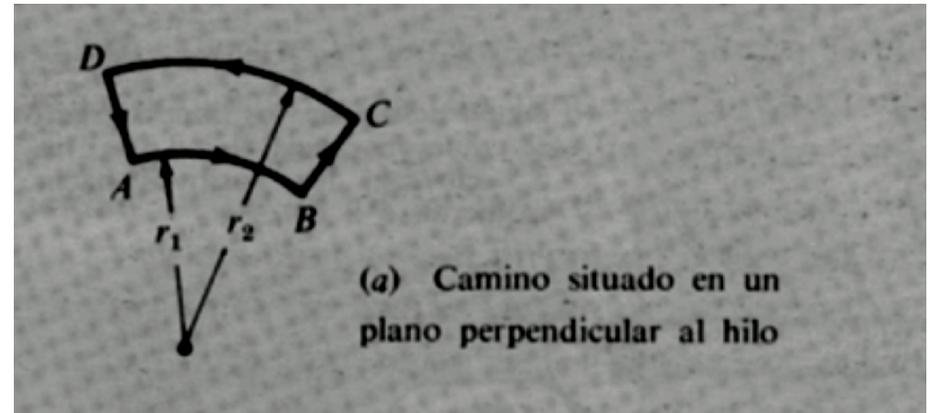


# Campo magnético y corriente

- Para caminos C que no encierran la corriente, como el (a), como el campo varía como  $\frac{1}{r}$  la integral de camino sobre AB es igual y opuesta a la CD.
- Además como en los tramos BC y DA  $\vec{B}$  es perpendicular a  $\vec{dl}$  por lo que la integral es nula.
- Entonces

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_{AB} \vec{B} \cdot \vec{dl} + \int_{CD} \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0$$

Plano de las líneas de campo



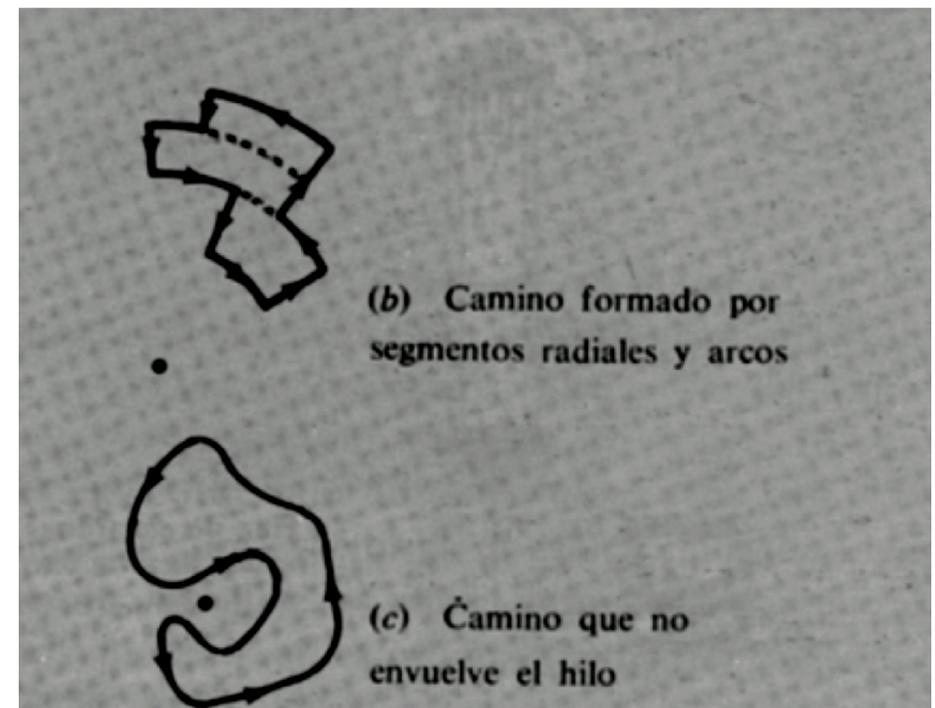
# Campo magnético y corriente

- Para un camino como el (b) puedo hacer tres caminos cerrados como el (a), con lo cual también:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

- De la misma manera yo puedo aproximar cualquier camino (c) por una sucesión de segmentos infinitesimales radiales y a r constante (arco).

Plano de las líneas de campo

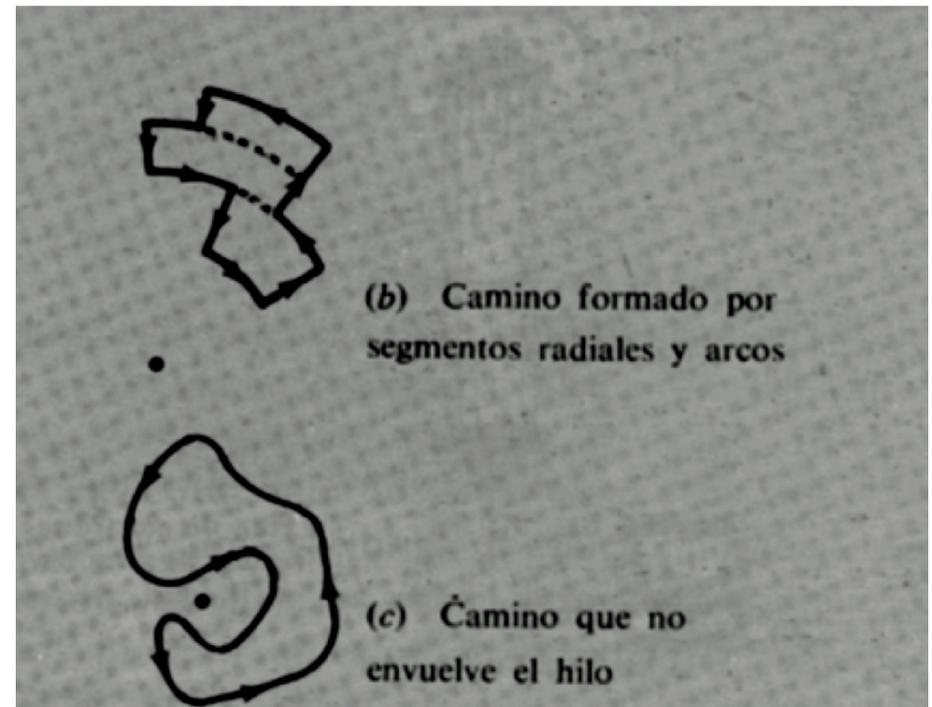


# Campo magnético y corriente

- Entonces podemos concluir que para todo camino que no encierre la corriente:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Plano de las líneas de campo

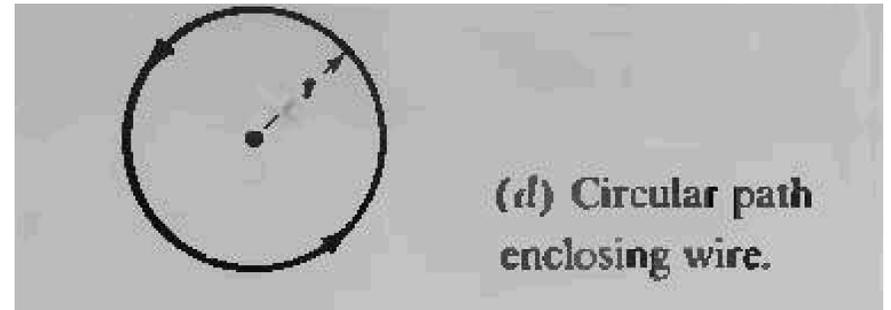


# Campo magnético y corriente

- Para caminos C que encierran la corriente, como el círculo de radio r (d),  $\vec{B}$  es paralelo a  $\vec{dl}$  y entonces la integral de camino cerrado da:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

Plano de las líneas de campo



# Campo magnético y corriente

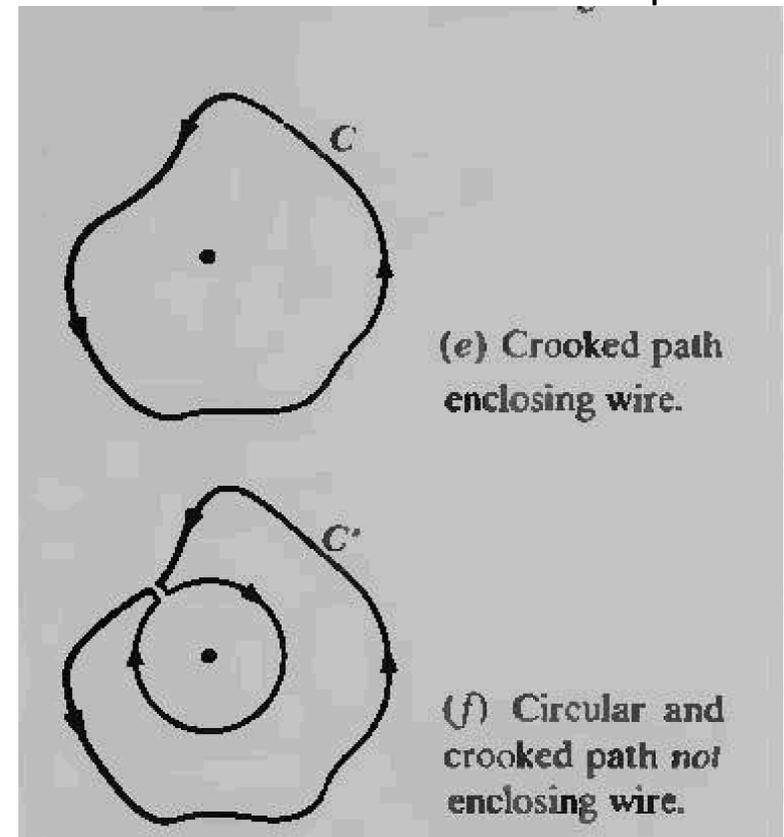
- Para caminos irregulares C como el (e), podemos pensar en un camino que no encierre a la corriente que es la suma de C y de un círculo **en sentido inverso** (f) unidos por un tramo muy estrecho de ida y vuelta que no suma.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{\text{Circulo}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Entonces para todo camino C

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\text{Circulo}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Plano de las líneas de campo



# Campo magnético y corriente

- Entonces, en general se puede demostrar que la integral de camino cerrado del campo magnético es igual a la permeabilidad magnética por la corriente que queda encerrada por ese camino.

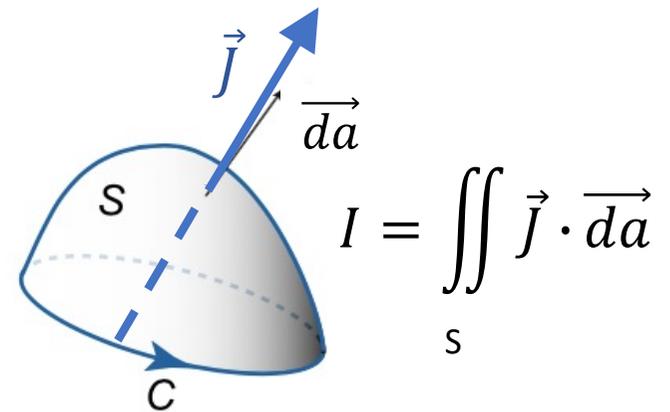
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \textit{Corriente encerrada}$$

# Campo magnético y corriente

- Entonces, en general se puede demostrar que la integral de camino cerrado del campo magnético es igual a la permeabilidad magnética por la corriente que queda encerrada por ese camino.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \text{ Corriente encerrada}$$

- La corriente encerrada  $I$  puede ser vista como el flujo de densidad de corriente  $\vec{J}$  a través de cualquier superficie  $S$  encerrada por  $C$ .



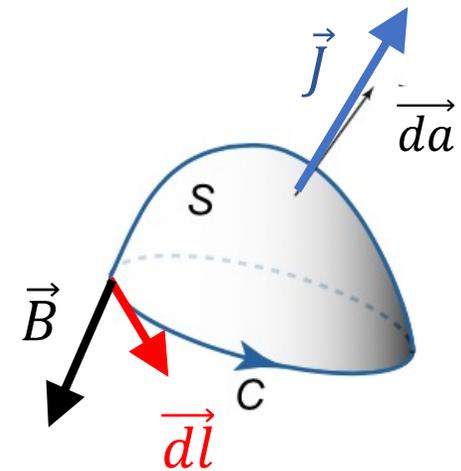
# Ley de Ampère

- Entonces reemplazando  $I$  por  $\iint_S \vec{J} \cdot \vec{d}\vec{a}$  tenemos la Ley de Ampère.

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{d}\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \vec{d}\vec{a}$$

- Según el Teorema de Stokes esto equivale a escribir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$



## Importante !

El sentido de recorrido del camino  $C$  y  $\vec{d}\vec{a}$  se relacionan por la regla de la mano derecha