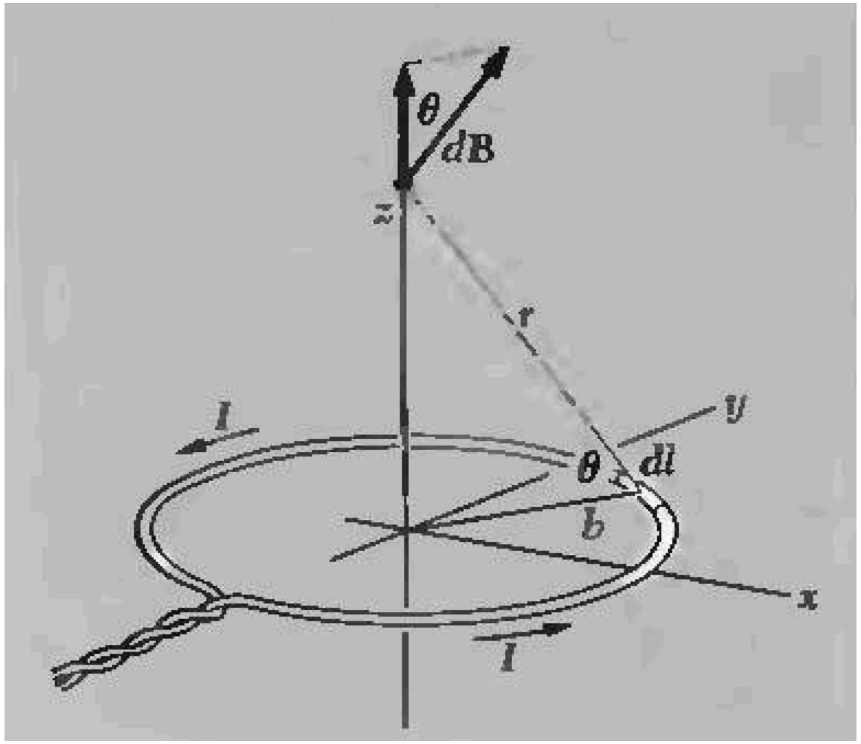
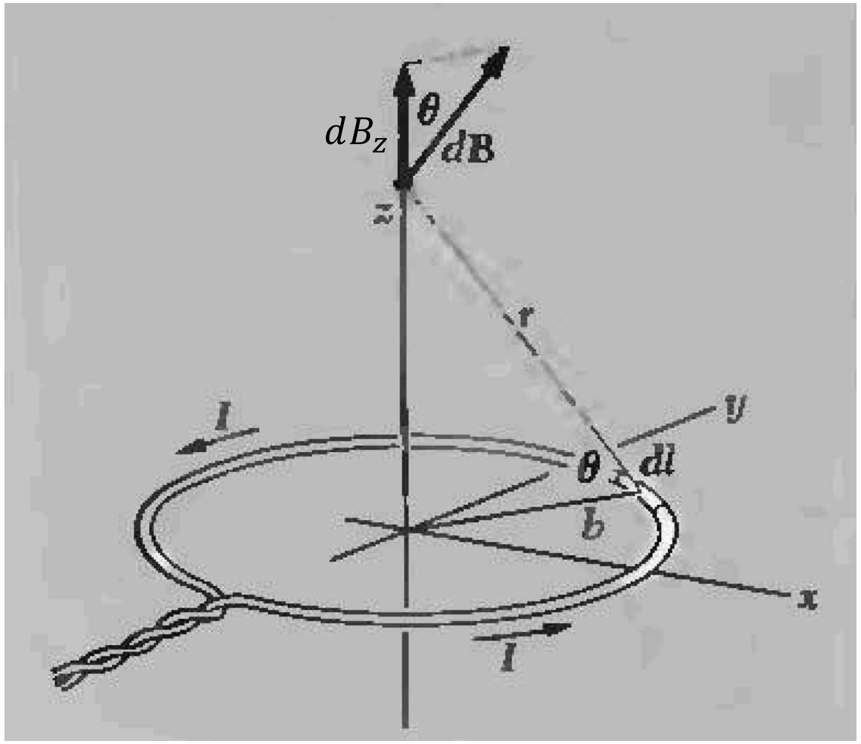
Espira circular



- Espira plana circular de radio b por la que circula una corriente I.
- Vamos a calcular el campo en el eje de simetría z.
- Podemos esperar que el campo en el eje z será a lo largo del eje z.

$$\vec{B}(0,0,z) = B(z)\hat{z}$$

Espira circular

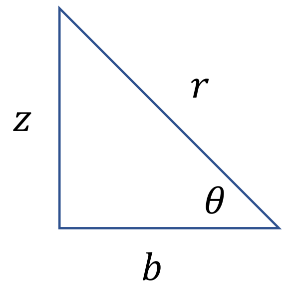


- Usando Biot-Savart calculemos el diferencial de la componente z del campo:

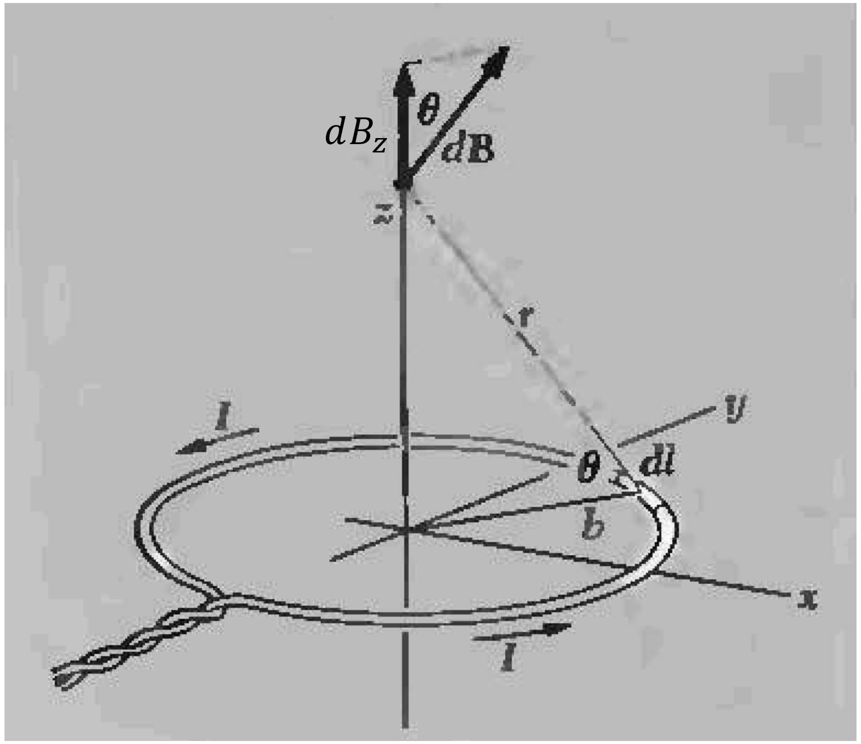
$$dB_z = dB\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\cos\theta$$

- Donde r es la distancia del elemento de corriente al punto de evaluación y θ es el ángulo entre r y el radio de la espira b.

Atentxs al triángulo



Espira circular



- Simplificando :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{I\,b^2}{r^3}$$

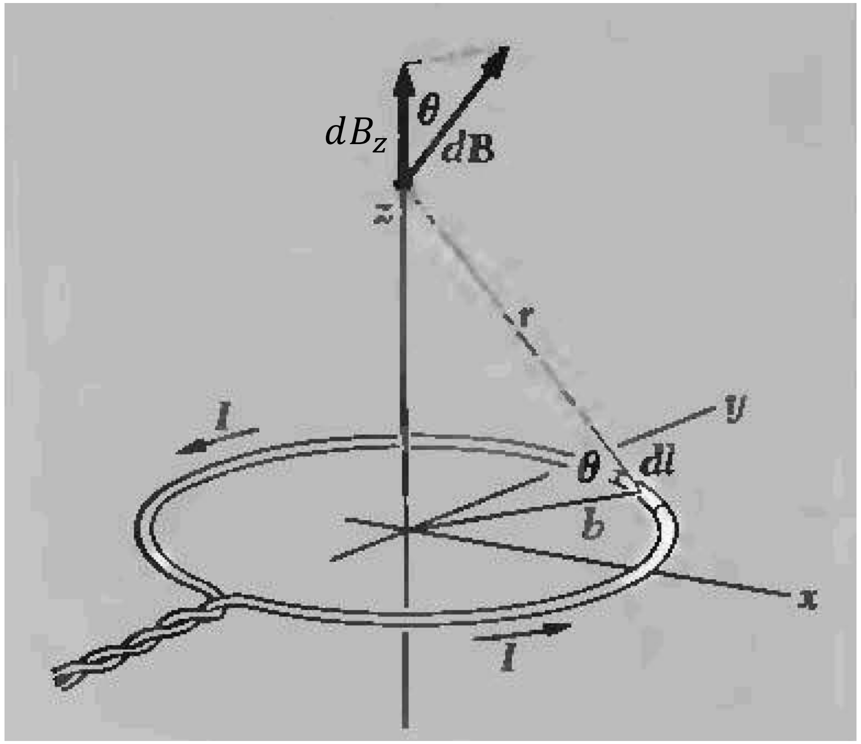
- Donde r es función de z :

$$r = \sqrt{b^2 + z^2}$$

- Entonces en el eje z:

$$\vec{B}(0,0,z) = B_z\hat{z} = \frac{\mu_0}{2}\frac{I\,b^2}{\left[\sqrt{b^2+z^2}\right]^3}\,\hat{z}$$

Espira circular



- Simplificando :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{I\,b^2}{r^3}$$

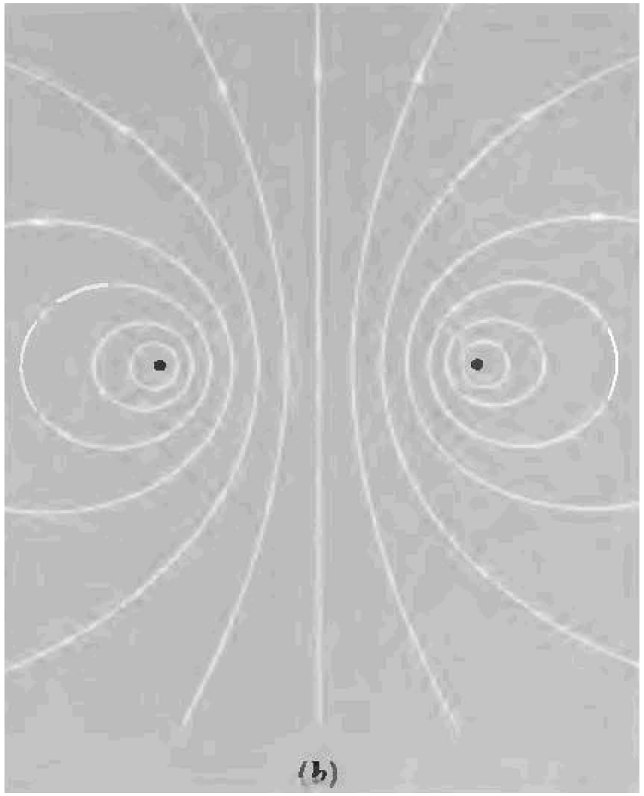
- Donde r es función de z :

$$r = \sqrt{b^2 + z^2}$$

- Entonces en el eje z:

$$\vec{B}(0,0,z) = B_z\hat{z} = \frac{\mu_0}{2}\frac{I\,b^2}{\left[\sqrt{b^2+z^2}\right]^3}\,\hat{z}$$

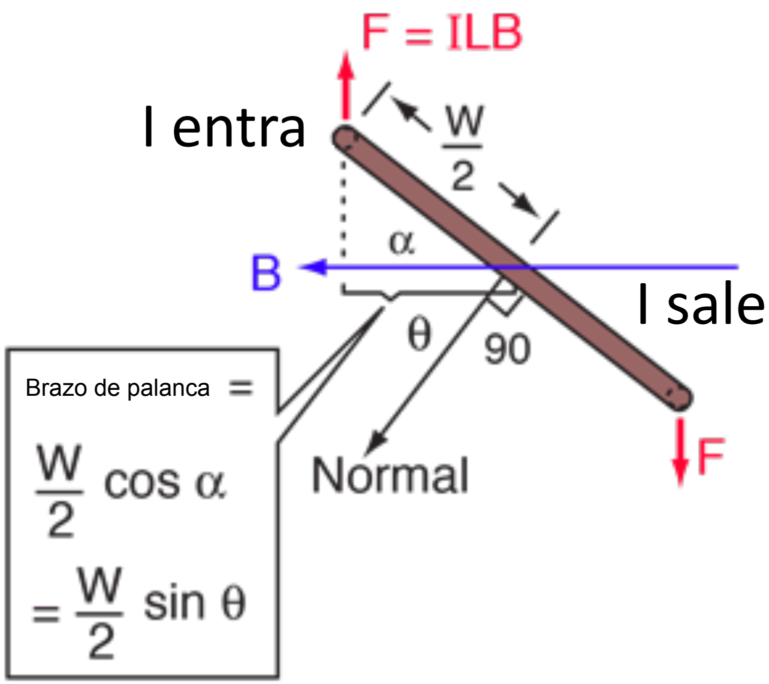
Espira circular



Campo magnético de una espira circular en el plano que contiene al eje de simetría

Torque sobre una espira de corriente

- Tomemos una espira rectangular de lados L y W por la que circula una corriente I.
- Coloquémosla en un campo uniforme $\vec{B}$ que forma un angulo α con el lado de largo W.
- Nos interesa saber qué fuerzas aparecen y cómo se va a mover la espira.



θ es el ángulo entre B y la normal a la espira

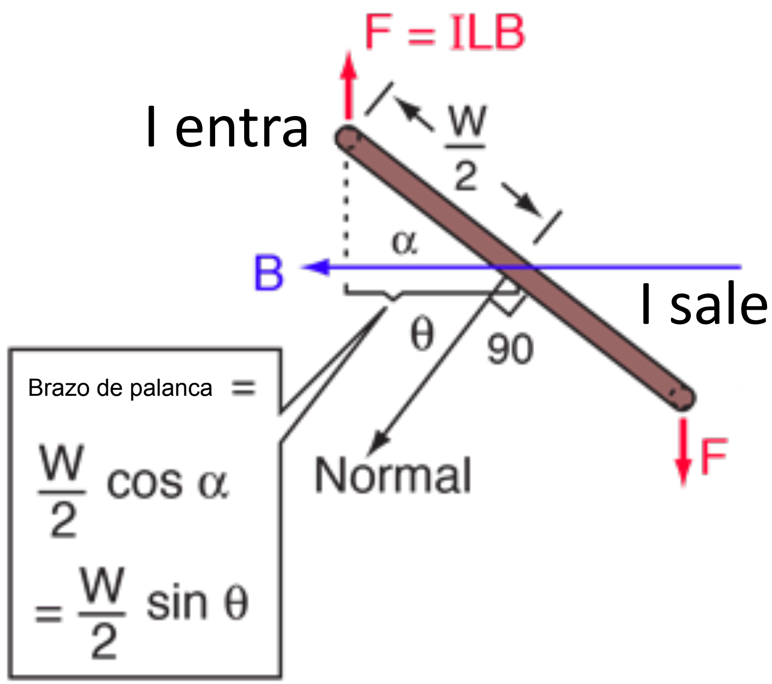
Torque sobre una espira de corriente

- Vimos en el caso de los dos hilos paralelos que la fuerza por unidad de distancia venía dada por

$$f = IB$$

- Entonces los lados de largo L experimentan fuerzas opuestas de intensidad

$$F = ILB$$

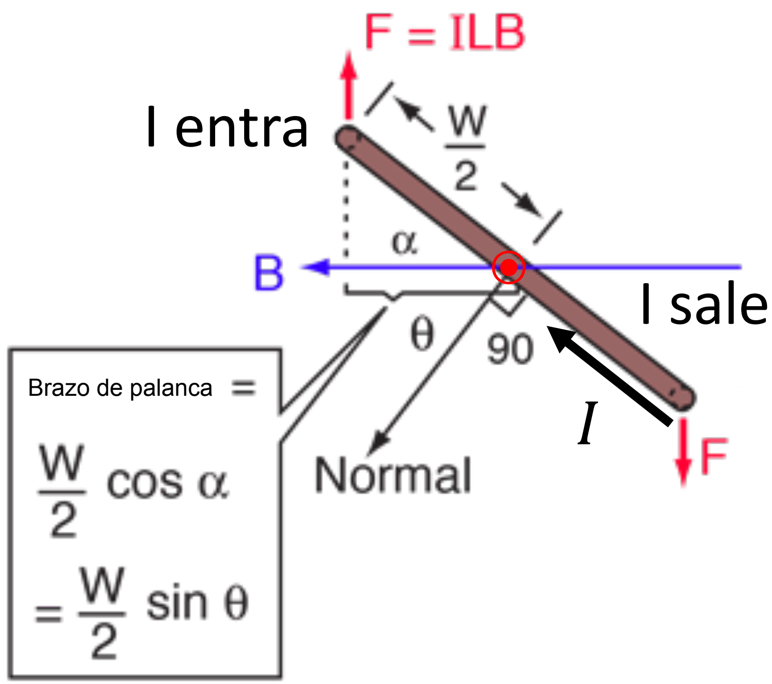


Torque sobre una espira de corriente

- Las fuerzas en los lados de largo W (salen y entran de la pantalla) también son iguales y opuestas, de valor

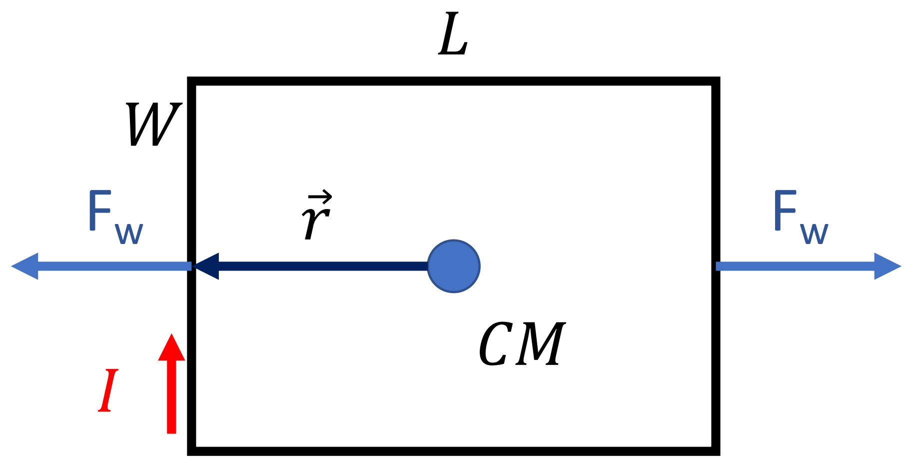
$$F_W = IWB \sin\alpha = IWB \cos\theta$$

- Entonces la suma total de fuerzas es cero y por lo tanto el centro de masa no se acelera.



Torque sobre una espira de corriente

- Respecto al centro de masa, el momento de las fuerzas sobre los lados de largo W son nulos



Vista de arriba

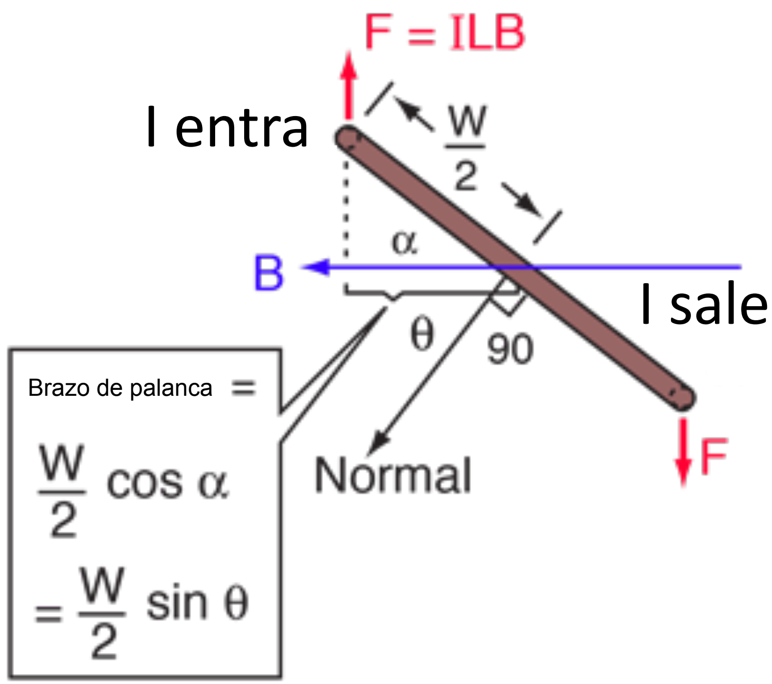
Torque sobre una espira de corriente

- Respecto al centro de masa, el momento de las fuerzas sobre los lados de largo W son nulos

- Mientras que los lados de largo L contribuyen con torques respecto al centro de masa

$$\tau = 2F\frac{W}{2}\cos\alpha = ILBW\cos\alpha$$
$$= B\ I\ Area\sin\theta$$

- El torque apunta hacia adentro de la pantalla y tiende a alejar la ‘espira’ de $\vec{B}$ o acercar la normal al campo.



Torque sobre una espira de corriente

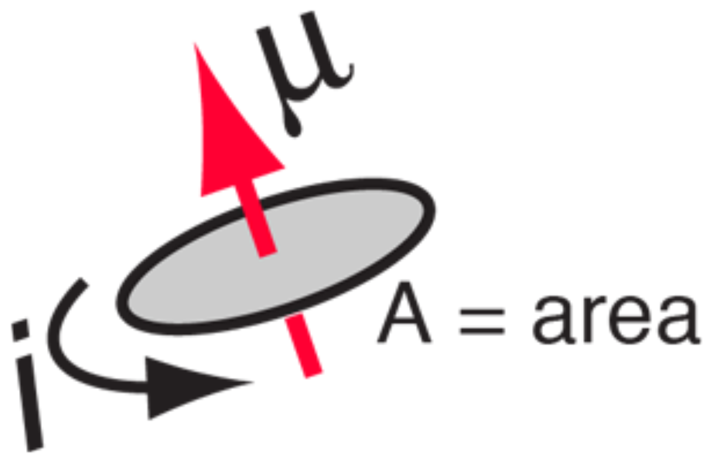
- Entonces el torque $\vec{\tau}$ se define como el producto vectorial del campo magnético y un vector $\vec{\mu}$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

- Llamaremos a $\vec{\mu}$ momento magnético y definido como

$$\vec{\mu} = IA\hat{n}$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la espira obtenida mediante la regla de la mano derecha.



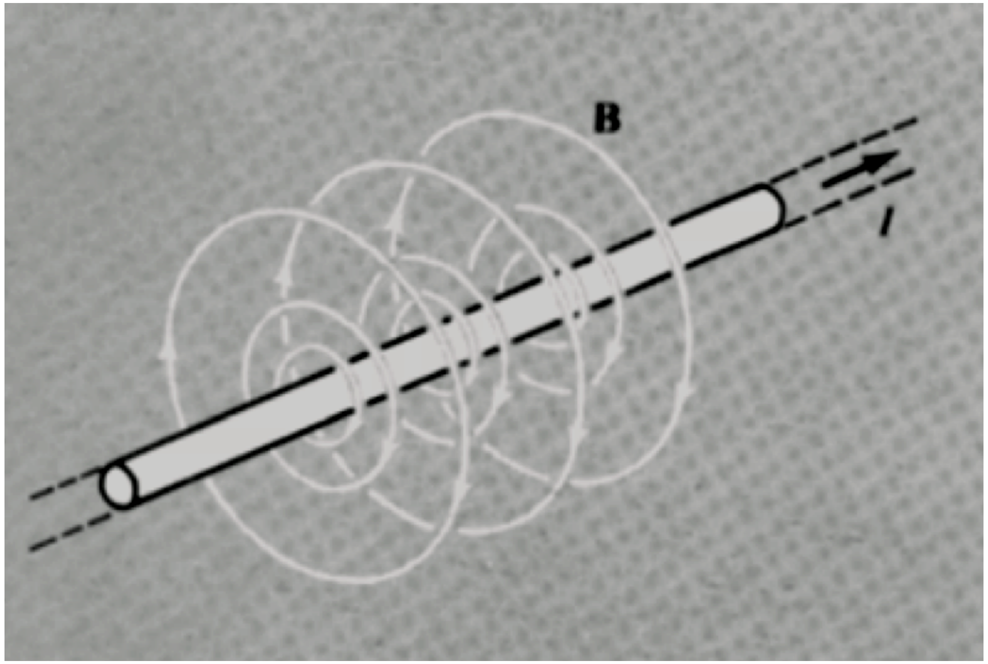
Ley de Ampère

André – Marie Ampère (1775-1836)

Campo magnético y corriente

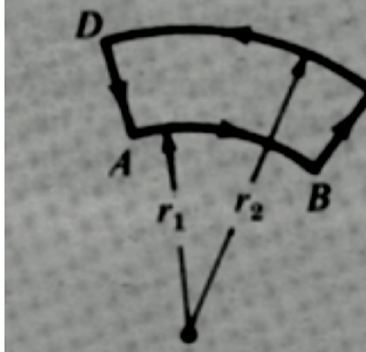
- Supongamos un hilo rectilíneo de corriente I.
- Veamos cuánto vale la integral de camino cerrado del campo magnético.
- En el plano de las líneas de campo.

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl}$$



Campo magnético y corriente

Plano de las líneas de campo



(*a*) Camino situado en un plano perpendicular al hilo

- Para caminos C que no encierran la corriente, como el (a), como el campo varía como $\frac{1}{r}$ la integral de camino sobre AB es igual y opuesta a la CD.
- Además como en los tramos BC y DA $\vec{B}$ es perpendicular a $\overrightarrow{dl}$ por lo que la integral es nula.
- Entonces

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{AB} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_{CD} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

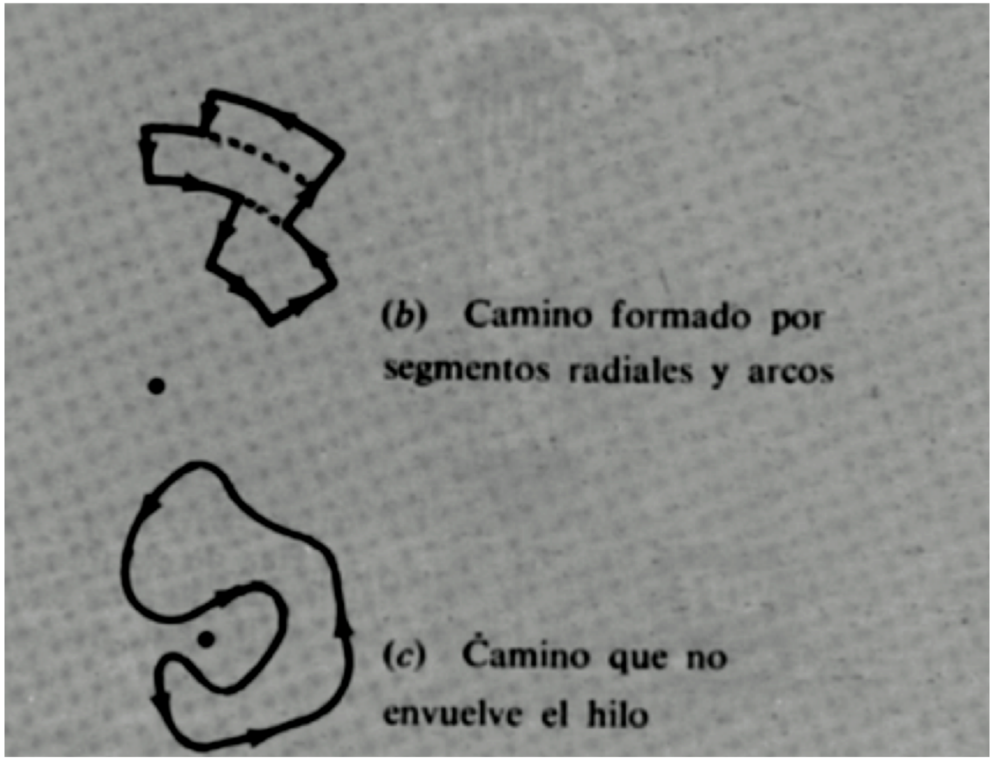
Campo magnético y corriente

- Para un camino como el (b) puedo hacer tres caminos cerrados como el (a), con lo cual también:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

- De la misma manera yo puedo aproximar cualquier camino (c) por una sucesión de segmentos infinitesimales radiales y a r constante (arco).

Plano de las líneas de campo

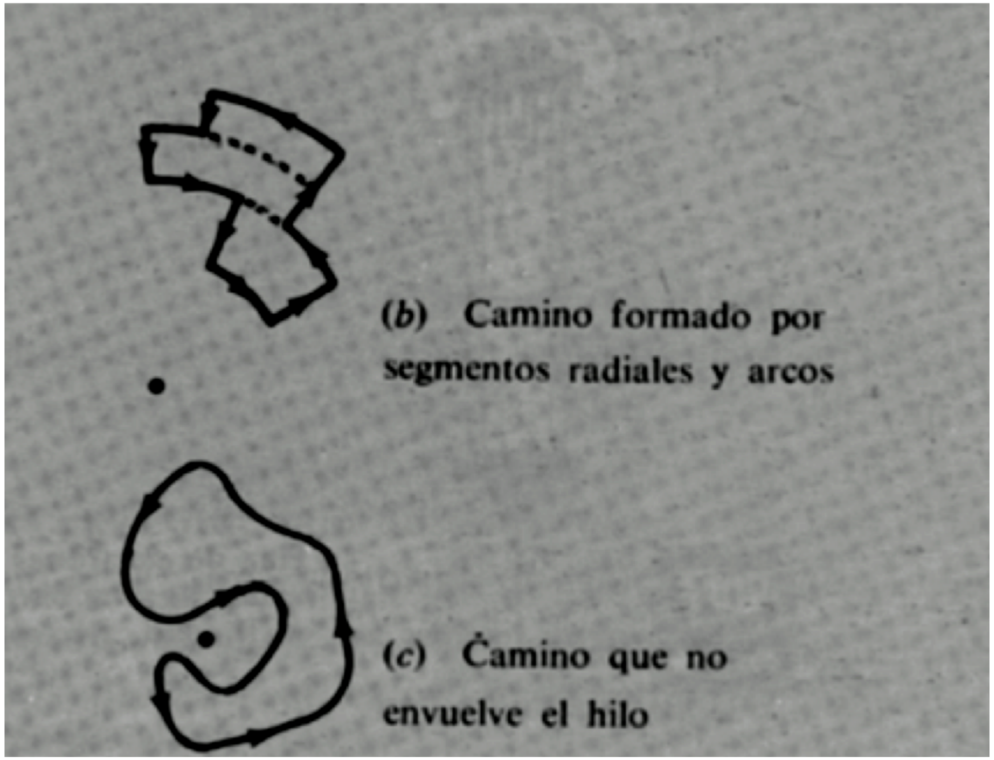


Campo magnético y corriente

- Entonces podemos concluir que para todo camino que no encierre la corriente:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

Plano de las líneas de campo

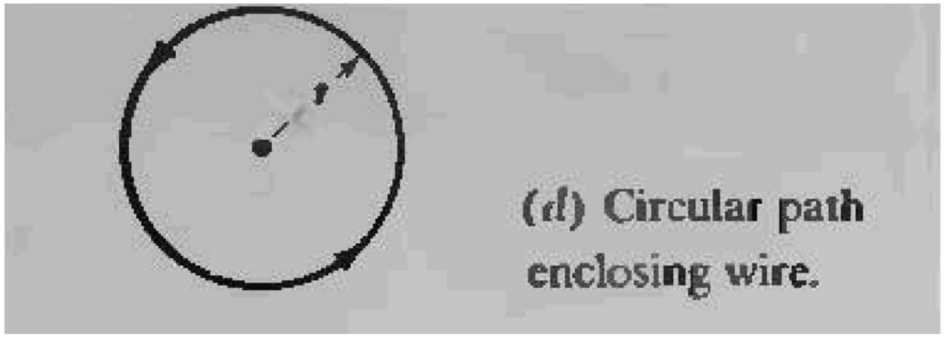


Campo magnético y corriente

- Para caminos C que encierran la corriente, como el circulo de radio r (d), $\vec{B}$ es paralelo a $\overrightarrow{dl}$ y entonces la integral de camino cerrado da:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

Plano de las líneas de campo



Campo magnético y corriente

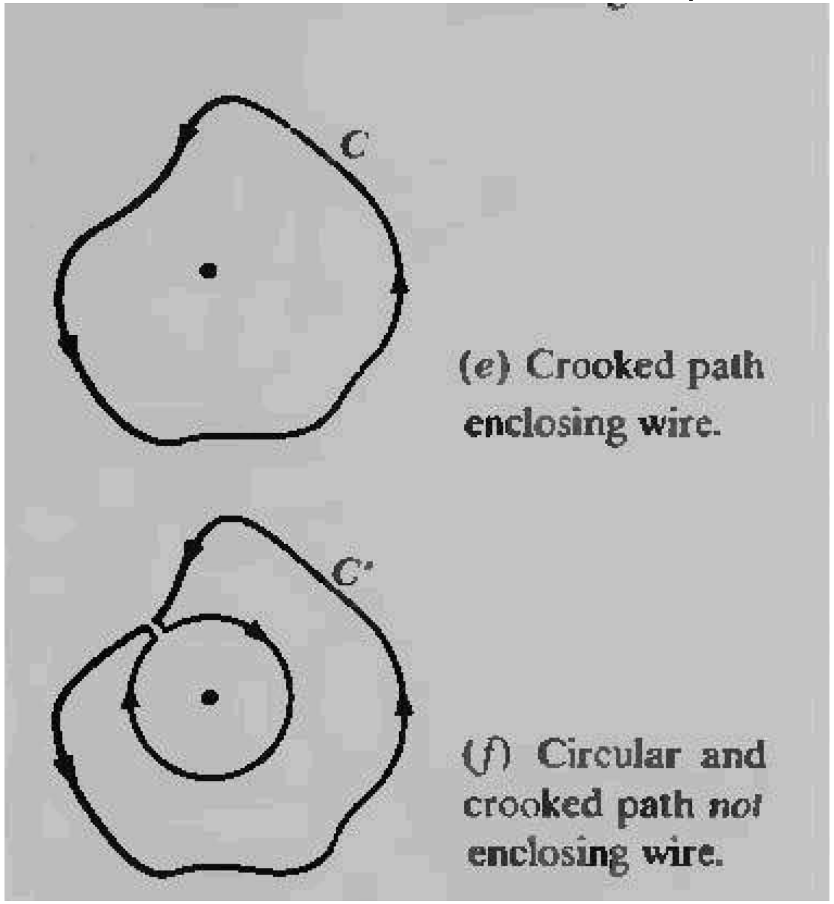
- Para caminos irregulares C como el (e), podemos pensar en un camino que no encierre a la corriente que es la suma de C y de un círculo **en sentido inverso** (f) unidos por un tramo muy estrecho de ida y vuelta que no suma.

$$\oint \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \oint_{\text{C}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} + \oint_{\text{Circulo}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = 0$$

- Entonces para todo camino C

$$\oint_{\text{C}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = -\oint_{\text{Circulo}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0 I$$

Plano de las líneas de campo



Campo magnético y corriente

- Entonces, en general se puede demostrar que la integral de camino cerrado del campo magnético es igual a la permeabilidad magnética por la corriente que queda encerrada por ese camino.

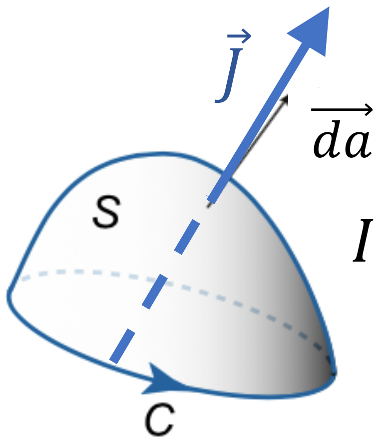
$$\oint_{C} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \, Corriente \; encerrada$$

Campo magnético y corriente

- Entonces, en general se puede demostrar que la integral de camino cerrado del campo magnético es igual a la permeabilidad magnética por la corriente que queda encerrada por ese camino.

$$\oint_{C} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \, Corriente\ encerrada$$

- La corriente encerrada *I* puede ser vista como el flujo de densidad de corriente $\vec{J}$ a través de cualquier superficie S encerrada por C.



$$I = \iint_{S} \vec{J} \cdot \overrightarrow{da}$$

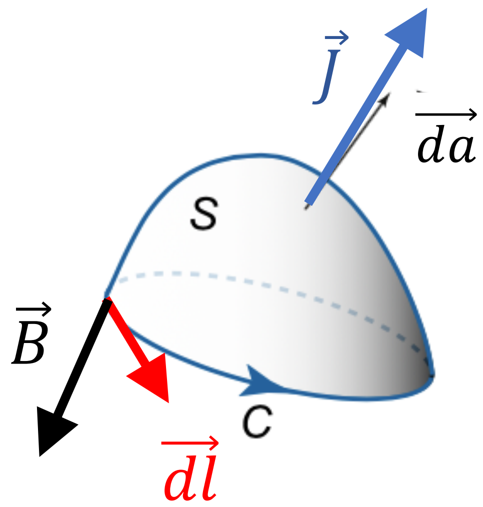
Ley de Ampère

- Entonces reemplazando I por $\iint_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{da}$ tenemos la Ley de Ampère.

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{da}$$

- Según el Teorema de Stokes esto equivale a escribir:

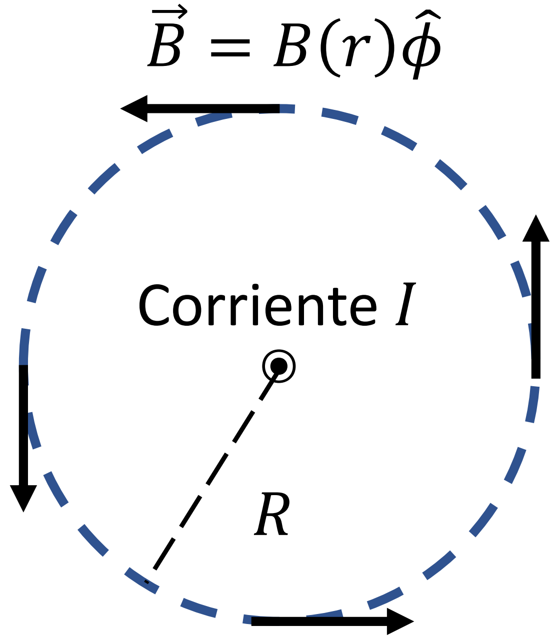
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$



Importante !
El sentido de recorrido del camino C y $\overrightarrow{da}$ se relacionan por la regla de la mano derecha

Aplicaciones de la ley de Ampère: hilo de corriente I

- Problema con simetría de traslación a lo largo del hilo
- El campo $\vec{B}$ es tangente a los círculos concéntricos centrados en el hilo.
- El módulo de $\vec{B}$ depende sólo de la distancia r.



Aplicaciones de la ley de Ampère: hilo de corriente I

- Tomemos C como la circunferencia de radio R recorrida en sentido antihorario con la corriente hacia afuera de la pantalla.

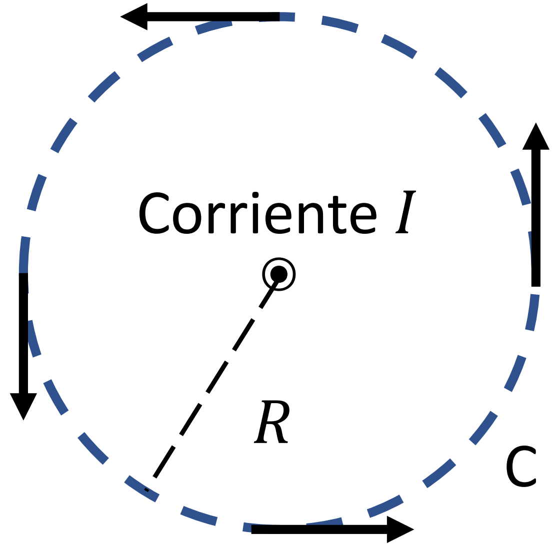
- Tomando $\overrightarrow{dl} = Rd\phi\hat{\phi}$ la integral queda

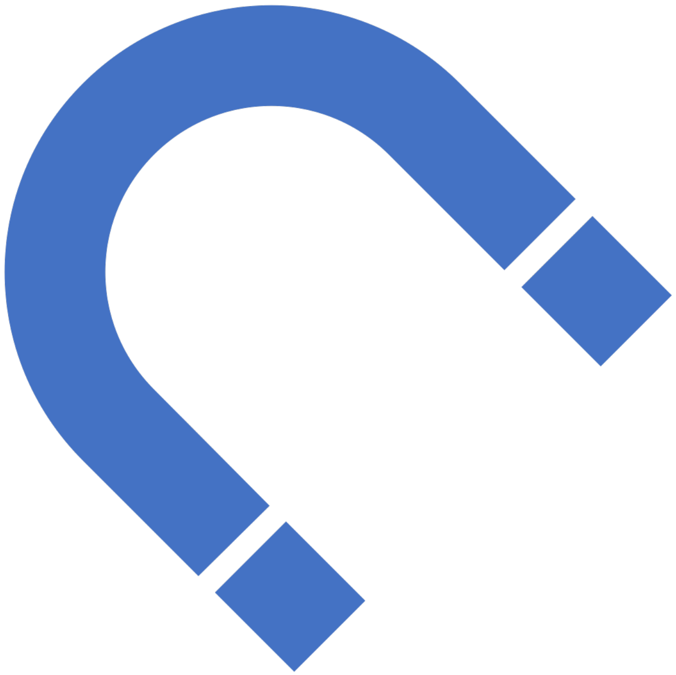
$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \oint B(R)\hat{\phi} \cdot Rd\phi\hat{\phi} = \mu_0 I$$

$$B(R)R \int_0^{2\pi} d\phi \; = 2\pi B(R)R = \mu_0 I$$

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$$





Magnetismo en la materia

La ausencia de monopolos magnéticos

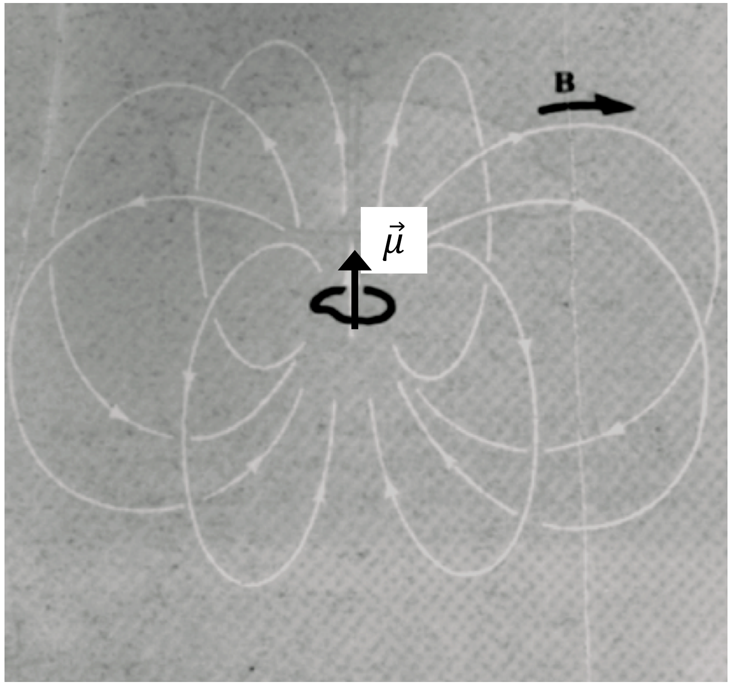
- Normalmente la ley de Ampère en notación diferencial no alcanza por sí sola para obtener $\vec{B}$ a partir de $\vec{J}$.
- Por eso se necesita otra ecuación. Una relativa a la divergencia de $\vec{B}$.
- Es posible demostrar (no lo haremos aquí) que:
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
- Esto quiere decir que no hay manantiales ni sumideros de campo magnético (no hay monopolos magnéticos) sea cual fuere la distribución de corrientes representada por $\vec{J}$.
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ es otra de las ecuaciones de Maxwell

El campo lejano de una espira es dipolar

- La ausencia de monopolos magnéticos hace que un campo dipolar sea la forma más básica de un campo eléctrico.
- Es posible demostrar que el campo magnético **lejos de cualquier espira plana es de tipo dipolar**.
- En coordenadas esféricas y tomando $\vec{\mu} = IA\hat{z}$:

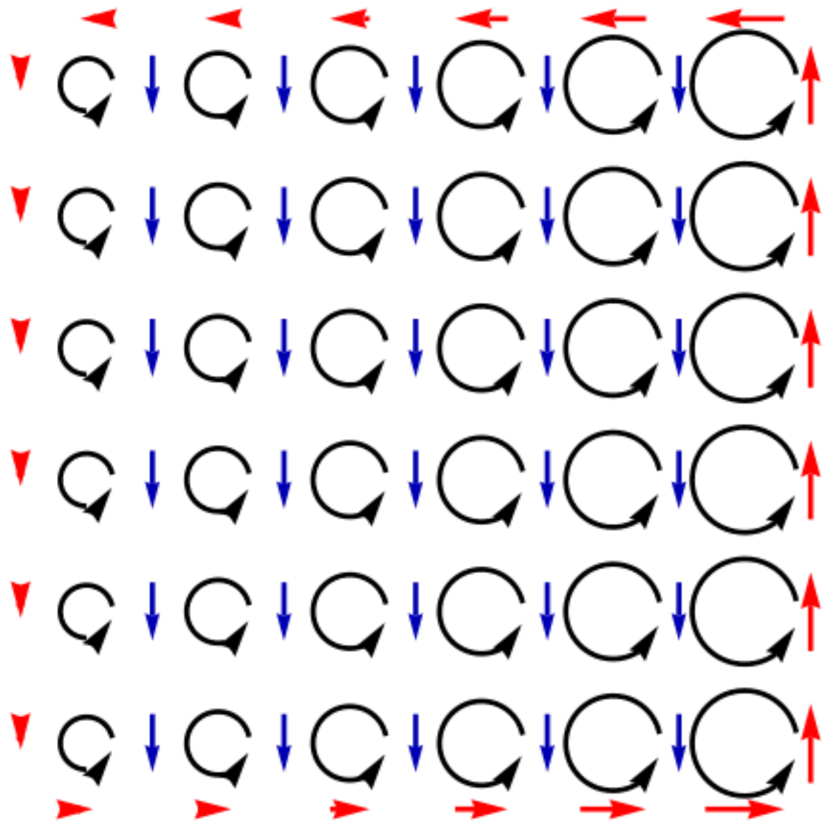
$$B_r = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3} \cos\theta \quad B_\theta = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sin\theta \quad y \quad B_\phi = 0$$

- Ver deducción en documento en la página de la materia.



Magnetismo en la materia

- En particular Ampère formuló la hipótesis más simple sobre el magnetismo en la materia y era que un material puede aproximarse como un conjunto de pequeñas espiras distribuidas dentro del material



Materiales magnéticos

- Los materiales reaccionan de manera diferente a un campo magnético externo.
- Supongamos un campo magnético que llamaremos de vacío generado por un solenoide finito.
- Coloquemos una muestra conectada a un dinamómetro e introduzcamosla en el solenoide.

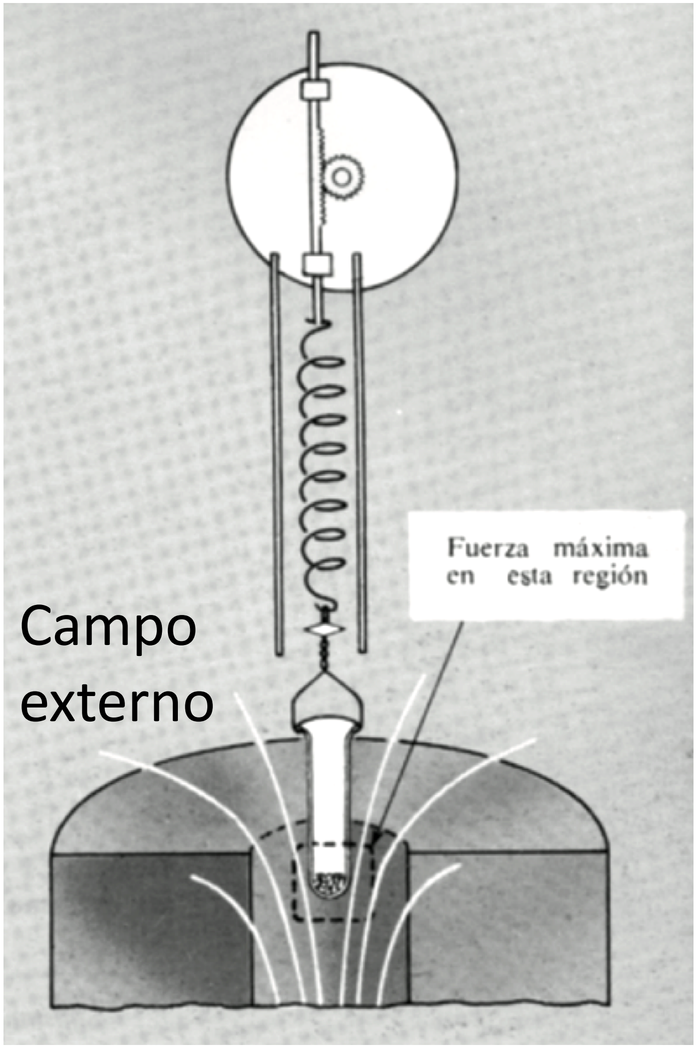
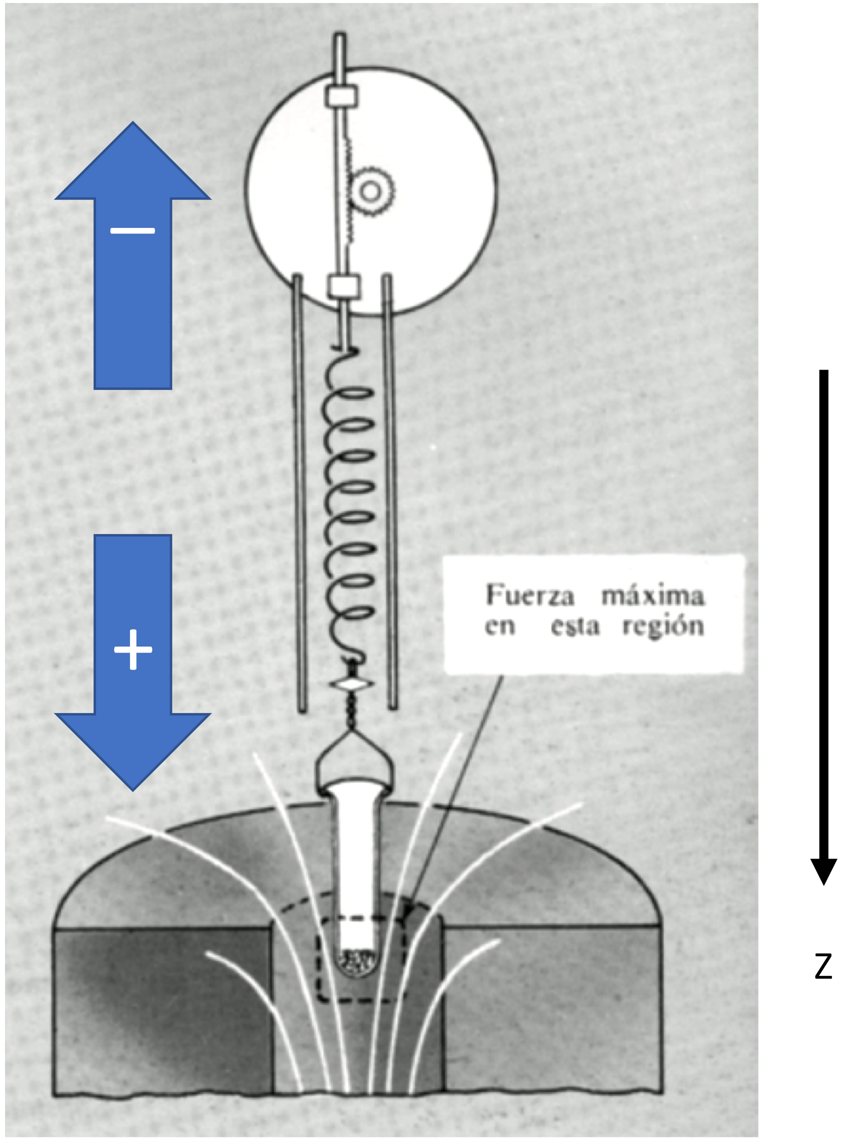


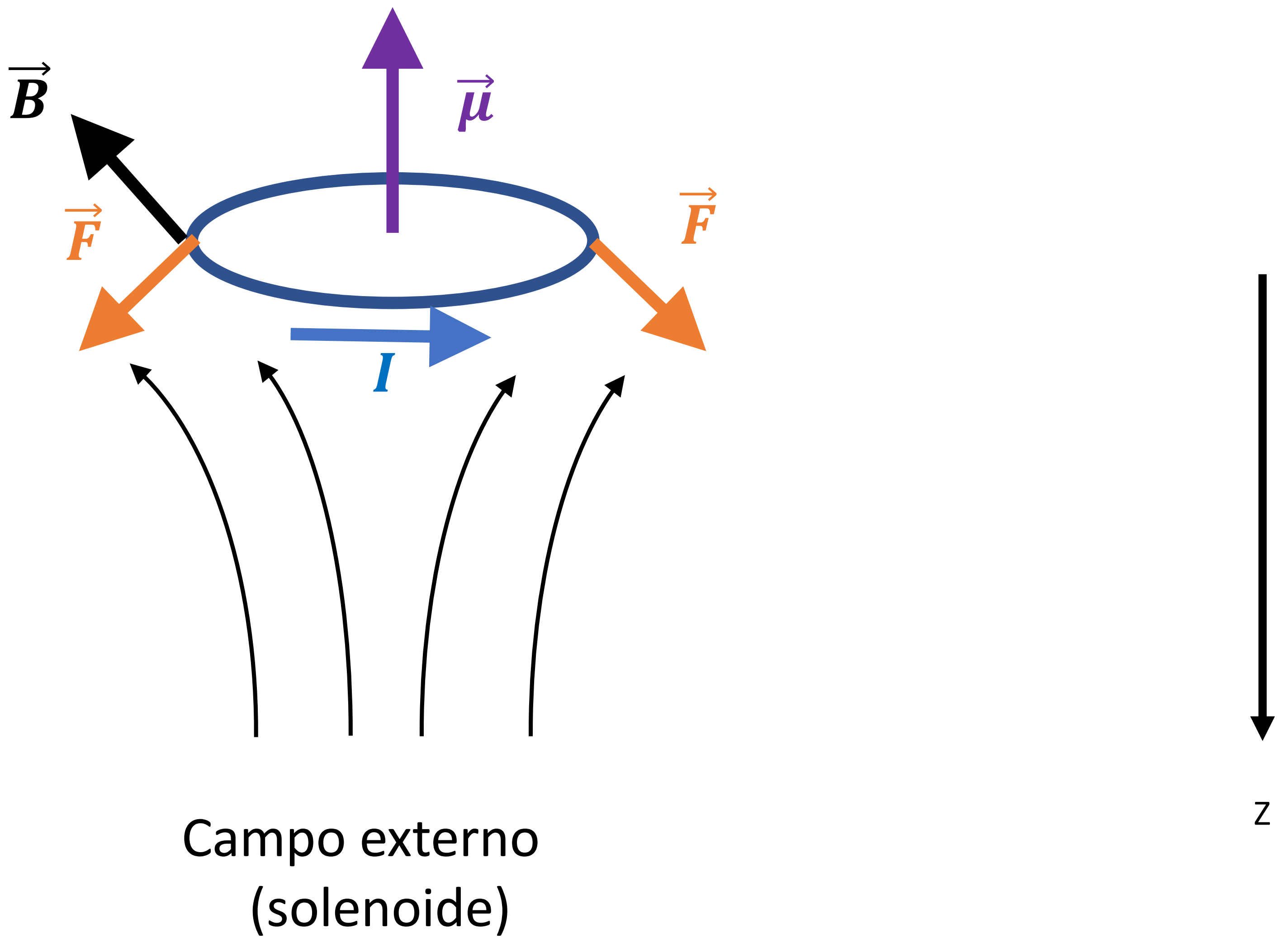
Tabla 11.1 Fuerza sobre un gramo de muestra cerca del extremo superior de una bobina con $B_z = 1{,}8$ tesla $dB_z/dz = 17$ T/m

Substancia	*Fórmula*	*Fuerza*, Newton · 10^{-5}*
Diamagnéticas		
Agua	H_2O	— 22
Cobre	Cu	— 2,6
Plomo	Pb	— 37
Cloruro sódico	NaCl	— 15
Cuarzo	SiO_2	— 16
Azufre	S	— 16
Diamante	C	— 16
Grafito	C	— 110
Nitrógeno líquido	N_2	— 10 (78 K)
Paramagnéticas		
Sodio	Na	+ 20
Aluminio	Al	+ 17
Cloruro de cobre	$CuCl_2$	+ 280
Sulfato de níquel	$NiSO_4$	+ 830
Oxígeno líquido	O_2	+ 7500 (90 K)
Ferromagnéticas		
Hierro	Fe	+ 400 000
Magnetita	Fe_3O_4	+ 120 000

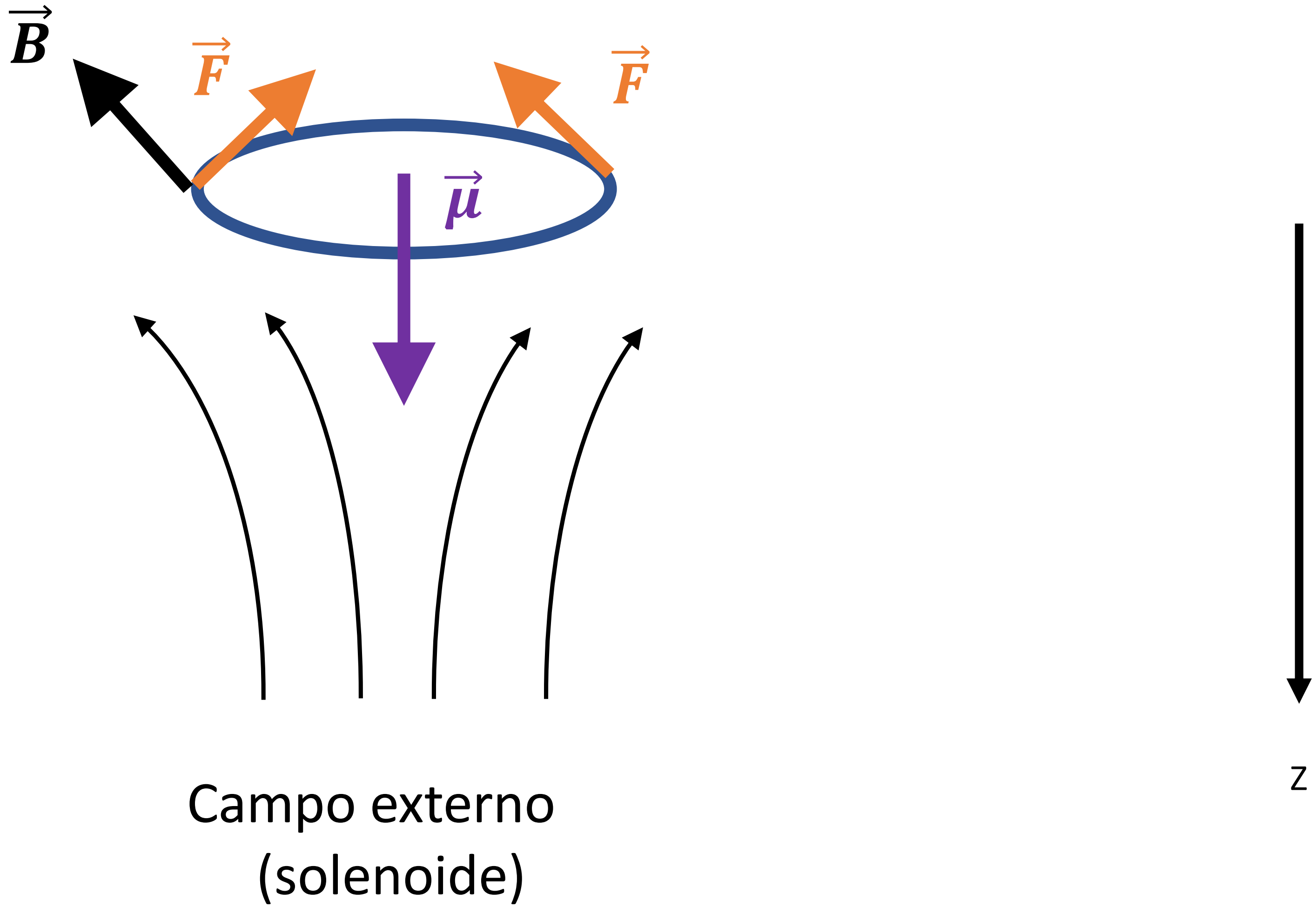
* Sentido de la fuerza: hacia abajo +, hacia arriba —, Todas las medidas se han efectuado a 20 °C excepto cuando se indica.



Fuerza sobre un dipolo en campo no uniforme

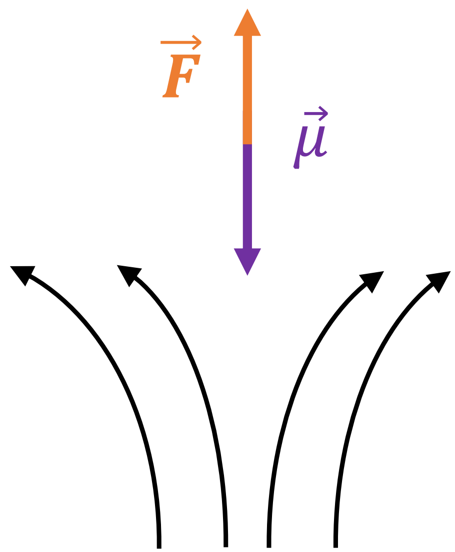


Fuerza sobre un dipolo en campo no uniforme



Diamagnetismo

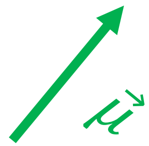
- En los elementos diamagnéticos, el campo exterior induce a nivel atómico y molecular momentos dipolares magnéticos microscópicos en la dirección opuesta.
- Se trata de un efecto descripto por la mecánica cuántica.
- En consecuencia el campo en el interior del material es menor que el campo externo.
- La fuerza resultante sobre el dipolo inducido tiende a alejarlo del solenoide



Campo externo
(solenoide)

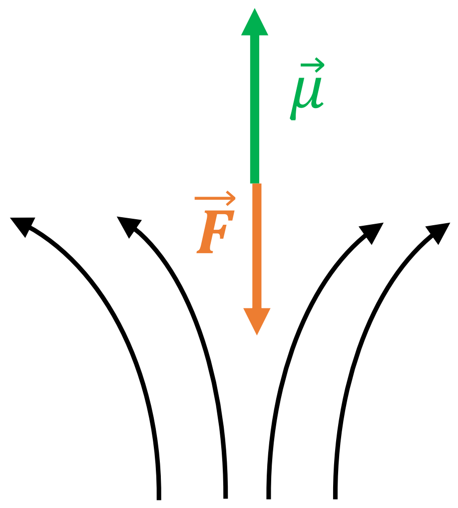
Paramagnetismo

- Estructura formada por átomos que poseen dipolos magnéticos permanentes normalmente distribuidos al azar.



Paramagnetismo

- Estructura formada por átomos tienen que poseen dipolos magnéticos permanentes normalmente distribuidos al azar.
- Dipolos atómicos se alinean con el campo externo.
- Es atraido hacia donde el campo externo aumenta



Campo externo
(solenoide)

Paramagnetismo

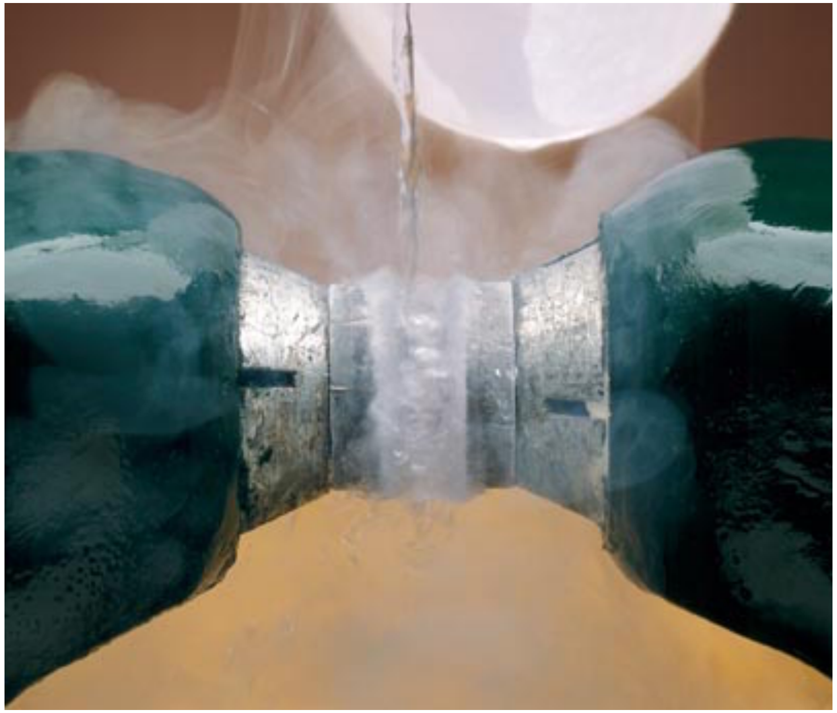
- Estructura formada por átomos tienen que poseen dipolos magneticos permanentes normalmente distribuidos al azar.
- Dipolos atómicos se alinean con el campo externo.
- Es atraido hacia donde el campo externo aumenta
- Al dejar de exponer el material al campo externo, los dipolos se vuelven a desordenar.

$\vec{\mu}$

Paramagnetismo

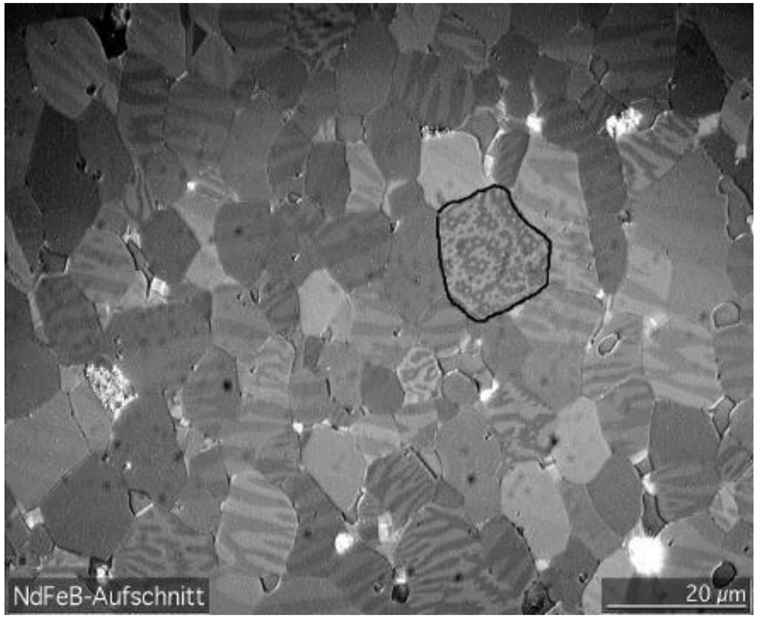
- En general son fuerzas débiles, pero en el caso de algunos líquidos, la fuerza es capaz de compararse al peso

- La figura muestra oxígeno líquido siendo vertido entre los polos de un imán



Ferromagnetismo

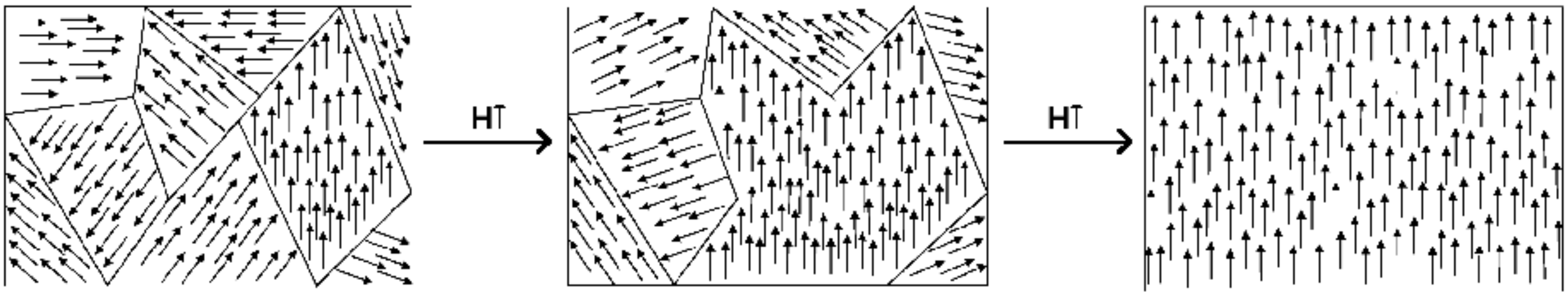
- Atomos tienen dipolos magnéticos permanentes.
- Por razones cuánticas, estos materiales poseen zonas llamadas dominios magnéticos.
- Los dominios tienen un tamaño de algunos µm = 10^{-6} m.
- En estos dominios, los dipolos magnéticos de los átomos/moléculas están 100% alineados.



Vista de dominos magnéticos (rayas oscuras y claras) en una aleación usada para hacer imanes

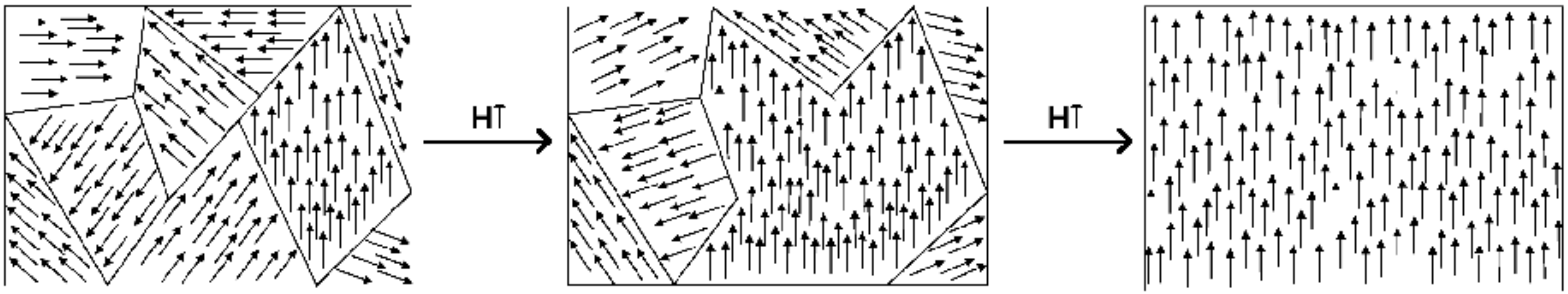
Ferromagnetismo

- Al ser expuestos a un campo externo los dominios se alinean más o menos con él dependiendo de la intensidad de aquel, y la temperatura.
- Son materiales atraidos al campo externo con una fuerza mayor a los paramagnéticos.
- Dentro del material el campo puede ser varios órdenes de magnitud más grande que el campo externo.

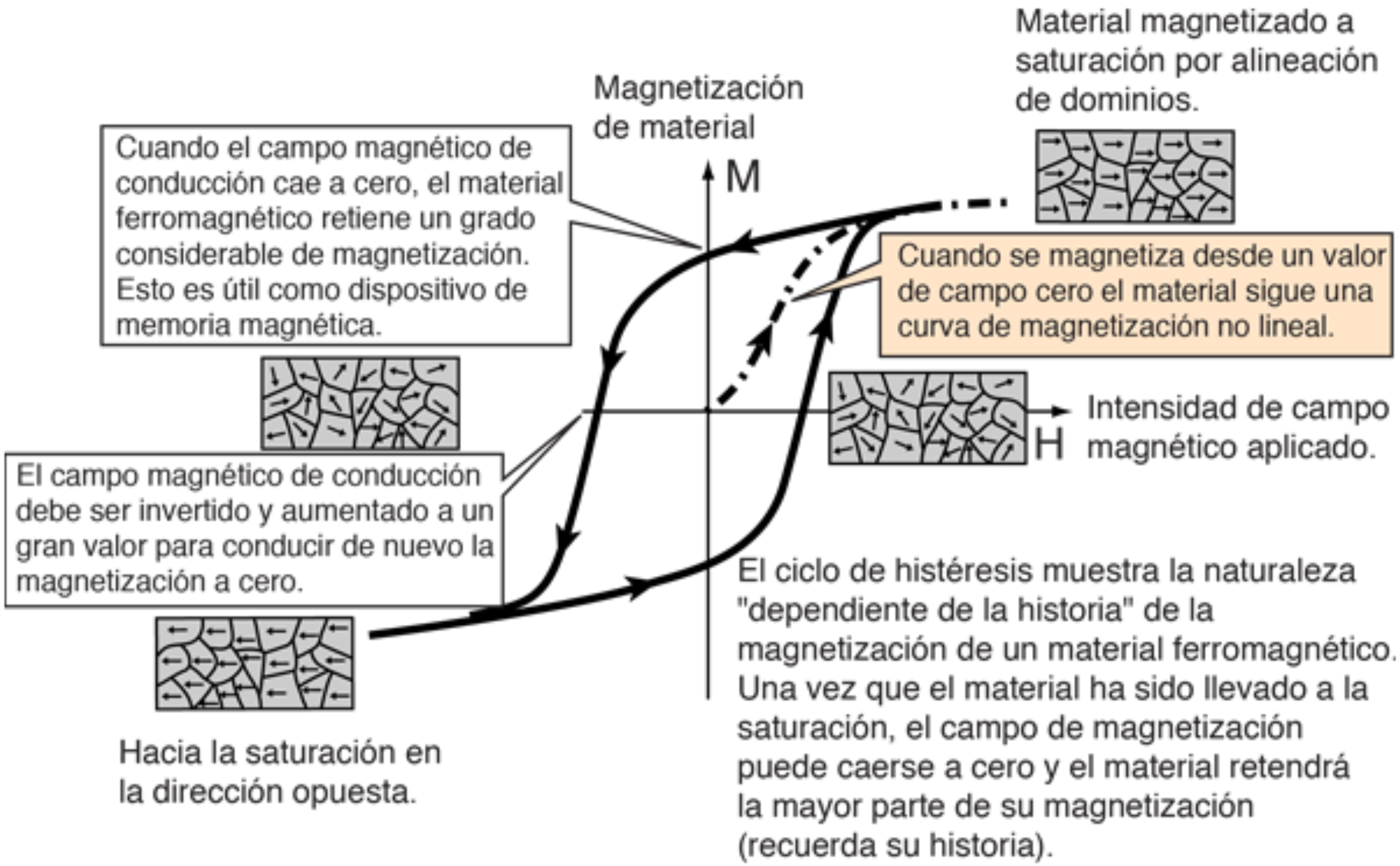


Ferromagnetismo

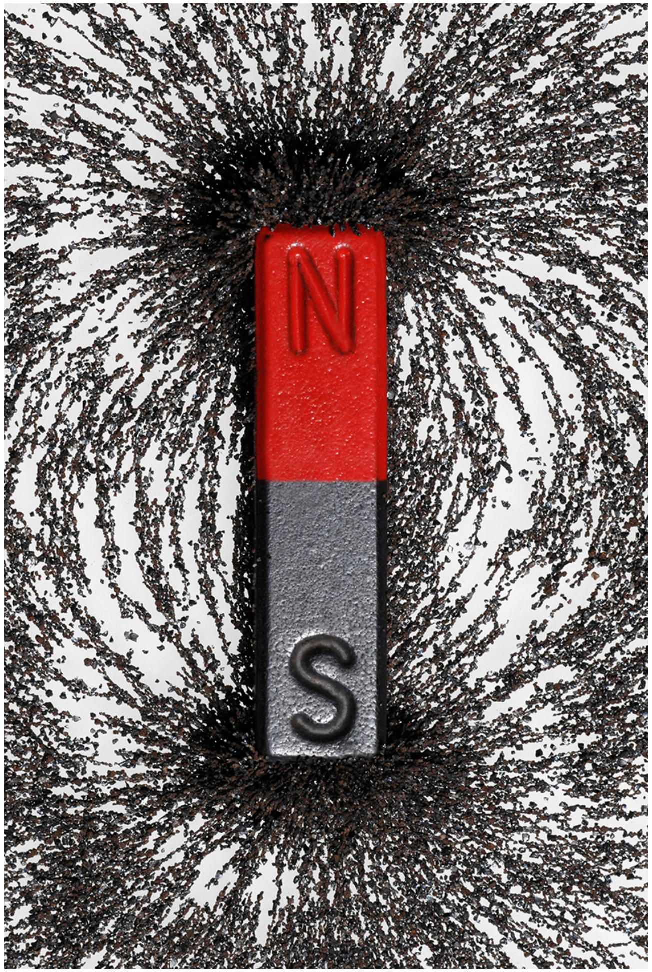
- Al quitar el campo externo algunos dominios pueden desorganizarse, otros no, quedando el material magnetizado permanentemente.
- Para desmagnetizar hay que calentarlo mucho o alterarlo mecánicamente.



Ferromagnetismo: ciclo de Histéresis



Imanes permanentes



Ley de Ampère para materiales magnéticos

- Muchas veces el campo generado por el material $\vec{B}_{mat}$ es proporcional al campo externo $\vec{B}_{ext}$

$$\vec{B}_{mat} = \chi_m \vec{B}_{ext}$$

χ_m es la susceptibilidad magnética del material

- Entonces el campo total en el material es la suma del campo generado por el material y el campo externo.

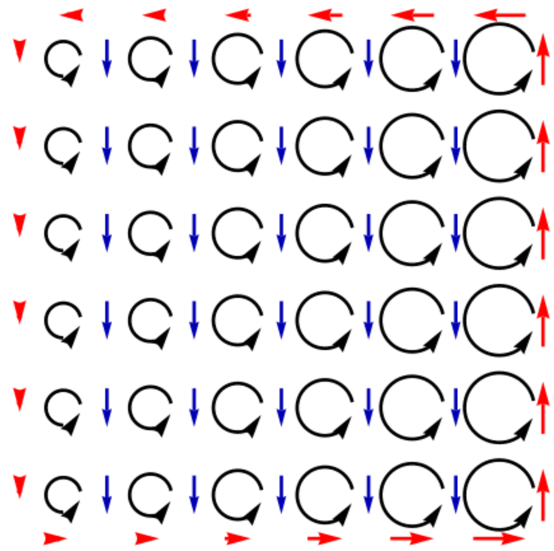
$$\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{mat} = \vec{B}_{ext} + \chi_m \vec{B}_{ext} = (1 + \chi_m)\vec{B}_{ext}$$

Ley de Ampère para materiales magnéticos

- El segundo término del segundo miembro es el campo debido al material. De la misma manera que para dieléctricos se define un vector polarización magnética $\vec{M}$ tal que

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0}\vec{B}_{ext} = \frac{\chi_m}{\mu_0(1+\chi_m)}\vec{B}$$

- El vector $\vec{M}$ una densidad volumétrica de momento magnético. Es el producto del número de dipolos orientados por unidad de volumen por el momento magnético $\vec{\mu}$ de cada átomo o molécula (debidos a movimiento orbital y spin).

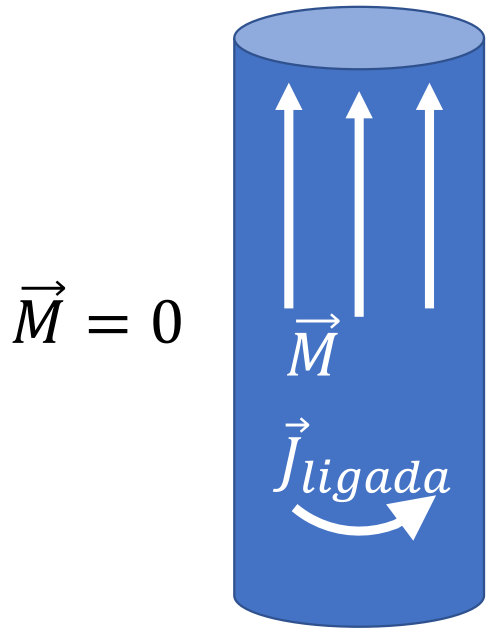


Ley de Ampère para materiales magnéticos

- A partir de un análisis similar al que realizamos con dieléctricos es posible llegar a la relación entre $\vec{M}$ y la densidad de corriente asociada a los momentos magnéticos del material polarizado, es decir, $\vec{J}_{ligada}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{M} = \vec{J}_{ligada}$$

- En el caso de un material con $\vec{M}$ uniforme, $\vec{J}_{ligada}$ corre sobre la superficie del material.



Ley de Ampère para materiales magnéticos

- Usando la definición de $\vec{M}$ tenemos:

$$\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \chi_m \vec{B}_{ext} = \vec{B}_{ext} + \mu_0 \vec{M}$$

- Es decir, el campo total en el material es la suma del campo externo más una contribución de los dipolos magnéticos inducidos por el mismo campo externo.
- Ahora definimos el campo $\vec{H}$ tal que considera el campo total menos la contribución del material:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\chi_m \vec{B}}{\mu_0(1+\chi_m)} = \frac{\vec{B}}{(1+\chi_m)\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_m}$$

- Se define la permeabilidad magnética del material μ_m.

Ley de Ampère para materiales magnéticos

- Entonces,

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{B}_{ext} + \mu_0\vec{M}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{B}_{ext} + \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{M}$$

- Como $\vec{\nabla}\times\vec{B}_{ext} = \mu_0\,\vec{J}_{libre}$, entonces:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0(\vec{J}_{libre} + \vec{J}_{ligada})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\,\vec{J}_{ligada} = \mu_0\,\vec{J}_{libre}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{J}_{ligada} = \vec{J}_{libre}$$

Ley de Ampère para materiales magnéticos

- Entonces:

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{\nabla}\times\vec{M} = \vec{\nabla}\times\left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right] = \vec{J}_{libre}$$

- Y recordando la definición de $\vec{H}$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{libre}$$

$$\oint_C \vec{H}\cdot\overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{J}_{libre}\cdot\overrightarrow{da}$$

Ley de Ampère para medios magnéticos.