Repaso: La ecuación de onda

- La ecuación de onda para una cantidad $y(x,t)$:

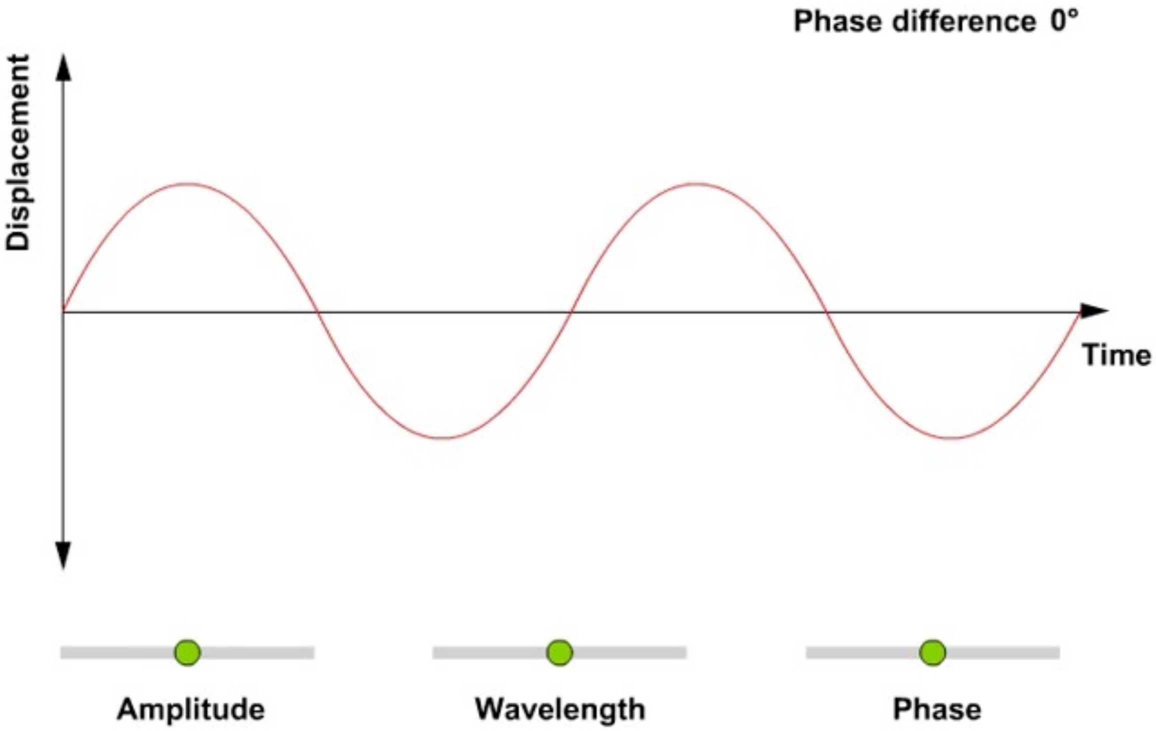
$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Tiene como solución cualquier función $y = f(x,t)$ del tipo

$$y(x,t) = f(x \pm vt)$$

- Como es **lineal**, una combinación lineal de soluciones también es una solución.

Amplitud, longitud de onda y fase en una onda sinusoidal $A\ \sin(\omega t)$



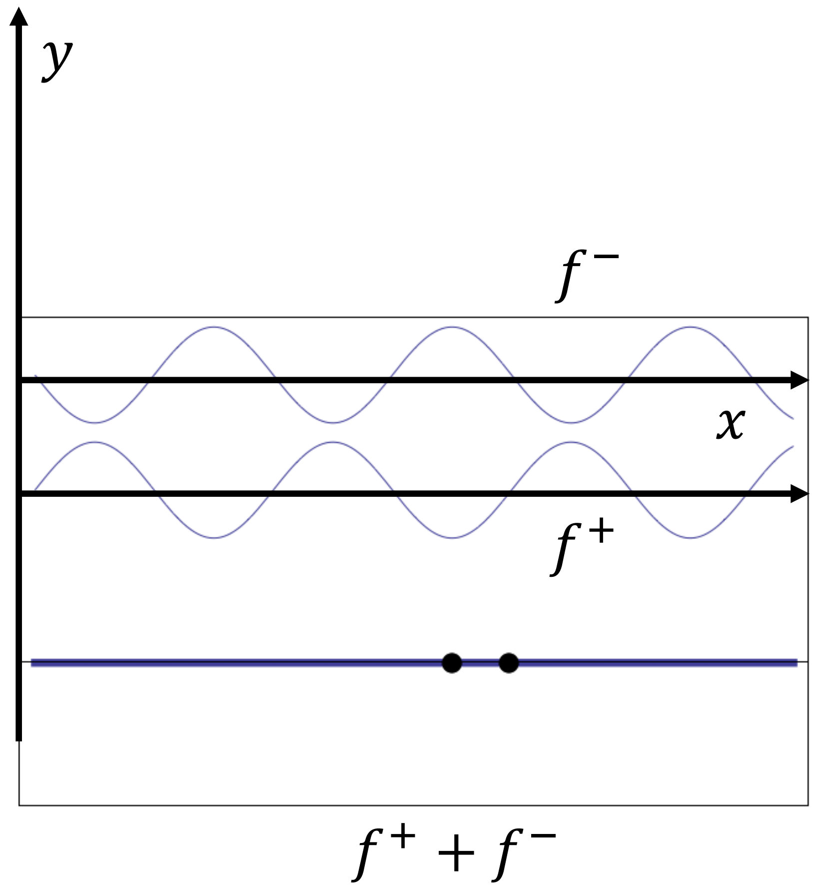
Ondas estacionarias

- Vimos que la ecuación de onda admitía soluciones viajeras en ambos sentidos de propagación.

- Supongamos entonces dos ondas

$$f^{\pm}(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t)$$

- La suma de ambas es también una solución



Ondas estacionarias

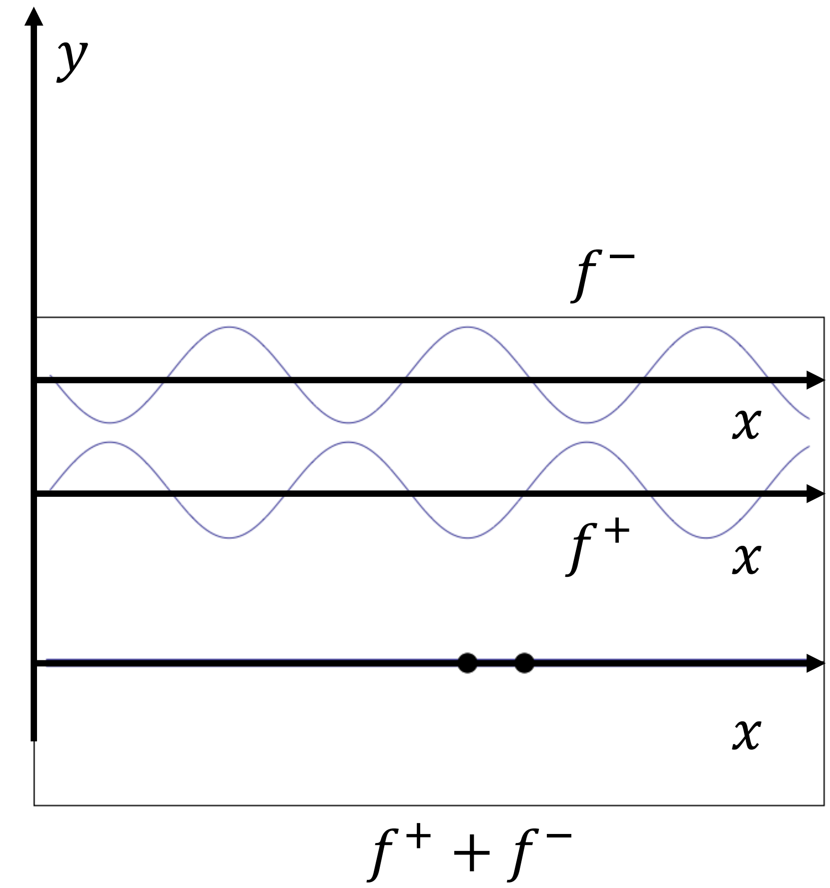
- Sumemos $f^+ + f^-$

$$A(\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)) =$$
$$A(\sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t$$
$$+ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t) =$$

- El resultado da una onda estacionaria

$$f^+ + f^- = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Parte espacial   Parte temporal



Ondas estacionarias

- Los nodos son los lugares donde la onda siempre es cero.
- Estos son los valores de x_n tales que:

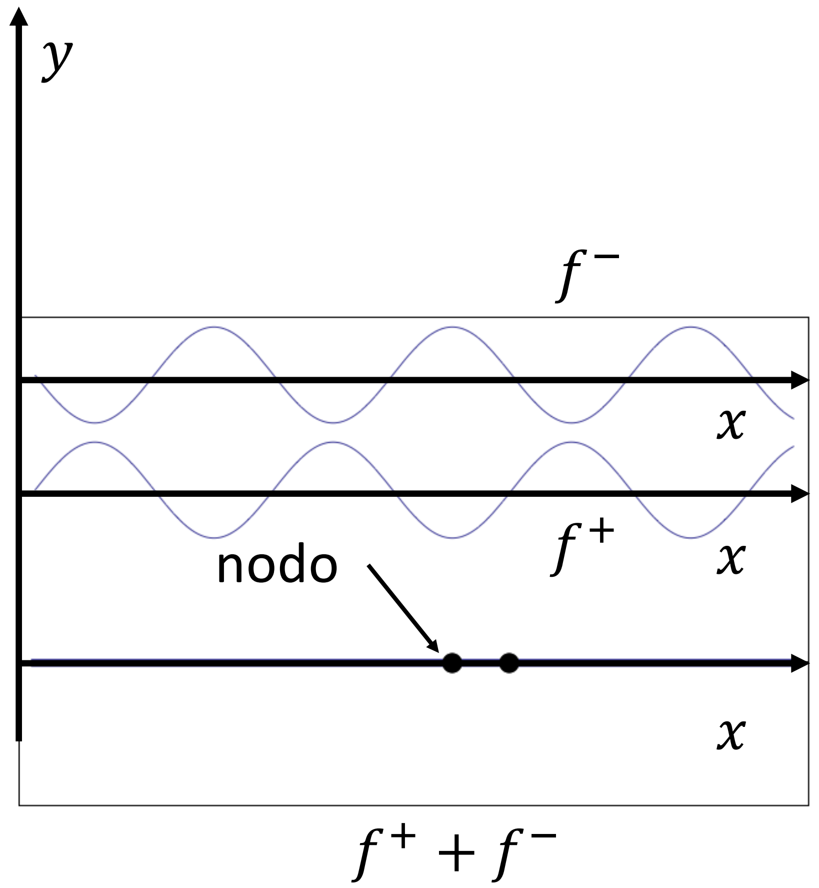
$$\sin kx_n = 0$$

- Esto equivale a que para un n natural o cero

$$kx_n = n\pi$$

- O bien

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}$$



Cuerda con condiciones de contorno

- Vimos que la presencia de una condición de contorno generaba reflexión de ondas.

- Si tenemos una onda sinusoidal en una cuerda de largo L con condiciones de contorno en los extremos seguramente tendremos soluciones estacionarias por la interacción de ondas propagándose en sentidos opuestos.

- No nos vamos a preguntar cómo se genera la onda, simplemente de qué modo va a oscilar con las condiciones de contorno establecidas.

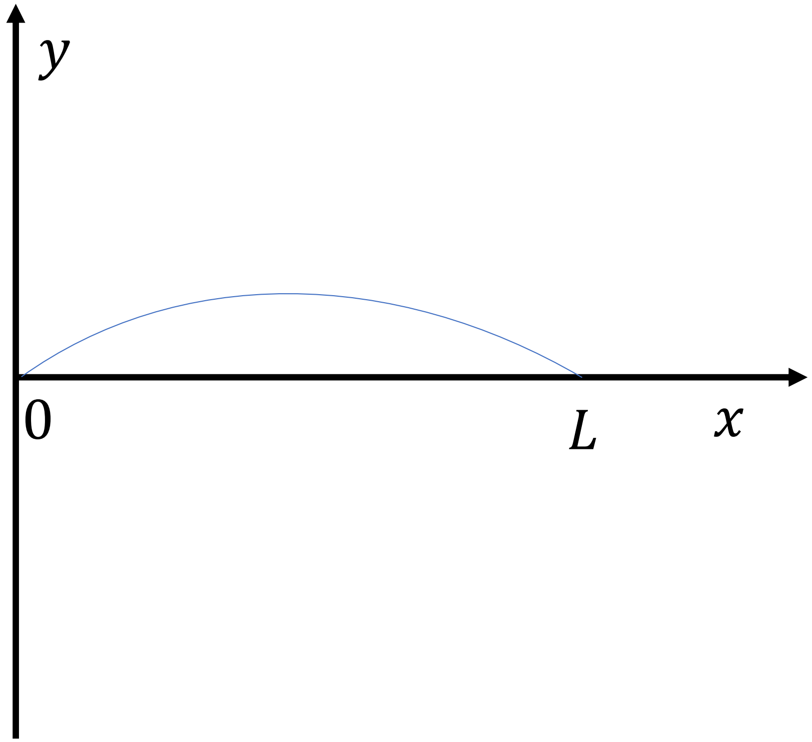
Modos normales con 2 extremos fijos

- Veamos una cuerda de largo L con **extremos fijos**

- Las **condiciones de contorno** son:

  Condición 1: $y(0,t) = 0$
  Condición 2: $y(L,t) = 0$

- Estas condiciones van a hacer que la solución estacionaria tenga **nodos en lugares bien específicos.**



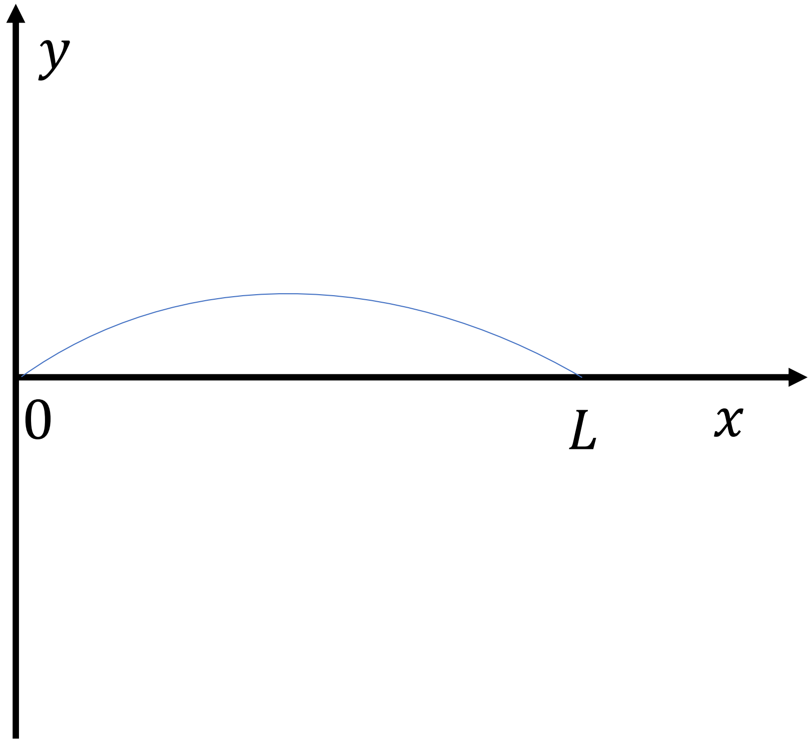
Modos normales con 2 extremos fijos

- Tomemos una solución de tipo estacionaria:

$$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

- La condición 1 se satisface automáticamente pues:

$$y_n(0,t) = A_n \sin k_n 0 \cos \omega_n t = 0$$



Modos normales con 2 extremos fijos

- La condición 2 pide que:

$$\sin k_n L = 0$$

- Esto implica que, para n natural

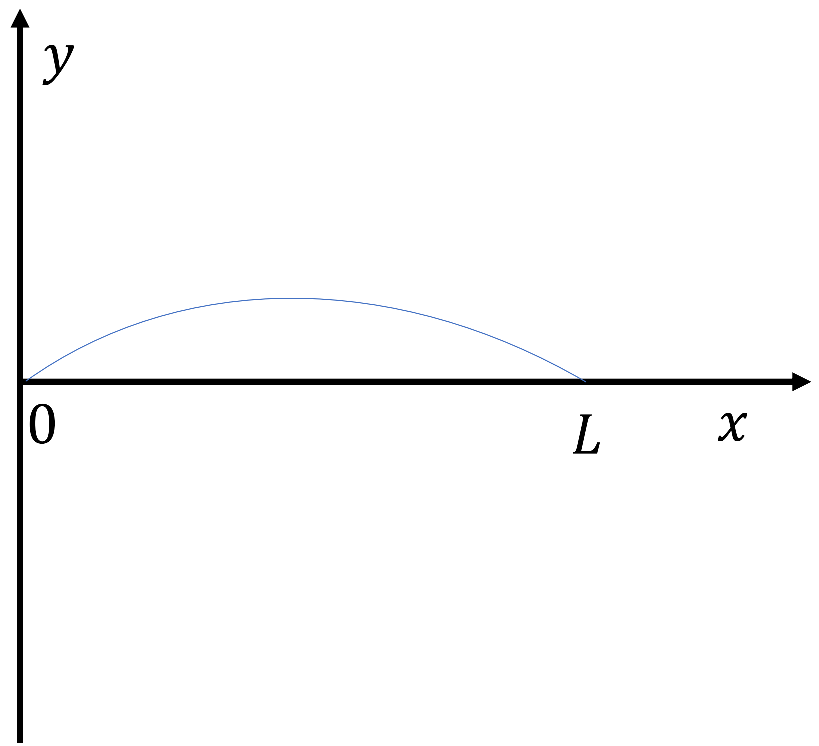
$$k_n L = n\pi$$

luego

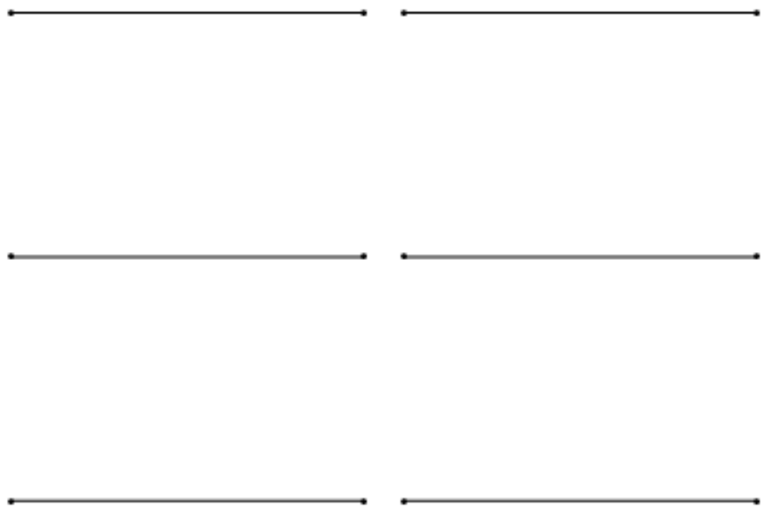
$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

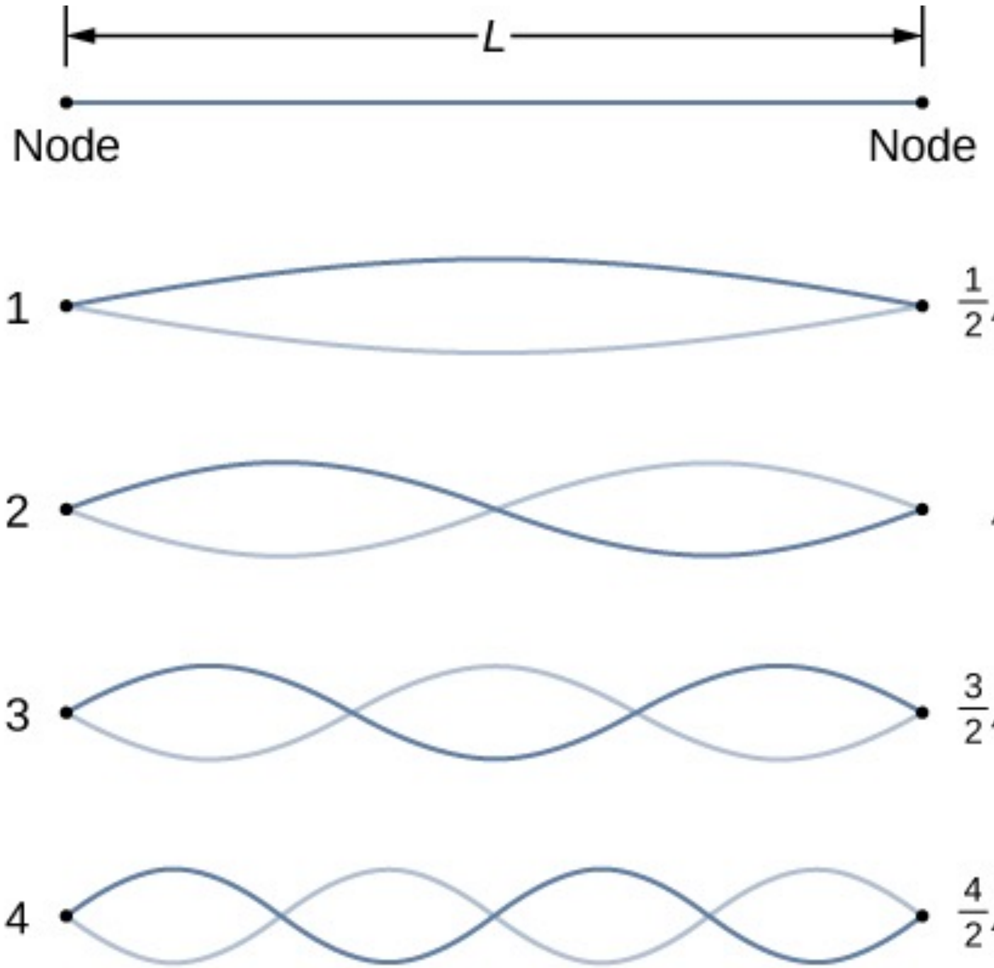
o

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



Primeros modos normales





Modo fundamental o primer armónico	$n = 1$	$\frac{1}{2}\lambda_1 = L$	$\lambda_1 = \frac{2}{1}L$
segundo armónico	$n = 2$	$\lambda_2 = L$	$\lambda_2 = \frac{2}{2}L$
tercer armónico	$n = 3$	$\frac{3}{2}\lambda_3 = L$	$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$
cuarto armónico	$n = 4$	$\frac{4}{2}\lambda_4 = L$	$\lambda_4 = \frac{2}{4}L$

Estos son los modos naturales de oscilación de una cuerda de largo L $\lambda_n = \frac{2}{n}L \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

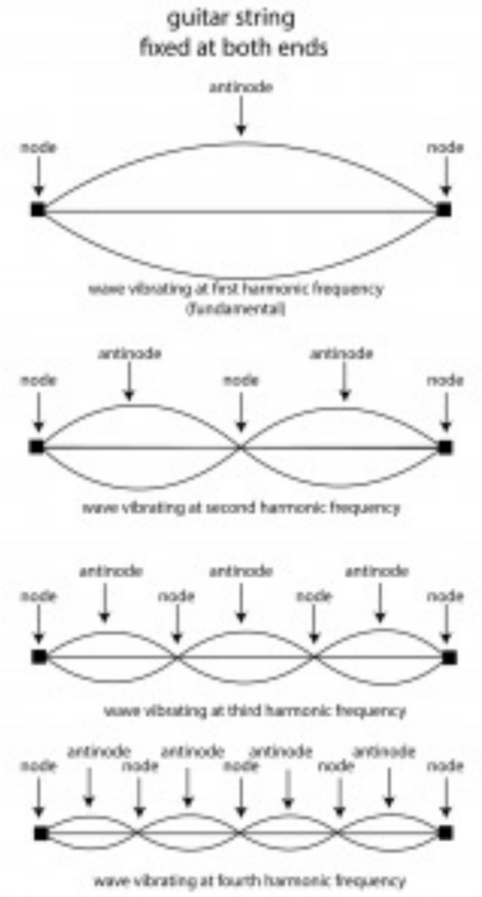
Modos normales con 2 extremos fijos

- Todas son soluciones, por lo tanto **la solución definitiva es la suma de las soluciones para cada valor de $\boldsymbol{n}$**:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

donde $k_n = \frac{n\pi}{L}$ y $\omega_n = v k_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{n\pi}{L}$

Instrumentos de cuerda



John Williams, guitarrista

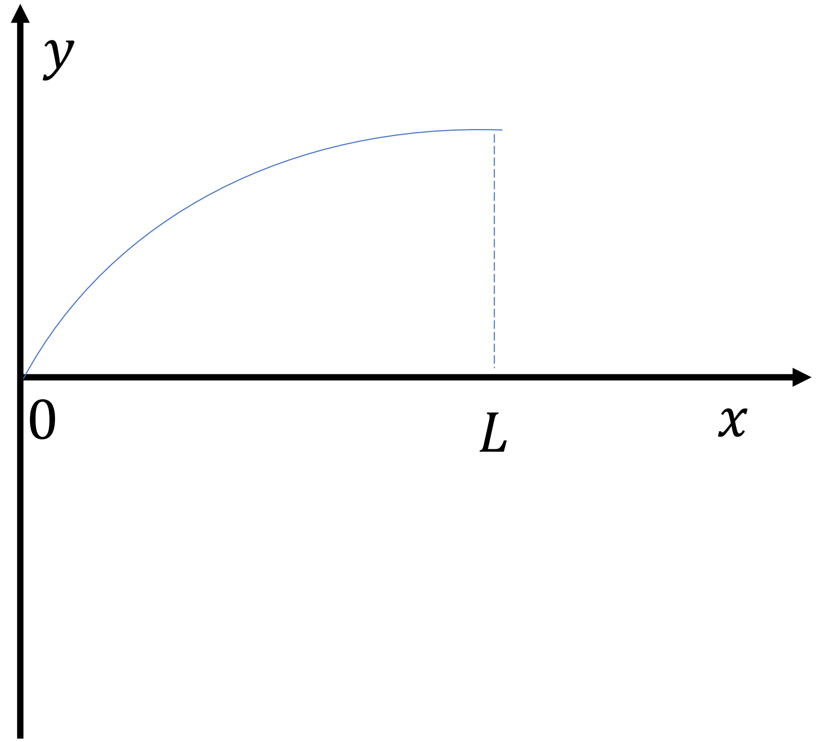
Modos normales condición fijo/libre

- Veamos una cuerda de largo L con condición **fijo / libre**

- Las condiciones de contorno son:

Condición 1: $y(0,t) = 0$

Condición 2: $\frac{dy}{dx}(L,t) = 0$



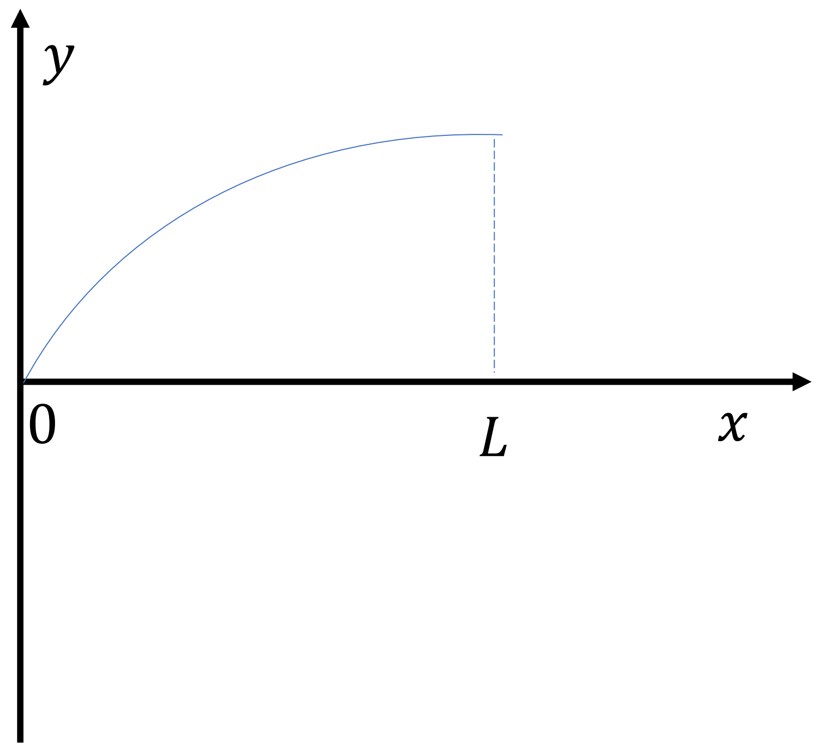
Modos normales condición fijo/libre

- Tomemos una nuevamente una solución de tipo estacionaria:

$$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

- La condición 1 se satisface automáticamente pues:

$$y_n(0,t) = A_n \sin k_n 0 \cos \omega_n t = 0$$



Modos normales condición fijo/libre

- La condición 2 pide que:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = k_n A_n \cos k_n L \cos \omega_n t = 0$$

- Es decir

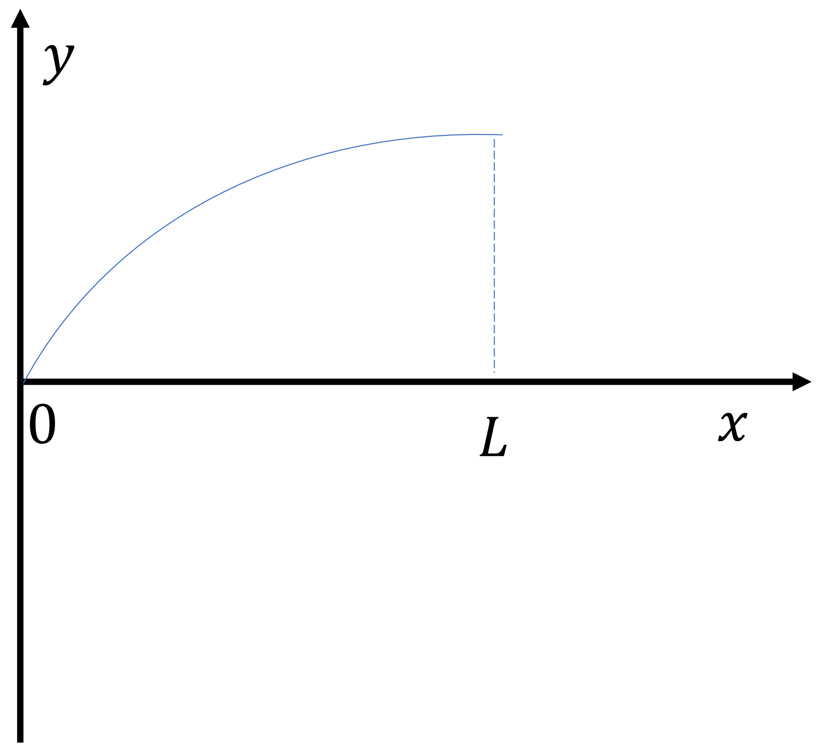
$$\cos k_n L = 0$$

- Esto implica que, para $n = 0, 1, 2, 3 \;\ldots$

$$k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi(2n+1)}{2}$$

luego

$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L}$$



Modos normales condición fijo/libre

- La condición 2 pide que:

$$\frac{dy}{dx}(L,t) = k_n A_n \cos k_n L \cos \omega_n t = 0$$

- Es decir

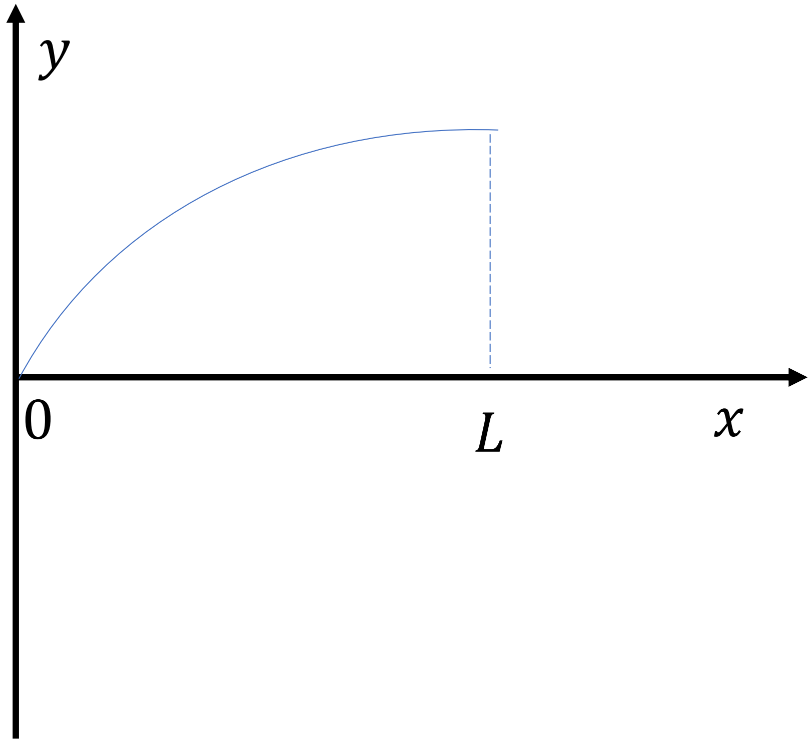
$$\cos k_n L = 0$$

- Esto implica que, para $n = 0, 1, 2, 3\ \ldots$

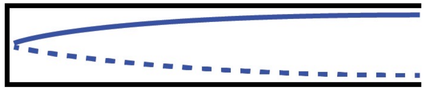
$$k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi(2n+1)}{2}$$

luego

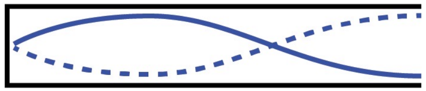
$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L}$$



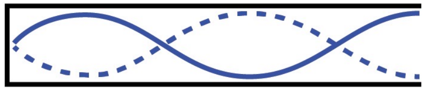
1/4 wave



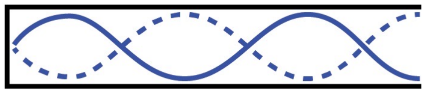
3/4 waves



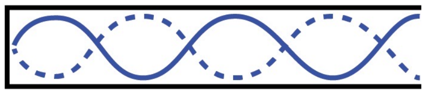
5/4 waves



7/4 waves



9/4 waves



n	$\lambda_n = \frac{4L}{(2n+1)}$
0	$\lambda_0 = 4L$
1	$\lambda_1 = \frac{4L}{3}$
2	$\lambda_2 = \frac{4L}{5}$
3	$\lambda_3 = \frac{4L}{7}$
4	$\lambda_4 = \frac{4L}{9}$

Modos normales con condición fijo/libre

- Todas son soluciones, por lo tanto **la solución definitiva es la suma de las soluciones para cada valor de $\boldsymbol{n}$**:

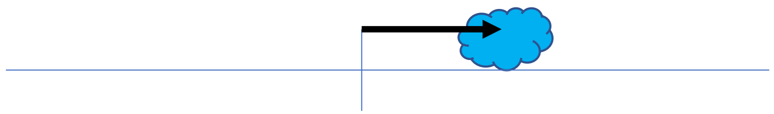
$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

donde $k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L}$ y $\omega_n = v k_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{\pi(2n+1)}{2L}$

Ondas sonoras

- Son ondas en las que las moléculas de aire se mueven alrededor de una posición de equilibrio. Para cada posición de equilibrio x la posición $\xi(x,t)$ de una parcela de aire va a oscilar en el tiempo:

$\xi(x,t)$



Equilibrio en x

- Son longitudinales porque la onda se propaga en la misma dirección que la coordenada $\xi(x,t)$

Ondas sonoras

- Entonces $\xi(x,t)$ cumple la ecuación de onda para apartamientos pequeños:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

donde c_s es la llamada velocidad del sonido.

- Suponiendo parcelas de gas adiabáticas (en el tiempo de oscilación la parcela no alcanza a intercambiar energía con su entorno) y el gas es ideal, c_s depende de la presión del gas P_0 y de su densidad ρ_0:

$$c_s^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$$

γ es la constante adiabática del gas

Ondas sonoras

- La variación de la presión $P - P_0 = \Delta P(x,t)$ también cumple con la ecuación de onda variación:

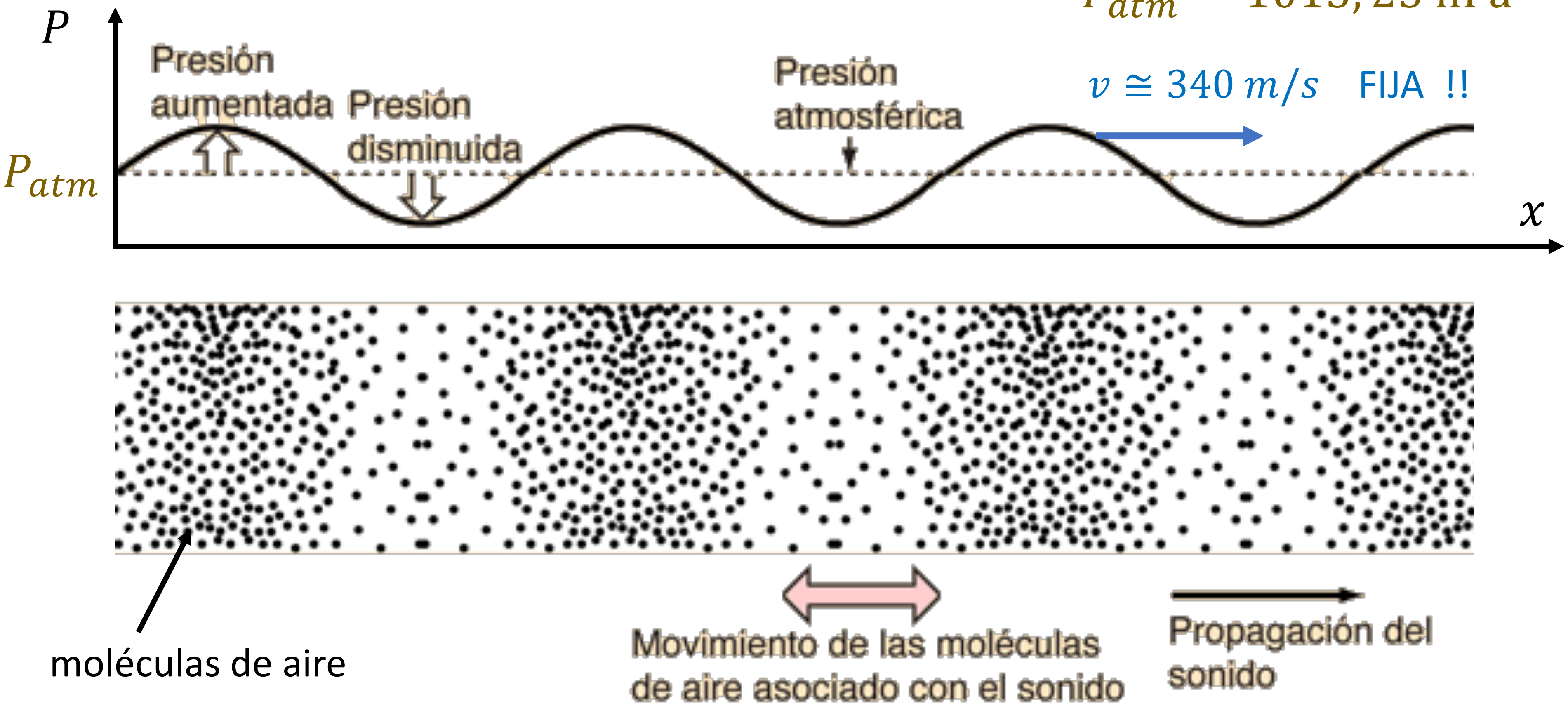
$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2}$$

- ΔP se relaciona con ξ a través de la derivada espacial:

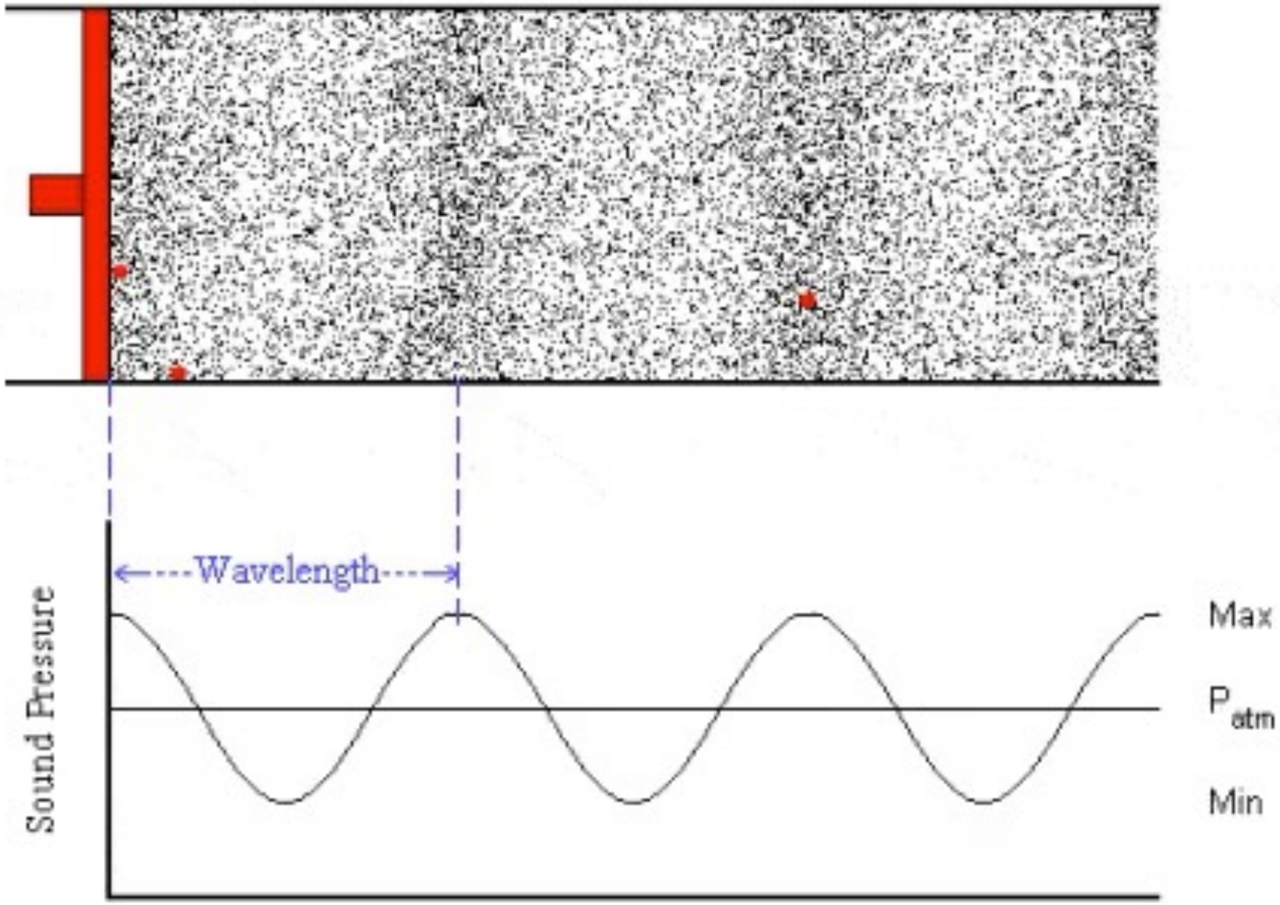
$$\Delta P = -\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Ondas sonoras en el aire (a presión ambiente)

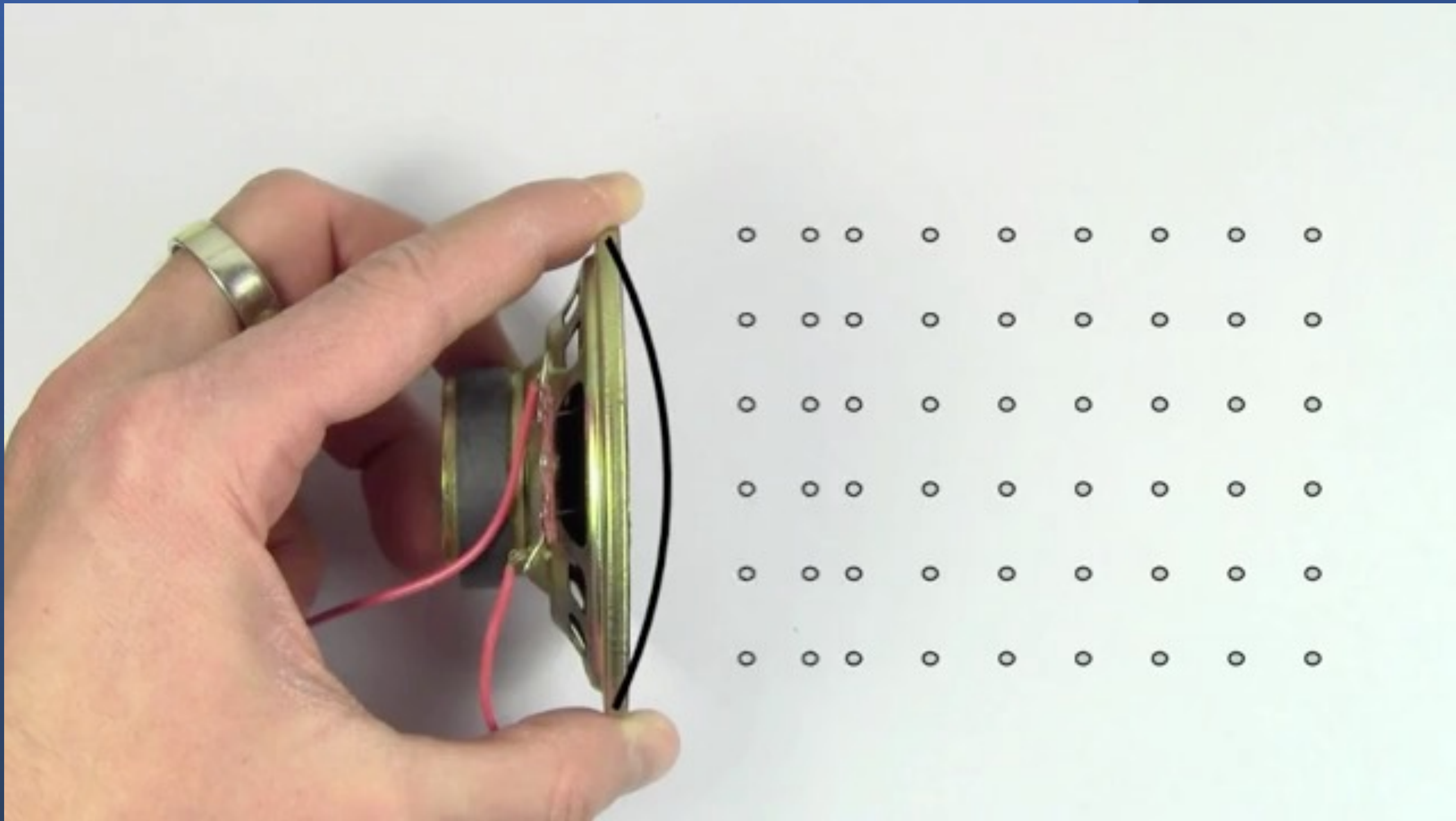
$P_{atm} = 1013,25 \text{ hPa}$



Acoustic Longitudinal Wave



isvr

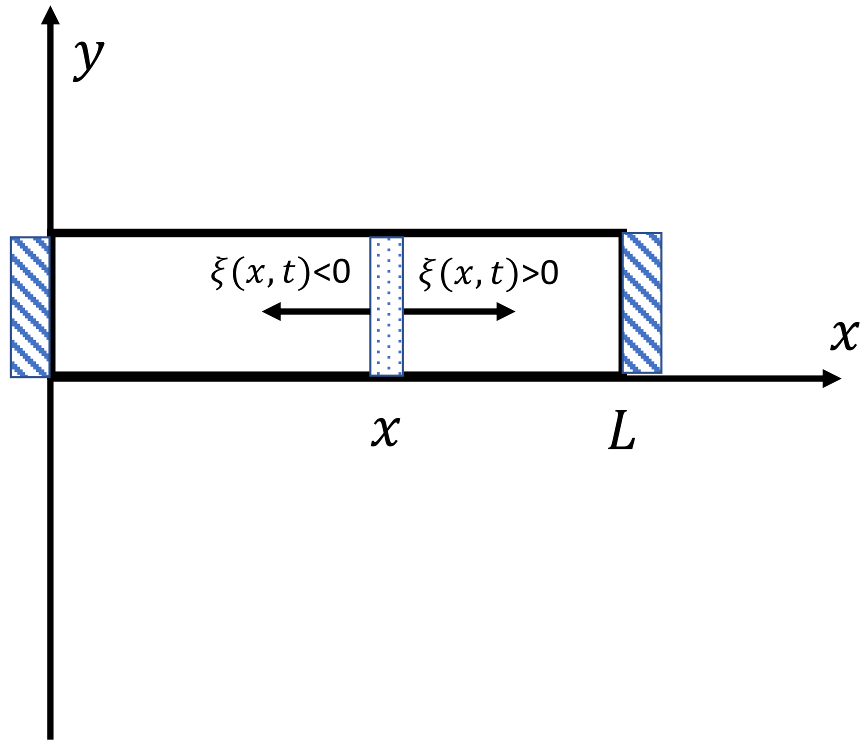


Ondas sonoras: condición cerrado/cerrado

- Tomamos un recipiente con aire cerrado en ambos extremos.

- Se generan ondas sonoras viajeras a lo largo de x.

- El choque con las paredes va a generar ondas en sentido contrario generando ondas estacionarias.



Pregunta

- ¿Cómo se expresarán las condiciones de contorno para $\xi(x,t)$ en el caso cerrado cerrado?