Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Consideremos ahora las ecuaciones de Maxwell para campos eléctricos y magnéticos **en el vacío**, **sin cargas ni corrientes**.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$ Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ ∄ monopolo

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Ampère + Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Faraday

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Tomemos el rotor de la Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

- Y derivemos respecto al tiempo la Ley de Ampère + Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Igualando estas dos expresiones tenemos

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

- Pero, del cálculo vectorial se sabe que:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{E}$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Con lo cual

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

- O lo que es lo mismo, en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- La onda electromagnética es entonces una onda **vectorial transversal**
- Una solución sinusoidal plana para $\vec{E}$ que oscila a lo largo del eje x que se propaga a lo largo del eje z es:

$$\vec{E}(z,t) = \overset{\text{Amplitud}}{E_0} \cos(\overbrace{\underset{\text{nro de onda}}{k}z - \underset{\text{frecuencia angular}}{\omega}t}^{\text{fase}})\overset{\text{polarización}}{\hat{x}}$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- De las componentes de la ecuación de onda general nos queda una ecuación igual a la que vimos de la cuerda:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

- Además, reemplazando E_x por $E_0 \cos(kz - \omega t)$ sacamos la relación de dispersión:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda \nu$$

- Donde c es la velocidad de la luz en el vacío:

$$c \cong 300000\ km/s$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Obtengamos $\vec{B}$ mediante la ley de Faraday. En cartesianas:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

- De esto solo sobrevive el segundo término de la componente y:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} = -E_0 k \sin(kz - \omega t)\hat{y} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Entonces :

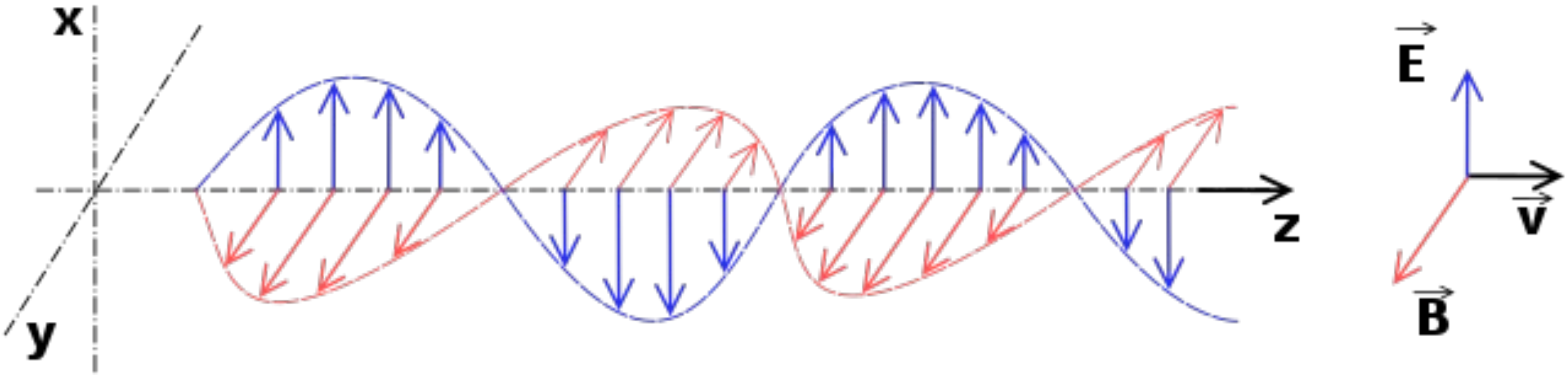
$$\vec{B}(z,t) = E_0 k \hat{y} \int \sin(kz - \omega t) dt = \frac{E_0 k}{\omega} \cos(kz - \omega t)\ \hat{y}$$

- Por lo tanto:

$$\vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \hat{y}$$

Perpendiculares y en fase

Ondas electromagnéticas



Propiedades de una onda EM viajera

$\vec{E} \perp$ dirección de propagación

$\vec{B} \perp$ dirección de propagación

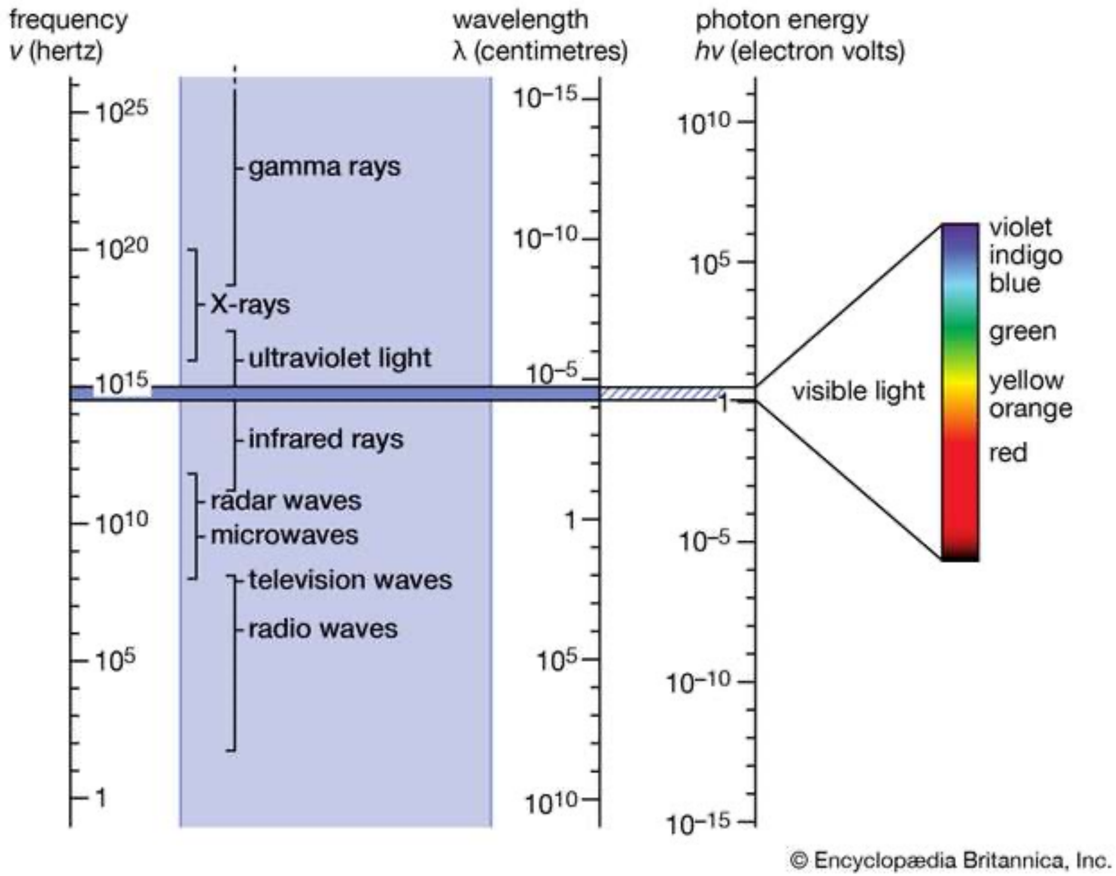
$\vec{E}$ y $\vec{B}$ en fase

$$\vec{E} \perp \vec{B}$$

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$$

$\vec{E} \times \vec{B}$ es paralelo a la dirección de propagación

El espectro electromagnético



Energía transportada por ondas EM

- Una onda electromagnética transporta al propagarse con velocidad c a la energía electromagnética de los campos que la forman.
- Vimos que la densidad de energía por unidad de volumen venía dada por :

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- Calculemos la cantidad de energía que pasa por unidad de tiempo a través de una unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación.

Energía transportada por ondas EM

- En $z = 0$ tenemos:

$$E(0,t)^2 = |E(0,t)|^2 = [E_0 \cos(-\omega t)]^2$$
$$B(0,t)^2 = |B(0,t)|^2 = \left[\frac{E_0}{c}\cos(-\omega t)\right]^2$$

- Entonces:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\left[E_0^2 + \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}\right][\cos(\omega t)]^2$$

- El promedio de $[\cos(\omega t)]^2$ en un período es $\frac{1}{2}$ entonces si $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{4}[E_0^2 + E_0^2] = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

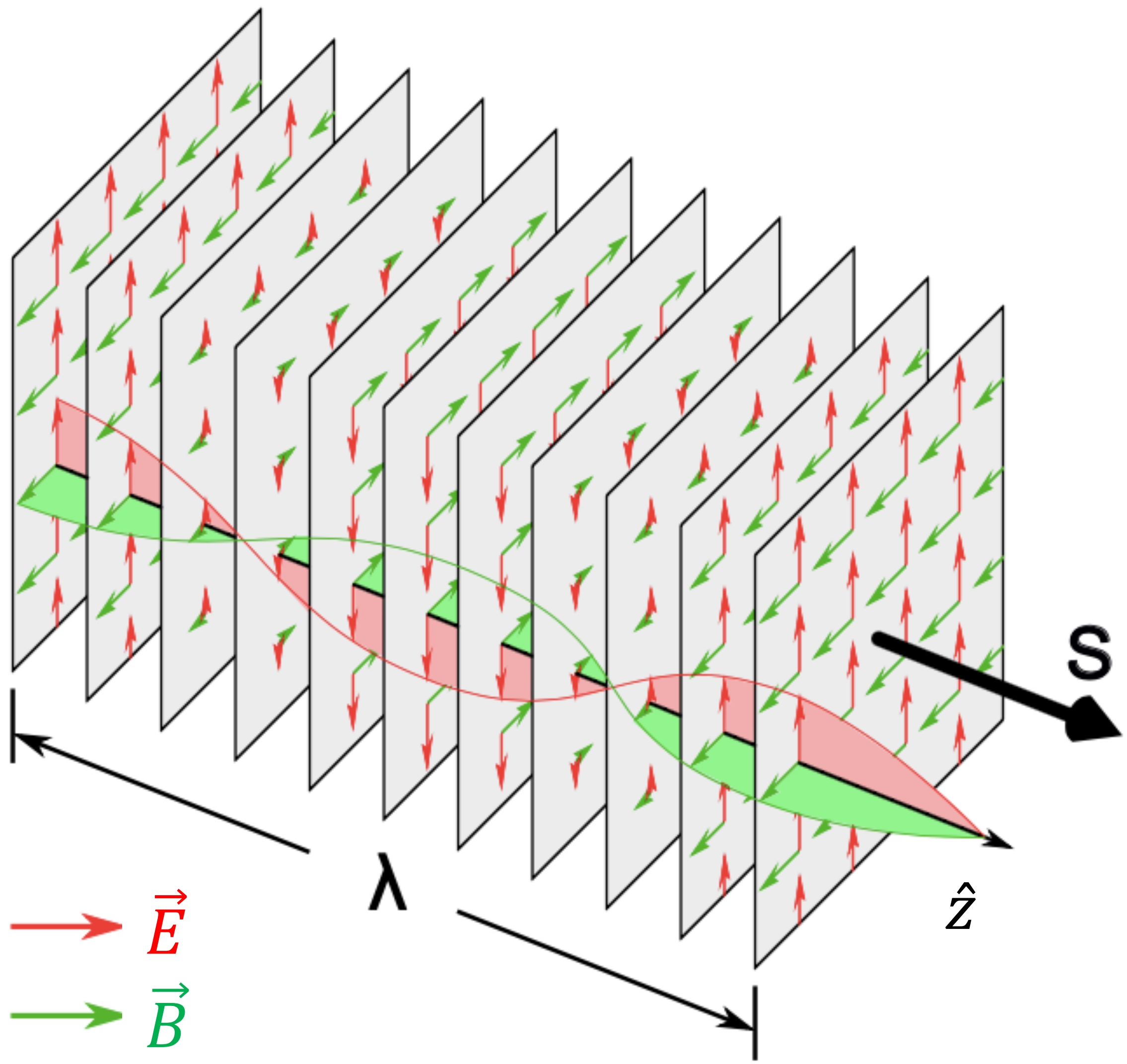
Energía transportada por ondas EM

- Entonces, la energía promedio que atraviesa una unidad de superficie por unidad de tiempo es:

$$S = \langle u \rangle c = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c$$

Ondas planas

- Cada plano corresponde a una superficie del mismo valor de fase
- En cada plano, los campos son iguales



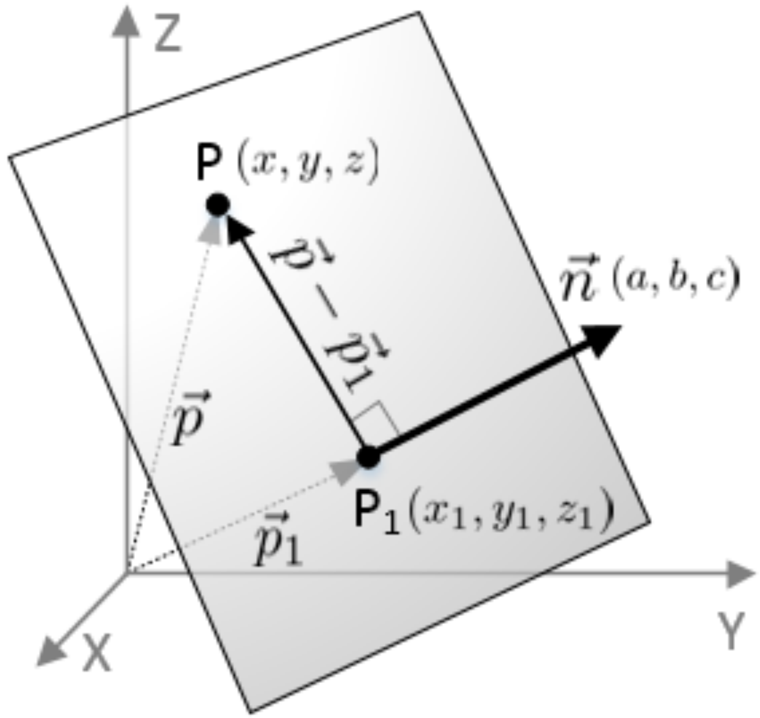
Ondas planas: ecuación normal del plano

- P_1 y P que pertenecen a un plano de normal $\hat{n}$.

- La siguiente es la ecuación normal del plano
$$\hat{n} \cdot (\vec{p} - \overrightarrow{p_1}) = 0$$

- Si dejamos fijo $\overrightarrow{p_1}$ el plano está compuesto por los puntos $\vec{p}$ tales que

$$\hat{n} \cdot \vec{p} = \hat{n} \cdot \overrightarrow{p_1} = constante$$

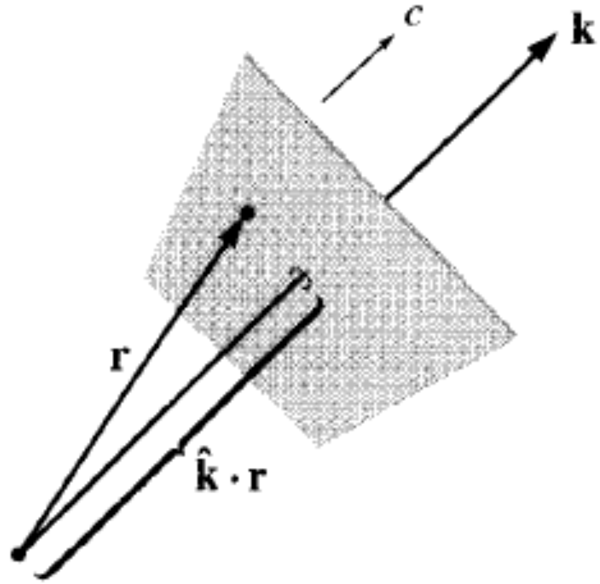


Ondas planas

- Las ondas planas son una solución de la ecuación de ondas EM:
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

- Para cada instante t, el plano corresponde a
$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = constante$$
$$\vec{k}\cdot\vec{r} = constante + \omega t$$

- Esto define el frente de onda, que con t se desplaza en la dirección de $\vec{k}$ con velocidad c



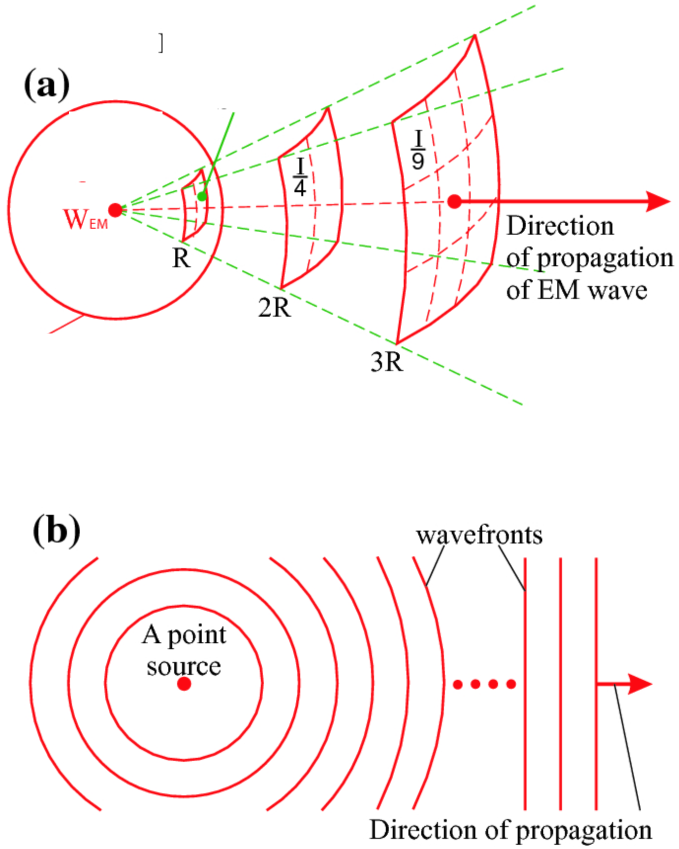
Ondas esféricas

- Para fuentes puntuales, otra solución de la ecuación de onda en esféricas es la siguiente

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(r)\cos\left(\vec{k}(\vec{r})\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

- Donde $\quad \vec{k}(\vec{r}) = k\hat{r}$ y $\vec{E}_0(r) \propto \frac{1}{r}$

- Lejos de la fuente, la onda esférica en una pequeña porción puede ser considerada plana en primera aproximación



Refracción y reflexión de la luz

La luz en la materia

- Cuando la luz encuentra un material, esta puede interactuar con él de diferentes maneras dependiendo normalmente de su longitud de onda:
  - Reflexión
  - Absorción
  - Dispersión
- Materiales opticamente transparentes: materiales en los que los tres efectos son depreciables en el rango de longitudes de onda de interés.
- En el rango visible (λ entre 380 y 740 nm), materiales como el agua o el vidrio son transparentes.

La luz en la materia

- En medios ópticamente transparentes, la velocidad de propagación de la luz v es menor a su valor en el vacío c.
- Una cantidad importante de un material transparente es el índice de refracción n, definido como

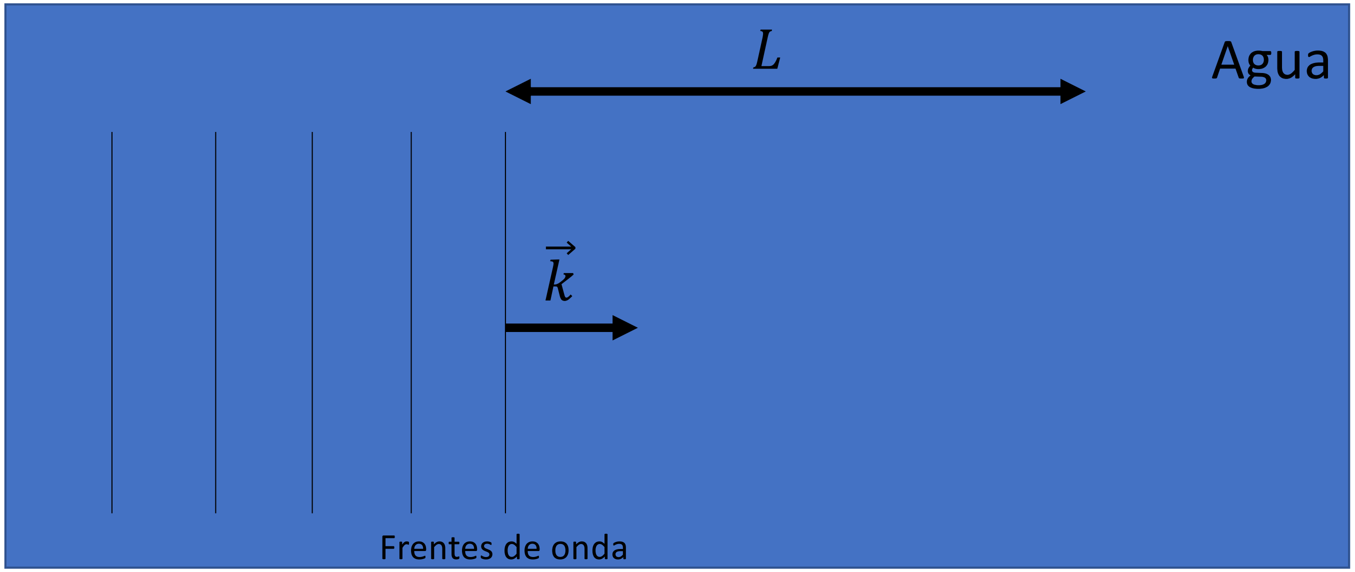
$$n = \frac{c}{v}$$

- n es adimensional y $n \geq 1$

Table 1. Index of Refraction of Various Materials.	
Material	**Index of Refraction**
Vacuum	1.0000
Air	**1.0003**
Water (pure)	1.3330
Seawater (35 ppt)	1.3394
Ethyl alcohol	1.361
Sugar solution (80% sugar)	1.49
Glass (soda lime)	1.510
Bromine (liquid)	1.661
Ruby	1.760
Diamond	2.417

Camino óptico

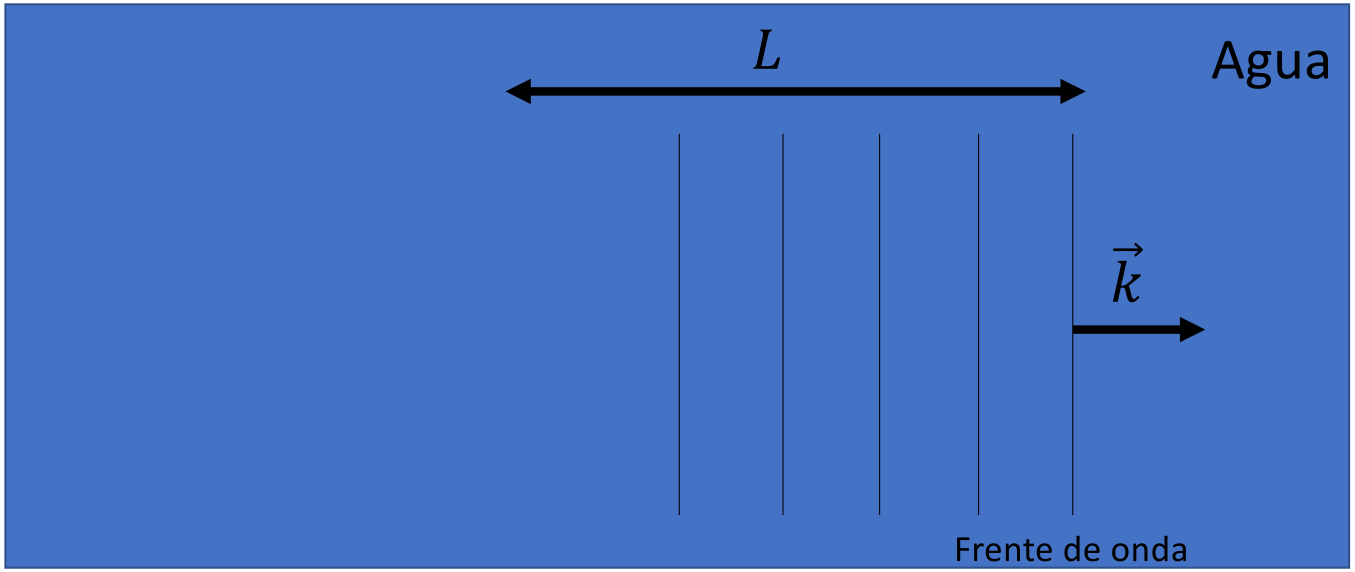
- Dada una onda EM que recorre una distancia L



Camino óptico

- Dada una onda EM que recorre una distancia L, el camino óptico se define como:

$$C.O. = nL$$

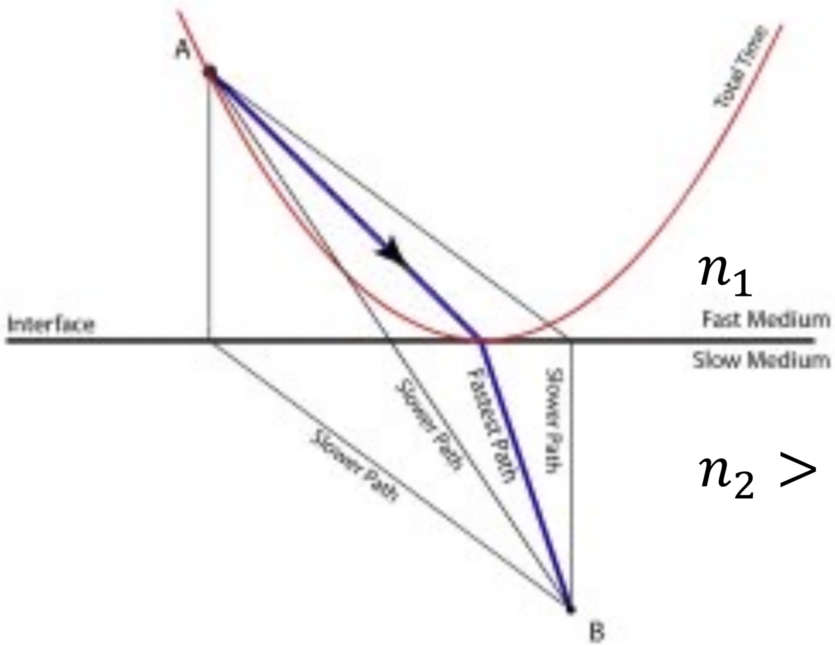


Principio de Fermat y Ley de Snell

El principio de Fermat, relacionado con el principio de mínima acción, dice:

- El camino que recorre la luz entre dos puntos, es tal que minimiza el tiempo en el que realiza el recorrido

- Esto equivale a decir que el recorrido óptimo es el de menor camino óptico.



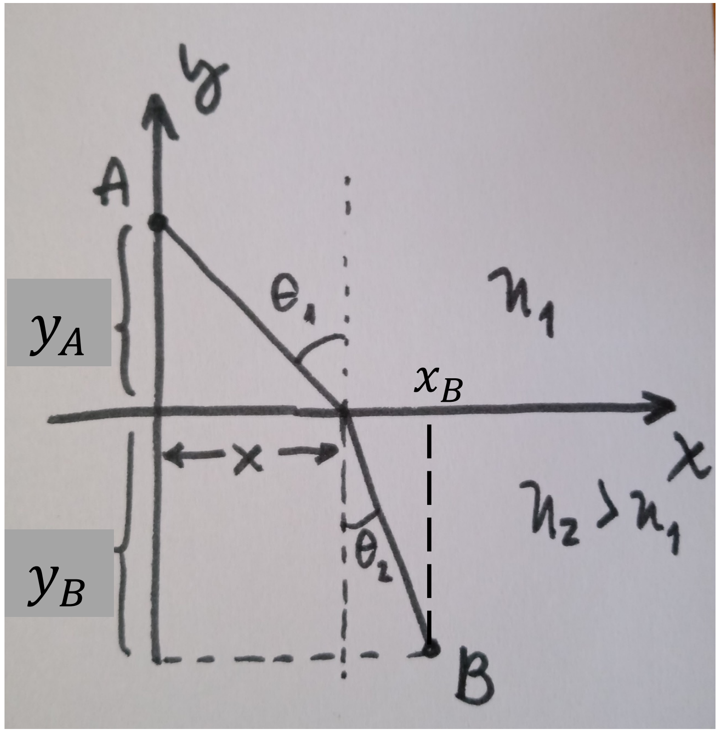
n_1

$n_2 > n_1$

Principio de Fermat y Ley de Snell

- Supongamos dos medios de índices n_1 y $n_2 > n_1$.
- El camino de la onda (rayo) pasa por lo puntos A $(0, y_A)$ y B (x_B, y_B).
- Sea x la abcisa del punto sobre la interfase donde impacta el rayo
- El camino óptico total recorrido entre A y B es

$$C.O. = n_1\sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$



Principio de Fermat y Ley de Snell

$$C.O. = n_1 \sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$

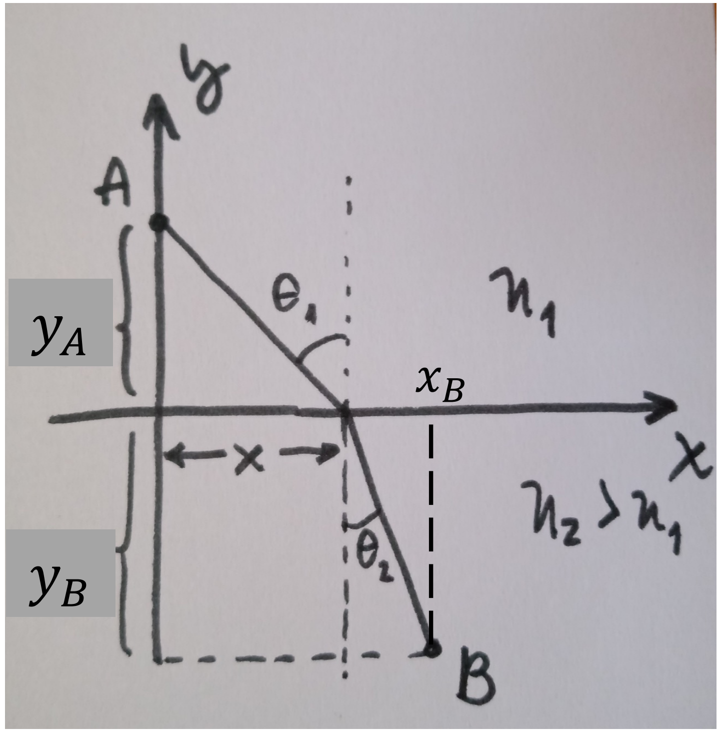
$$\frac{\partial C.O.}{\partial x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - n_2 \frac{+(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Busco mínimos

$$\frac{\partial C.O.}{\partial x} = 0$$

Luego

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = \frac{n_2 (x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$



Principio de Fermat y Ley de Snell

$$C.O. = n_1 \sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$

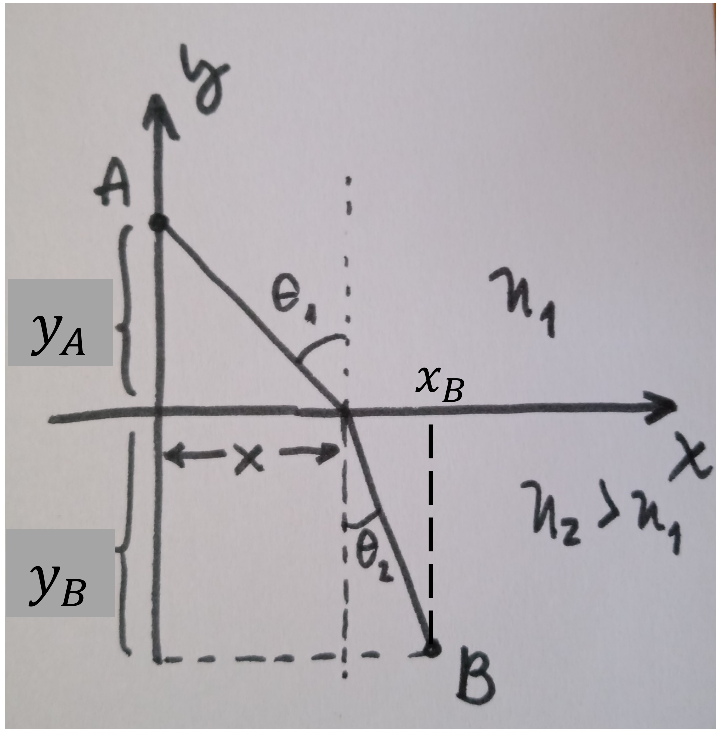
$$\frac{\partial\, C.O.}{\partial x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - n_2 \frac{+(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Busco mínimos

$$\frac{\partial\, C.O.}{\partial x} = 0$$

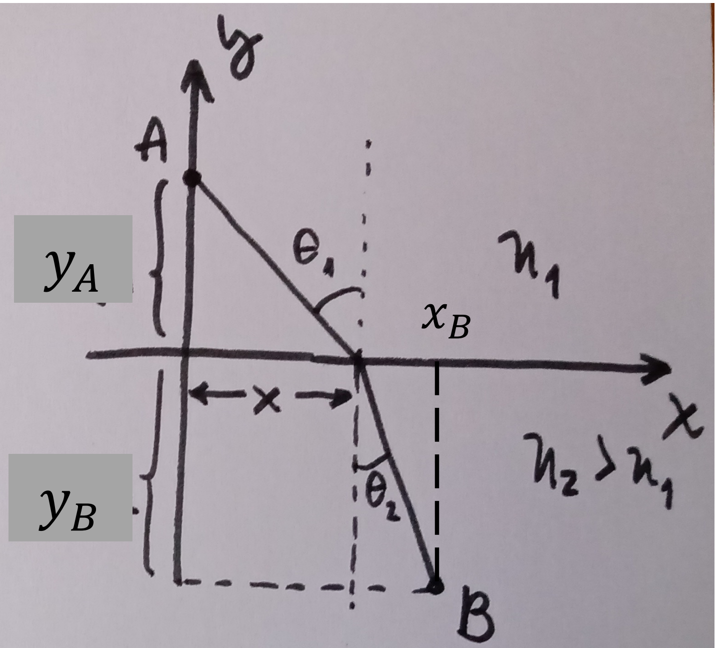
Luego

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = \frac{n_2 (x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$



Pero:

$$\operatorname{Sen}\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}}$$



y

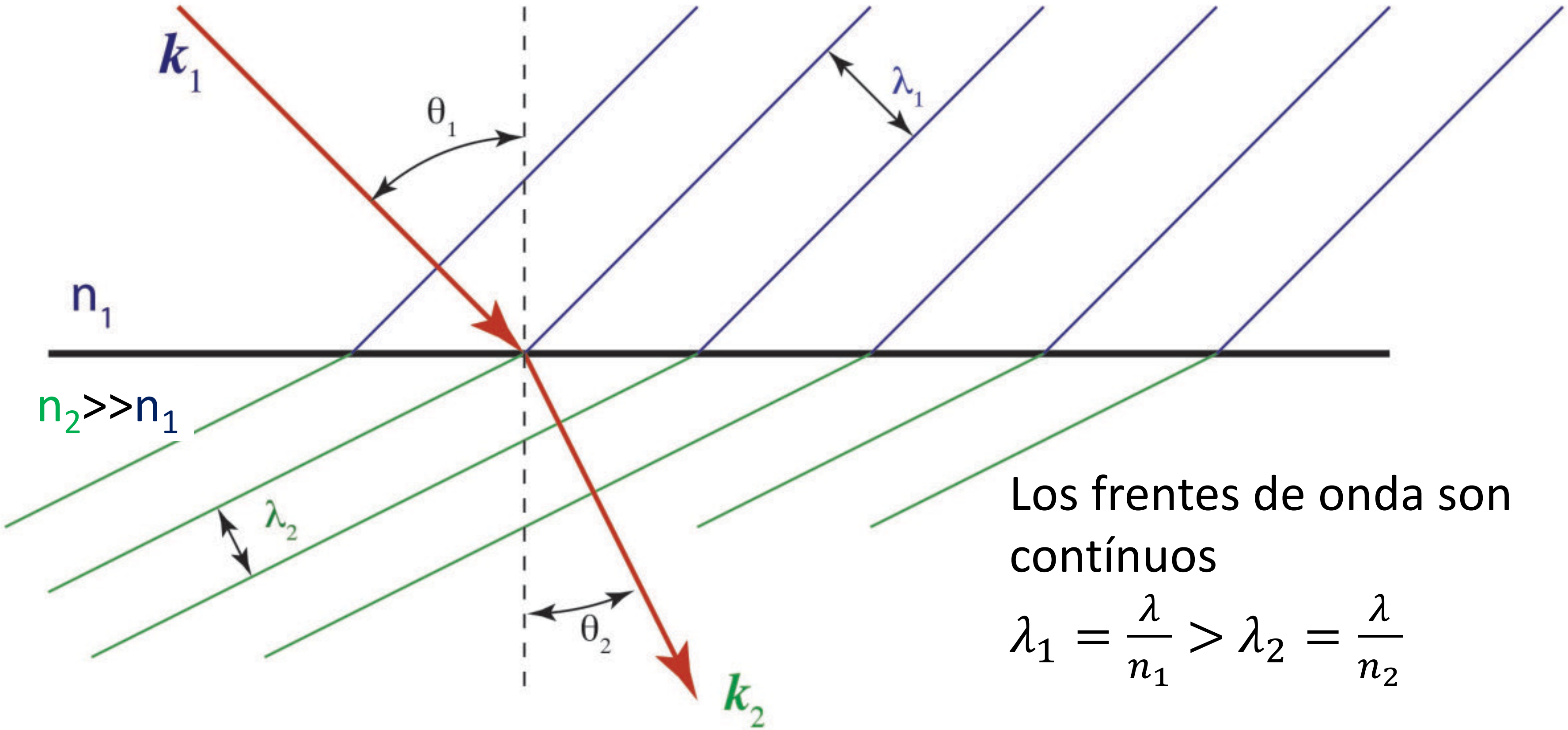
$$\operatorname{Sen}\theta_2 = \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Entonces, la condición que minimiza el C.O. entre A y B es

$$\boxed{n_1 \operatorname{Sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{Sen}\theta_2}$$

Ley de Snell

Snell's Law $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$



Los frentes de onda son contínuos

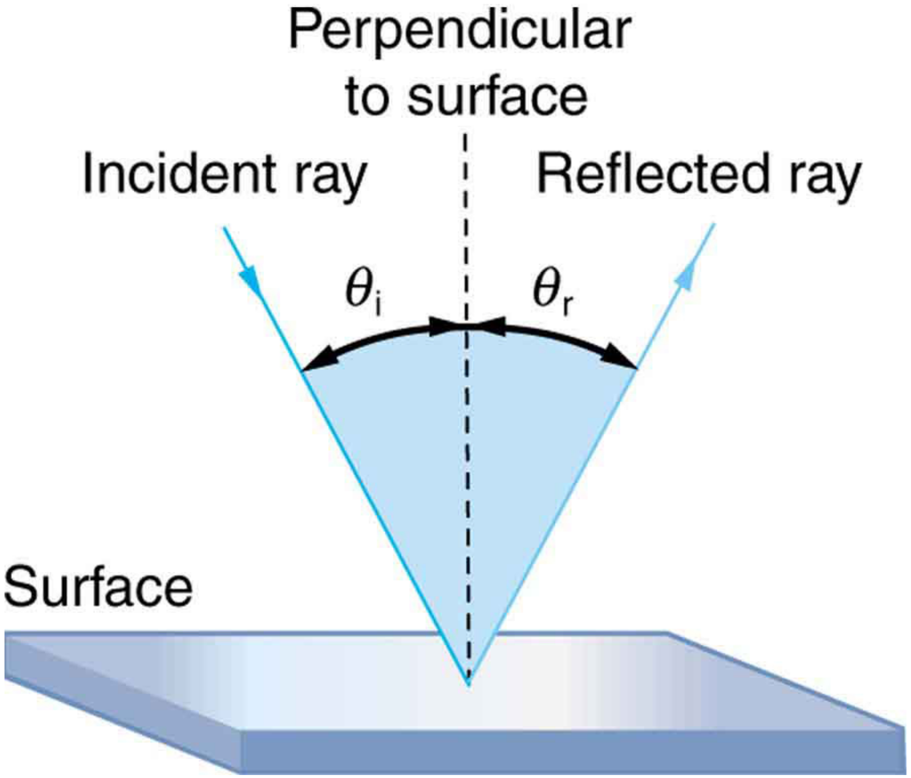
$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1} > \lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}$$

Ley de Reflexión

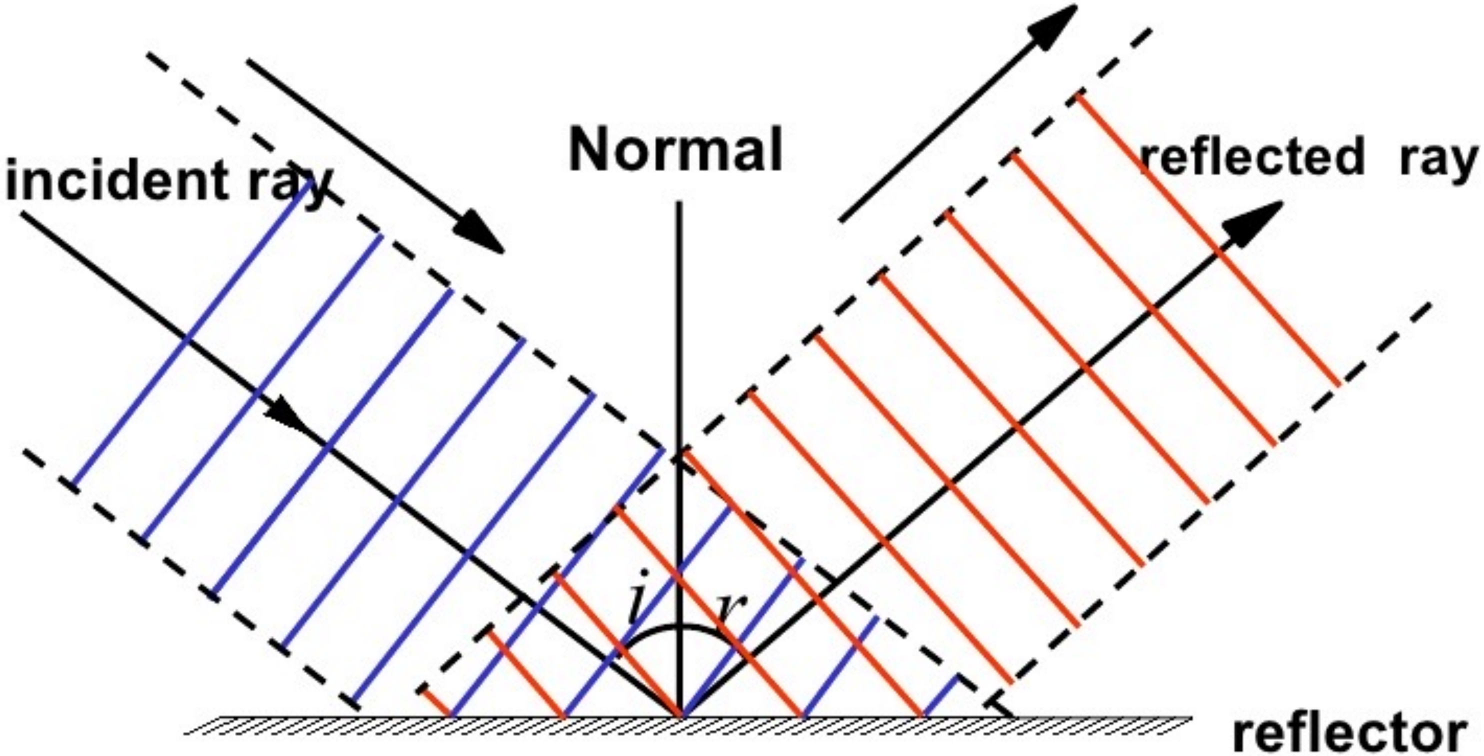
- Cuando una onda electromagnética propagándose en un medio de índice n_1 llega a una interfase con otro medio de índice n_2 además de refractarse, hay una porción que se refleja:

- Si el rayo (en la dirección del vector $\vec{k}$) incidente forma un ángulo θ_i con la normal a la interfase, la ley de reflexión dice que si θ_r es el ángulo del rayo reflejado :

$$\theta_i = \theta_r$$



Ley de reflexión y frentes de onda



Reflexión y Refracción en el plano de incidencia

https://phet.colorado.edu/en/simulation/bending-light

Placas plano paralelas

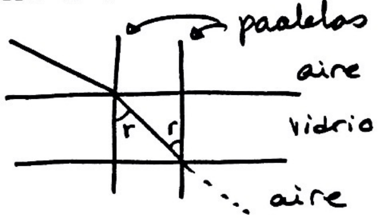
Supongamos una placa de caras paralelas planas de vidrio en aire.

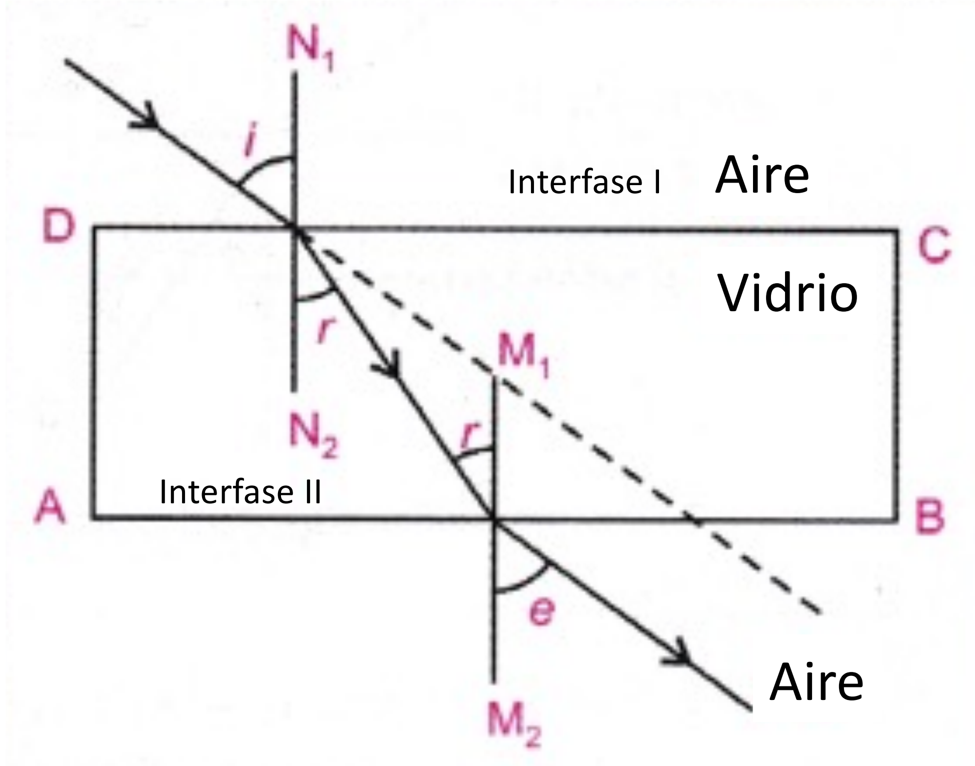
Aire : n_1

Vidrio : n_2

Interfase I: $n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$

Interfase II ángulo de incidencia igual a r por ángulos alternos internos entre paralelas





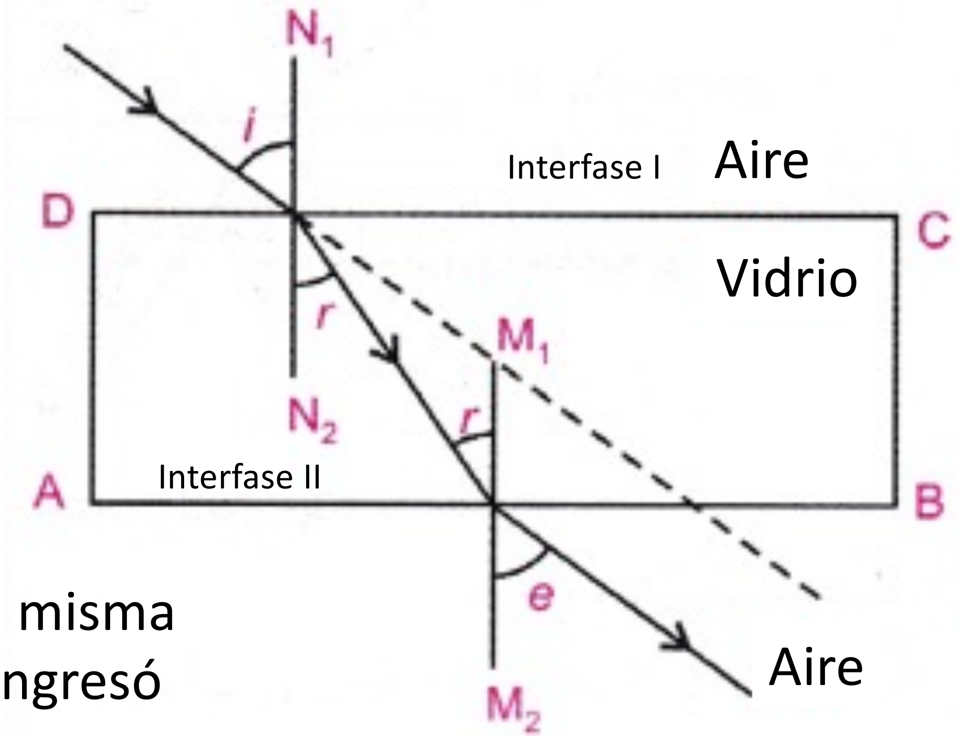
Placas plano paralelas

Entonces $n_2 \sin(r) = n_1 \sin(e)$

luego, de las interfases I y II:

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r) = n_1 \sin(e)$$

$$\Rightarrow \boxed{i = e}$$



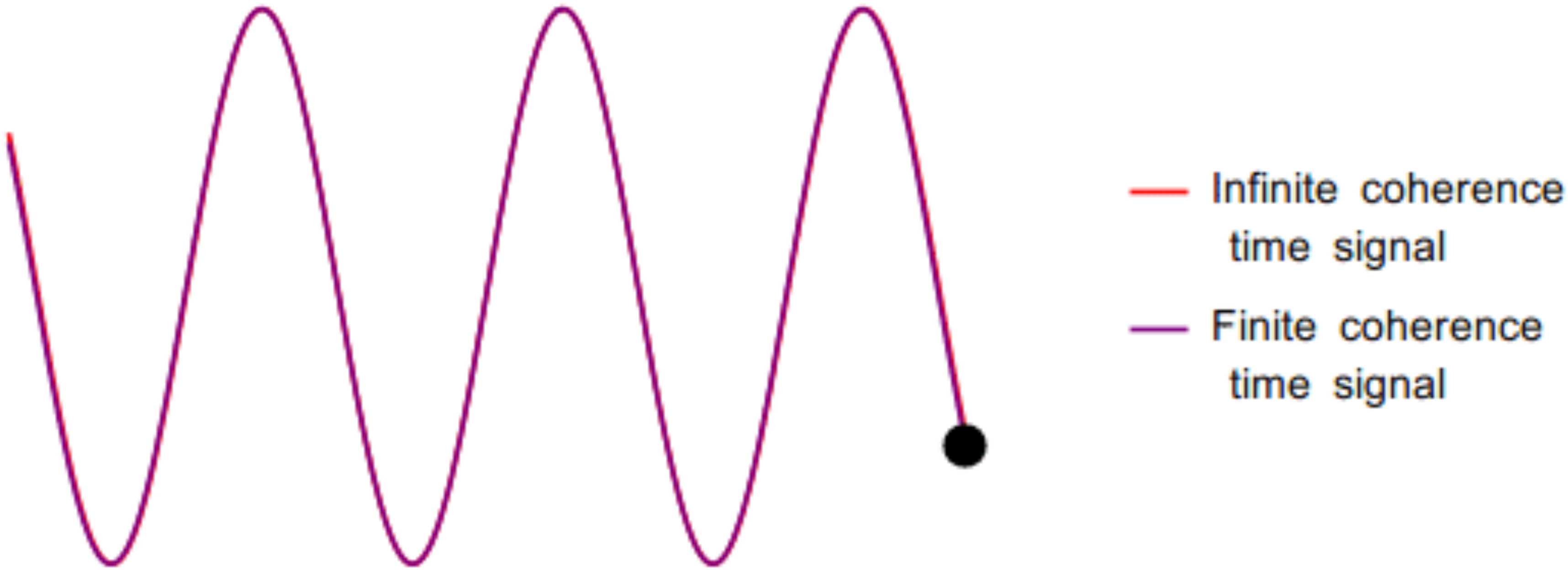
El rayo emerge con la misma dirección con la que ingresó pero desplazado.

Coherencia

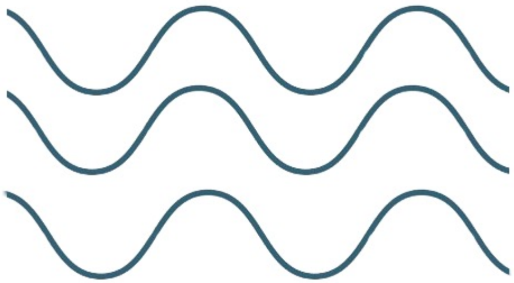
Coherencia temporal y espacial

- Los procesos de emisión de luz en general dan lugar a una serie de trenes de onda con diferentes fases iniciales aleatorias φ_i
$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \vec{E}_{0i}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_i\right)$$
- Coherencia temporal:
  - En la luz solar, sos trenes emitidos por una misma fuente mantienen su fase por alrededor de 10 períodos, por lo que se denomina **incoherente**. Algo parecido ocurre con la **polarización**.
  - Los lasers son fuentes de ondas con tiempo de coherencia más largos.
- Coherencia espacial: cuando la fuente no es puntual sino extendida, es la propiedad de que todas las fuentes que la componen emitan con la misma fase inicial.

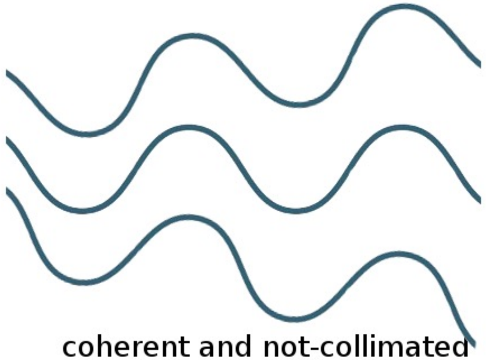
Perdida de coherencia temporal entre dos ondas



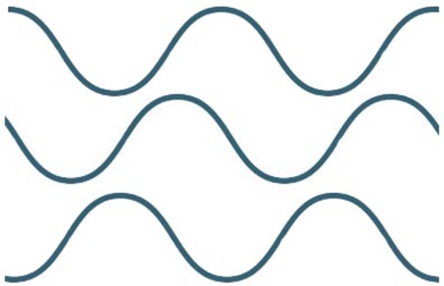
Incoherencia espacial



coherent and collimated



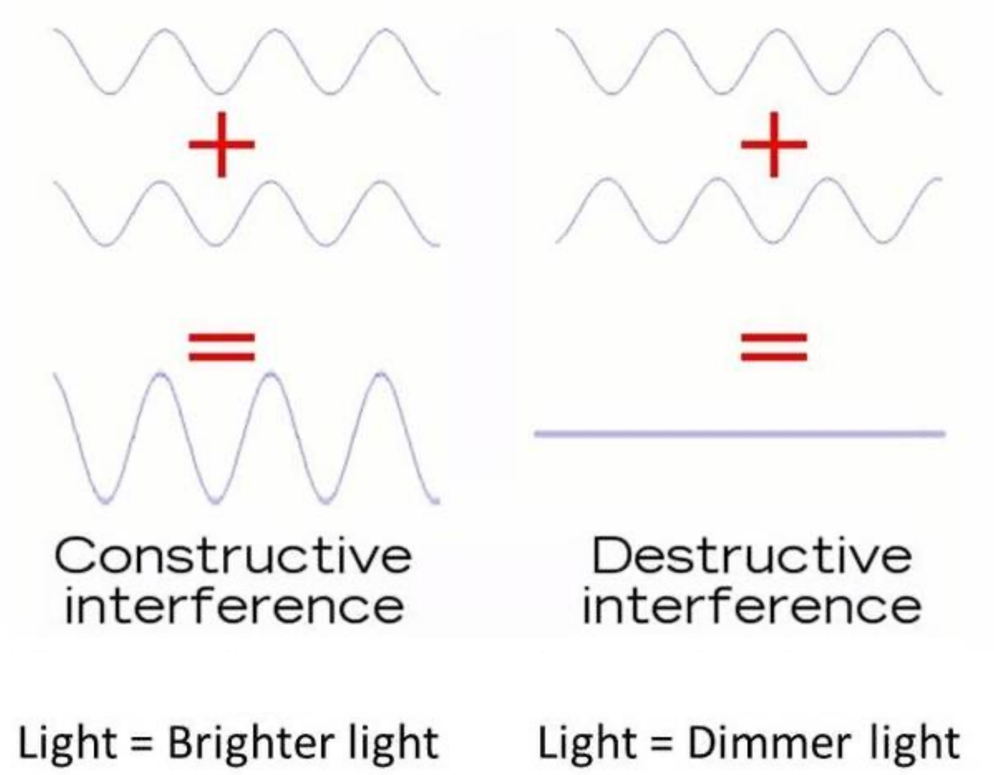
coherent and not-collimated



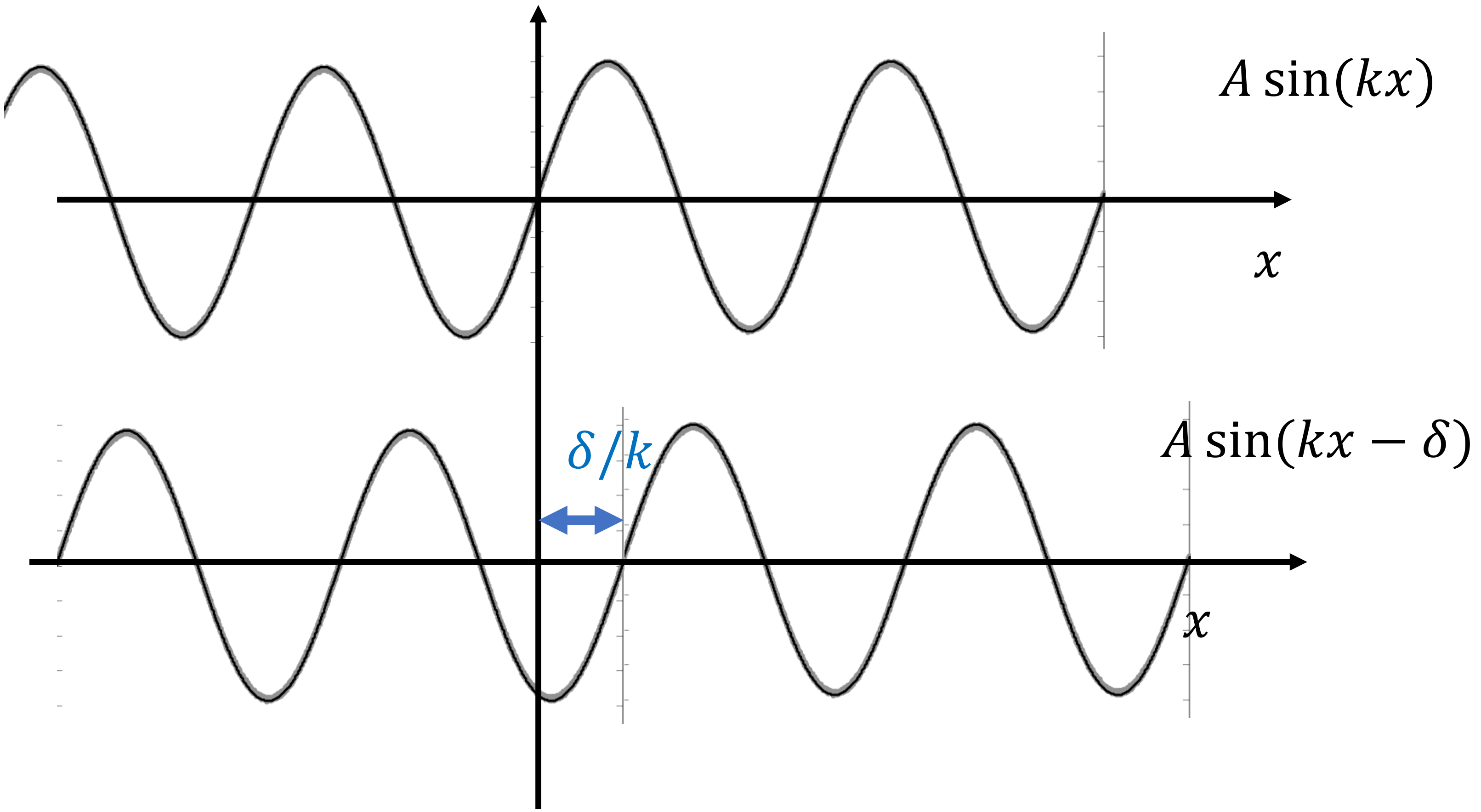
incoherent and collimated

Interferencia

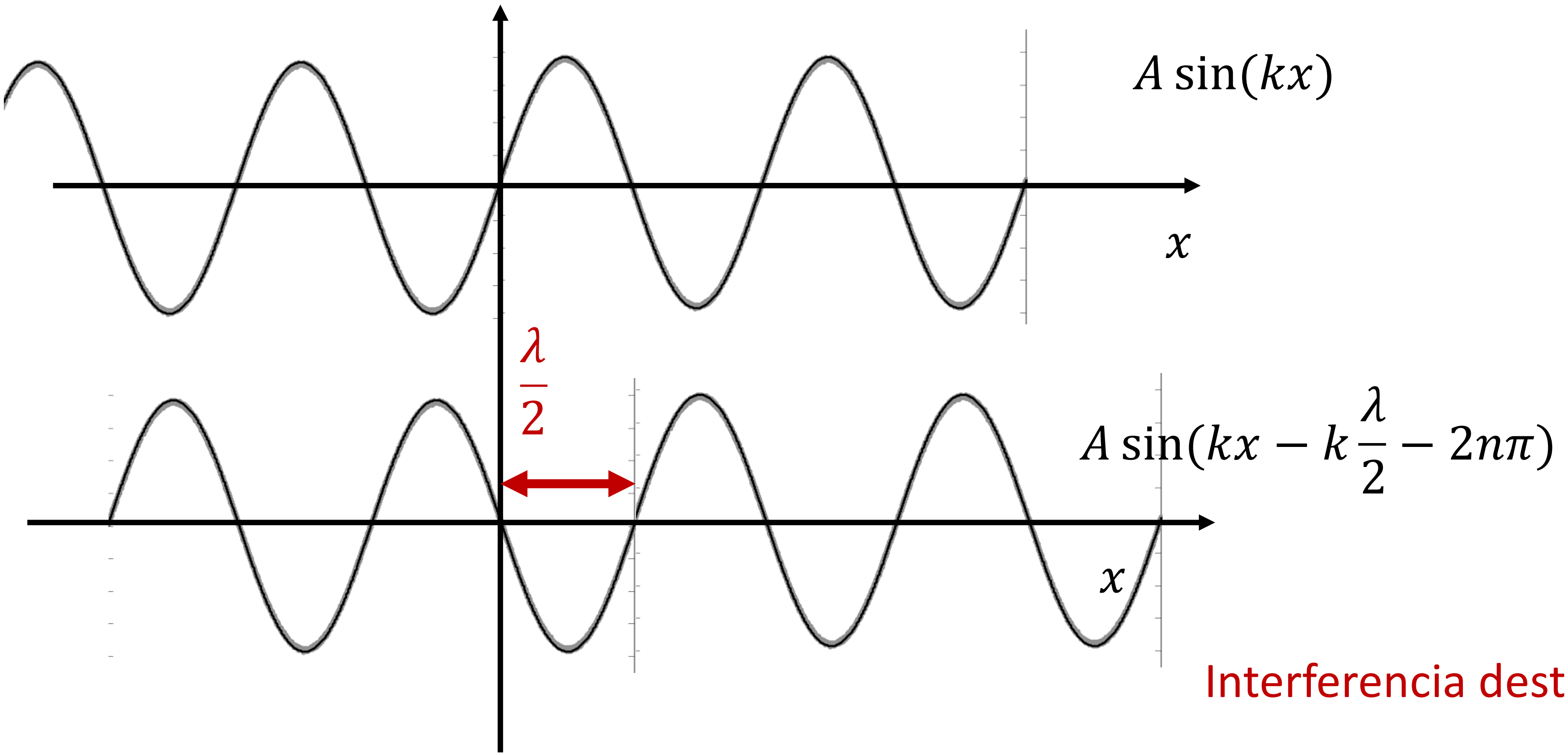
Interferencia constructiva versus destructiva



Suma de ondas de igual longitud de onda

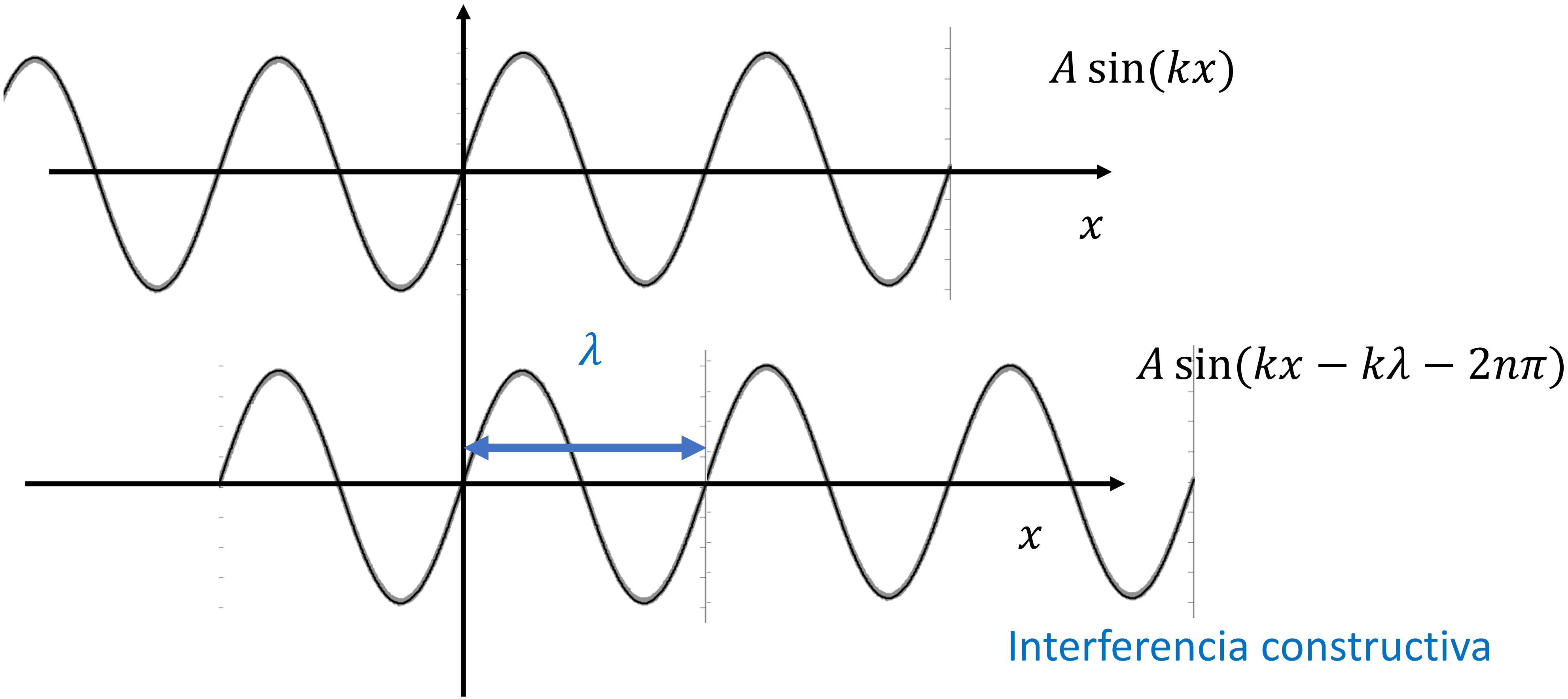


Suma de ondas de igual longitud de onda



Interferencia destructiva

Suma de ondas de igual longitud de onda



Interferencia constructiva